



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



**Wisner Coimbra de Paula**

**Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto  
Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS**

Rio de Janeiro  
2007

**Wisner Coimbra de Paula**

**Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto  
Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS**

**Dissertação apresentada como requisito  
parcial para obtenção do grau de Mestre,  
ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro.**

**Orientadora: Prof<sup>a</sup> Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares**

**Co-orientador: Prof. José Guilherme Santos da Silva**

**Rio de Janeiro**

**2007**

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/NPROTEC

P324 Paula, Wisner Coimbra de.  
Comportamento estrutural de lajes nervuradas de concreto armado com base no emprego do programa ANSYS / Wisner Coimbra de Paula. – 2007.  
189 f. : il.

Orientadora : Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares.  
Co-orientador: José Guilherme Santos da Silva.  
Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Lajes de concreto – Teses. 2. Construção de concreto armado – Teses. 3. Engenharia de estruturas – Teses. 4. Engenharia Civil – Teses. I. Tavares, Maria Elizabeth da Nóbrega. II. Silva, José Guilherme Santos da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.073

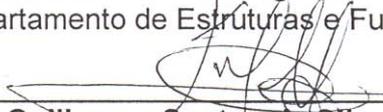
# Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS

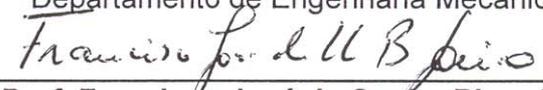
**Wisner Coimbra de Paula**

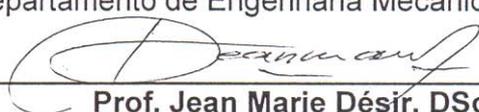
Dissertação apresentada ao PGECIV - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, como parte requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Ênfase: Estruturas.

Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares, DSc – Orientadora**  
Departamento de Estruturas e Fundações – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. José Guilherme Santos da Silva, DSc – Co-orientador**  
Departamento de Engenharia Mecânica – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Francisco José da Cunha Pires Soeiro, PhD**  
Departamento de Engenharia Mecânica – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Jean Marie Désir, DSc**  
Laboratório de Engenharia Civil – UENF

Dedico esta dissertação à minha mãe, Rosângela Coimbra, pelo incentivo, paciência e amor incomensuráveis. Sempre exemplo de dignidade e força...

## **Agradecimentos**

À FAPERJ – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - pela ajuda financeira.

Aos professores José Guilherme e Maria Elizabeth pela orientação e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas Bruno Lima, Mariana e Damásia pelo companheirismo, apoio e carinho a mim dedicados durante este período.

Aos meus irmãos, Cássio e Marlon, e meus grandes amigos, Igor e Edivandro (também irmãos) pelo amor e apoio incondicionais.

À minha mãe, Rosângela Coimbra, por todo carinho e força que me deu desde o início deste caminho de conhecimento.

À todas as pessoas que, de alguma maneira, contribuíram na execução deste trabalho.

## Resumo

Coimbra, Wisner de Paula. **Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS**. Rio de Janeiro, 2007. 189 p. (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

A utilização de lajes nervuradas nas edificações em geral vem crescendo no Brasil, pois, com o desenvolvimento da computação, a modelagem destas estruturas tornou-se mais acessível aos projetistas e as vantagens inerentes ao sistema tornaram-se visíveis. Por esta razão, vários trabalhos foram publicados nos últimos anos tendo como finalidade a análise deste tipo de laje, sempre utilizando e comparando diferentes métodos de análise, dentre os quais pode-se destacar: analogia de grelha e método dos elementos finitos. Uma das razões para isto é a utilização da analogia de grelha pelos principais programas comerciais de cálculo de concreto armado. Este trabalho faz uma análise paramétrica de um modelo de laje nervurada de concreto armado denominada REDUZCON e determina a influência de diversos parâmetros relevantes na análise elástico-linear destas lajes. O sistema de laje REDUZCON é um sistema de laje nervurada que utiliza cubas cilíndricas invertidas metálicas denominadas BRC (barrote redutor de concreto). Por meio do estudo paramétrico das lajes nervuradas de concreto armado do tipo REDUZCON são abordados fatores importantes para o modelo de analogia de grelha, como a condição do apoio (deslocável ou indesejável) e o momento de inércia à torção. Também é estudada a influência da relação entre os vãos e do número de nervuras para uma laje cuja quantidade de nervuras é diferente nos dois sentidos. Investiga-se, ainda, a frequência fundamental de algumas destas lajes, para comparação com os valores recomendados pela NBR-6118 (2003). Os resultados obtidos ao longo do estudo indicam claramente, que os parâmetros mais relevantes na analogia de grelha, tais como momento de inércia à torção e condição de apoio das lajes, modificam substancialmente os resultados de deslocamento e esforços do sistema estrutural.

### Palavras-chave:

Lajes Nervuradas, Analogia de Grelha, Concreto Armado, Frequência Fundamental em Lajes.

## **Abstract**

The use of ribbed slabs in the constructions in general is growing in Brazil, because, with the development of the computation, the modelling of these structures became more accessible to the designers and the inherent advantages to the system became visible. For this reason, several works were published in the last years having as purpose the analysis of this slabs type, always using and comparing different methods, among them, grillage analogy are the most used, since it is also used in the main commercial programs of reinforced concrete. In this work a parametric analyzes of a model of ribbed slabs of reinforced concrete called REDUZCON is made and it determines the influence of several relevant parameters in the elastic-lineal analysis of these slabs. This system makes use of inverse cylinder metallic cap named BRC (reduced concrete cap). Through the parametric analysis of the ribbed slabs REDUZCON, important factors are approached for the model of grillage analogy, as the boundary conditions, torsional inertia of the system (ribs and board beams), geometry of the edge beams, and the number of transversal ribbings. It is also studied the influence of the sides ratio. Finally is also investigated the natural frequency of some of these slabs and compared with the values recommended in the design codes. The results obtained along the study indicate clearly, that the most relevant parameters in the grillage analogy, such as torsional inertia and condition of support of the slabs, they modify the displacement results and efforts of the structural system substantially.

### **Key-words:**

Ribbed slabs, Grillage Analogy, Reinforced Concrete, Natural Frequencies in slabs.

# Sumário

<b>1. Introdução</b> .....	<b>24</b>
1.1. Generalidades.....	24
1.2. Estado da Arte na Análise de Lajes Nervuradas de Concreto Armado.....	28
1.3. Objetivos e Motivação .....	34
1.4. Escopo do Trabalho.....	35
<b>2. Aspectos Teóricos e Modelagem de Lajes Nervuradas</b> .....	<b>36</b>
2.1. Generalidades.....	36
2.2. Aspectos Teóricos .....	36
2.2.1. Teoria das Placas.....	36
2.2.2. Teoria das Grelhas.....	41
2.3. Lajes Nervuradas de Concreto Armado – Normas e Recomendações .....	46
2.4. Modelagem Computacional.....	48
2.4.1. Generalidades sobre o Método dos Elementos Finitos .....	48
2.4.2. Analogia de Grelha para as Lajes Nervuradas .....	50
2.4.2.1. Características Geométricas dos Elementos de Grelha .....	53
<b>3. Descrição do Sistema Estrutural Estudado</b> .....	<b>60</b>
3.1. Generalidades.....	60
3.2. Analogia de Grelha para Lajes do Tipo REDUZCON .....	60
3.3. Modelo Computacional Desenvolvido .....	64
3.4. Descrição do Sistema Estrutural Estudado .....	66
3.5. Propriedades Físicas e Geométricas .....	71
3.5.1.1. Inércia à Flexão das Barras da Grelha .....	72
3.5.1.2. Inércia à Flexão das Vigas de Bordo .....	72
3.5.1.3. Inércia à Torção das Barras da Grelha .....	72
3.5.1.4. Inércia à Torção das Vigas de Bordo.....	72
3.6. Carregamentos Adotados .....	73
3.7. Modelos Estruturais Analisados .....	74

3.7.1. Modelo I .....	74
3.7.2. Modelo II .....	78
3.7.3. Modelo III .....	80
3.7.4. Modelo IV .....	83
3.7.5. Modelo V .....	85
3.7.6. Modelo VI .....	87
3.7.7. Modelo VII .....	89
<b>4. Avaliação dos Resultados .....</b>	<b>92</b>
<b>4.1. Introdução .....</b>	<b>92</b>
<b>4.2. Validação dos Modelos Numéricos .....</b>	<b>92</b>
4.2.1. Análise de uma Laje Maciça sem a Consideração das Vigas do Contorno .....	92
4.2.2. Análise de uma Laje Nervurada sem a Consideração das Vigas do Contorno .....	97
4.2.3. Análise de uma Laje Maciça Considerando as Vigas do Contorno .....	100
<b>4.3. Análises das Lajes Nervuradas Estudadas .....</b>	<b>103</b>
4.3.1. Estudo sobre a Influência das Condições de Contorno .....	103
4.3.2. Resultados das Análises das Lajes Nervuradas Quadradas ( $L_x/L_y = 1$ ) .....	107
4.3.2.1. Influência do Momento de Inércia à Torção das Faixas da Grelha .....	111
4.3.2.2. Influência do Momento de Inércia à Torção das Vigas de Bordo .....	115
4.3.2.3. Comparação entre os Modelos Computacionais Desenvolvidos com e sem Vigas de Bordo para as Lajes Quadradas ( $L_x/L_y = 1$ ) .....	118
4.3.3. Resultados das Análises das Lajes Nervuradas com $L_x/L_y = 1,5$ .....	122
4.3.3.1. Influência do Momento de Inércia à Torção das Faixas da Grelha .....	126
4.3.3.2. Influência do Momento de Inércia à Torção das Vigas de Bordo .....	129
4.3.3.3. Comparação entre os Modelos Computacionais Desenvolvidos com e sem Vigas de Bordo para as Lajes Retangulares ( $L_x/L_y = 1,5$ ) .....	132
4.3.4. Resultados das Análises das Lajes Nervuradas com $L_x/L_y = 2$ .....	136
4.3.4.1. Influência do Momento de Inércia à Torção das Faixas da Grelha .....	139
4.3.4.2. Influência do Momento de Inércia à Torção das Vigas de Bordo .....	142
4.3.4.3. Comparação entre os Modelos Computacionais Desenvolvidos com e sem Vigas de Bordo para as Lajes Retangulares ( $L_x/L_y = 2$ ) .....	145
4.3.5. Comparação entre os Resultados para as Diferentes Dimensões das Lajes Nervuradas...	149
<b>4.4. Comparação com Modelos que Discretizam a Mesa das Faixas como Placa .....</b>	<b>152</b>
4.4.1. Modelo Numérico “Viga – Placa” .....	152
<b>5. Frequências Fundamentais e Modos de Vibração das Lajes REDUZCON .....</b>	<b>156</b>
<b>5.1. Introdução .....</b>	<b>156</b>
<b>5.2. Análise de Autovalores e Autovetores .....</b>	<b>156</b>

<b>6. Considerações Finais.....</b>	<b>161</b>
<b>6.1. Introdução .....</b>	<b>161</b>
<b>6.2. Conclusões .....</b>	<b>161</b>
<b>6.3. Sugestões para Trabalhos Futuros.....</b>	<b>164</b>
<b>Anexo A - Resultados das Lajes Nervuradas de 13 cm de Altura .....</b>	<b>169</b>
<b>A.1. Laje Nervurada Quadrada.....</b>	<b>169</b>
<b>A.2. Laje Nervurada Retangular (<math>L_x/L_y = 1,5</math>) .....</b>	<b>173</b>
<b>A.3. Laje Nervurada Retangular (<math>L_x/L_y = 2</math>) .....</b>	<b>177</b>
<b>Anexo B - Resultados das Lajes Nervuradas de 26 de Altura.....</b>	<b>181</b>
<b>B.1. Laje Nervurada Quadrada.....</b>	<b>181</b>
<b>B.2. Laje Nervurada Retangular (<math>L_x/L_y = 1,5</math>) .....</b>	<b>184</b>
<b>B.3. Laje Nervurada Retangular (<math>L_x/L_y = 2</math>) .....</b>	<b>187</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Laje nervurada de uma residência, Barueri-SP.....	25
Figura 1.2 – Laje nervurada bidirecional [2].....	25
Figura 1.3 - Vigotas pré-moldadas.....	27
Figura 1.4 – Laje pré-moldada com elemento de enchimento.....	27
Figura 1.5 – Bloco de EPS usado em lajes nervuradas.....	28
Figura 1.6 – Formas plásticas da empresa ATEX DO BRASIL.....	29
Figura 1.7 – Transformação de uma laje nervurada em maciça equivalente [5].....	30
Figura 1.8 – Modelo laminar para laje maciça de concreto armado [9,10].....	31
Figura 2.1 – Sistema de coordenada de um elemento de placa.....	38
Figura 2.2 – Esforços internos solicitantes em um elemento de estrutura espacial [24].....	42
Figura 2.3 – Esforços internos solicitantes em um elemento de grelha [24].....	42
Figura 2.4 - Grelha plana.....	43
Figura 2.5 – Graus de liberdade de uma barra de grelha.....	43
Figura 2.6 – Eixos globais da estrutura em relação ao elemento de grelha.....	44
Figura 2.7 – Seção típica e dimensões mínimas de uma laje nervurada.....	47
Figura 2.8 – Representação da laje nervurada na analogia de grelha.....	50
Figura 2.9 – Carregamentos nos nós (carga nodal P) e carregamento distribuído (carga uniformemente distribuída q).....	51
Figura 2.10 – Geometria de uma laje nervurada com os eixos de referência [30].....	54
Figura 2.11 – Seção transversal de seção T da laje nervurada.....	55
Figura 2.12 – Subdivisões da seção transversal considerada na laje nervurada [30].....	57
Figura 3.1 – Lajes nervuradas do tipo REDUZCON.....	60
Figura 3.2 – Esquema estrutural de laje REDUZCON [21].....	61
Figura 3.3 – Formas semicilíndricas de lajes REDUZCON.....	61
Figura 3.4 – Esquema estrutural de escoramento.....	62
Figura 3.5 – Sistema de laje nervurada com trechos de laje maciça.....	62
Figura 3.6 – Esquema de laje REDUZCON [21].....	63
Figura 3.7 - Elemento BEAM44 [19].....	64
Figura 3.8 – Visualização da excentricidade existente entre a viga de bordo e a laje nervurada.....	65
Figura 3.9 – Malha de elementos finitos [19].....	65
Figura 3.10 – Esquema de montagem da laje nervurada do tipo REDUZCON [21] (17 formas formando 16 nervuras principais – cota em cm).....	66
Figura 3.11 – Detalhes do corte A-A.....	67
Figura 3.12 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 26 cm de altura (13 formas formando 12 nervuras principais – cota em cm).....	67
Figura 3.13 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 13 cm de altura e a relação entre os vãos igual a 1,5 (25 formas BRC100 formando 24 nervuras principais – cota em cm).....	69

Figura 3.14 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 26 cm de altura e a relação entre os vãos igual a 1,5 (20 formas BRC210 formando 19 nervuras principais – cota em cm) .....	69
Figura 3.15 - Seção do tipo “T” adotada para as nervuras principais das lajes com 13 cm de altura (BRC100 - cotas em cm).....	70
Figura 3.16 - Seção do tipo “T” adotada para as nervuras principais das lajes com 17 cm de altura (BRC130 - cotas em cm).....	70
Figura 3.17 - Seção do tipo “T” adotada para as nervuras principais das lajes com 26 cm de altura (BRC210 - cotas em cm).....	71
Figura 3.18 – Carga uniformemente distribuída sobre as nervuras [23].....	73
Figura 3.19 – Área considerada no cálculo do peso próprio das nervuras .....	74
Figura 3.20 – Laje do tipo REDUZCON [21]com 2 nervuras secundárias (cotas em cm).....	75
Figura 3.21 – Seções transversais (cotas em cm).....	75
Figura 3.22 – Representação da grelha com 2 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	76
Figura 3.23 - Laje do tipo REDUZCON [21] com 3 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	78
Figura 3.24 – Representação da grelha com 3 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	79
Figura 3.25 – Modelo estrutural com 5 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm).....	81
Figura 3.26 - Seções transversais (cotas em cm).....	81
Figura 3.27 – Representação da grelha com 5 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	82
Figura 3.28 - Modelo estrutural com 7 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm).....	83
Figura 3.29 - Seções transversais (cotas em cm).....	83
Figura 3.30 – Representação da grelha com 7 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	84
Figura 3.31 - Modelo estrutural com 10 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm).....	85
Figura 3.32 - Seções transversais (cotas em cm).....	85
Figura 3.33 – Representação da grelha com 10 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	86
Figura 3.34 - Modelo estrutural com 13 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm).....	87
Figura 3.35 - Seções transversais (cotas em cm).....	87
Figura 3.36 – Representação da grelha com 13 nervuras secundárias - distância entre os eixos dos elementos (cotas em cm). .....	88
Figura 3.37 - Modelo estrutural com 16 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm).....	89
Figura 3.38 - Seções transversais (cotas em cm).....	89
Figura 3.39 – Representação da grelha com 16 nervuras secundárias (cotas em cm). .....	90
Figura 4.1 – Grelha de vigas com malha de 80 x 80 cm (cotas em cm).....	93
Figura 4.2 – Deslocamento da grelha (m).....	94
Figura 4.3 – Diagrama de momentos fletores da grelha (Nm).....	94
Figura 4.4 – Diagrama de momentos torçores da grelha (Nm) .....	95

Figura 4.5 – Deslocamento da grelha sem rigidez à torção (m).....	95
Figura 4.6 – Diagrama de momentos fletores da grelha, desprezando a rigidez à torção desta (Nm) 96	96
Figura 4.7 – Diagrama de momentos torçores da grelha, desprezando a rigidez à torção desta (Nm)97	97
Figura 4.8 – Laje nervurada do exemplo 4, análise 1, STRAMANDINOLI [7] (cotas em cm) .....	98
Figura 4.9 – Seção considerada para as barras da grelha do exemplo 4, STRAMANDINOLI [7] (cotas em cm).....	98
Figura 4.10 – Deslocamento da grelha (m).....	99
Figura 4.11 – Diagrama de momentos fletores da grelha (Nm).....	99
Figura 4.12 – Diagrama de momentos torçores da grelha (Nm) .....	99
Figura 4.13 – Laje maciça apoiada em vigas consideradas deformáveis verticalmente [37].....	100
Figura 4.14 – Deslocamento da grelha (m).....	101
Figura 4.15 – Diagramas de momentos fletores da grelha (Nm).....	102
Figura 4.16 – Diagramas de momentos torçores da grelha (Nm).....	102
Figura 4.17 – Posicionamento das faixas da grelha para a laje com 7 nervuras secundárias.....	104
Figura 4.18 – Influência das vigas de bordo na analogia de grelha .....	106
Figura 4.19 – Posicionamento das primeiras faixas que discretizam a laje nervurada .....	107
Figura 4.20 – Deslocamentos em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	112
Figura 4.21 – Momentos fletores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	113
Figura 4.22 – Momentos torçores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	114
Figura 4.23 – Deslocamentos em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	115
Figura 4.24 – Momentos fletores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	116
Figura 4.25 – Momentos torçores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	117
Figura 4.26 – Deslocamentos em função da inércia à torção dos elementos .....	119
Figura 4.27 – Momentos fletores em função da inércia à torção dos elementos .....	120
Figura 4.28 – Momentos torçores em função da inércia à torção dos elementos .....	121
Figura 4.29 – Deslocamentos em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	126
Figura 4.30 – Momentos fletores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	127
Figura 4.31 – Momentos torçores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	128
Figura 4.32 – Deslocamentos em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	129
Figura 4.33 – Momentos fletores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	130
Figura 4.34 – Momentos torçores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	131
Figura 4.35 – Deslocamentos em função da inércia à torção dos elementos .....	133
Figura 4.36 – Deslocamento da faixa da grelha com a consideração de apoios rígidos .....	133
Figura 4.37 – Momentos fletores em função da inércia à torção dos elementos .....	134
Figura 4.38 – Momentos torçores em função da inércia à torção dos elementos .....	135
Figura 4.39 – Deslocamentos em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	140
Figura 4.40 – Momentos fletores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	141
Figura 4.41 – Momentos torçores em função da inércia à torção das faixas da grelha .....	142
Figura 4.42 – Deslocamentos em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	143
Figura 4.43 – Momentos fletores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	144

Figura 4.44 – Momentos torçores em função da inércia à torção das vigas de bordo .....	145
Figura 4.45 – Deslocamentos em função da inércia à torção dos elementos .....	146
Figura 4.46 – Momentos fletores em função da inércia à torção dos elementos .....	147
Figura 4.47 – Momentos torçores em função da inércia à torção dos elementos .....	148
Figura 4.48 – Deslocamentos nas lajes nervuradas com diferentes relações entre os comprimentos dos vãos .....	149
Figura 4.49 – Esforços nas lajes nervuradas com diferentes relações entre os comprimentos dos vãos .....	151
Figura 4.51 – Discretização das nervuras no modelo numérico “viga-placa” .....	152
Figura 4.52 – Elemento SHELL63 [19] .....	153
Figura 5.1 – 1º modo de vibração referente às lajes com 3 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 1$ ) .....	158
Figura 5.2 – 1º modo de vibração referente às lajes com 3 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 1,5$ ) .....	158
Figura 5.3 – 1º modo de vibração referente às lajes com 3 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 2$ ) .....	159
Figura 5.4 – 1º modo de vibração referente às lajes com 2 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 1$ ) .....	159
Figura 5.5 – 1º modo de vibração referente às lajes com 2 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 1,5$ ) .....	160
Figura 5.6 – 1º modo de vibração referente às lajes com 2 nervuras secundárias ( $L_x/L_y = 2$ ) .....	160

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Composição estrutural nas modalidades dos barrotes.....	63
Tabela 3.2 - Variação do número de nervuras secundárias dos modelos estruturais obtidos com as formas BRC100 e BRC130 .....	68
Tabela 3.3 - Variação do número de nervuras secundárias dos modelos estruturais obtidos com a forma BRC210.....	68
Tabela 3.4 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 2 nervuras secundárias .....	76
Tabela 3.5 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 5 nervuras secundárias .....	81
Tabela 3.6 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente.....	82
Tabela 3.7 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 7 nervuras secundárias .....	84
Tabela 3.8 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente.....	84
Tabela 3.9 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 10 nervuras secundárias .....	86
Tabela 3.10 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente.....	86
Tabela 3.11 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 13 nervuras secundárias .....	88
Tabela 3.12 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente.....	88
Tabela 3.13 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 16 nervuras secundárias .....	90
Tabela 3.14 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente.....	90
Tabela 3.15 – Características físicas e geométricas das vigas de bordo.....	91
Tabela 4.1 – Comparação entre os resultados fornecidos pelo programa Ansys [19] e o programa AltoQI [36].....	93
Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados fornecidos pelo programa Ansys [19] e o programa AltoQI [36].....	97
Tabela 4.3 – Comparação entre os resultados obtidos pelo programa Ansys [19] e pelos resultados de STRAMANDINOLI [7].....	100
Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados obtidos pelo programa Ansys e pelos resultados de SILVA [37] .....	103
Tabela 4.5 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 13 cm de altura feitas sem a consideração de vigas de bordo, apenas com apoios rígidos .....	104
Tabela 4.6 - Resultados da análise da laje nervurada quadrada de 13 cm de altura, com 7 nervuras secundárias, feitas considerando as vigas de bordo (15 x 40 cm).....	105
Tabela 4.7 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	108

Tabela 4.8 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	109
Tabela 4.9 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	109
Tabela 4.10 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	110
Tabela 4.11 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	110
Tabela 4.12 - Resultados das análises da laje nervurada quadrada de 17 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	111
Tabela 4.13 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 17 cm de altura, apoiada em apoios indeslocáveis: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha .....	118
Tabela 4.14 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 17 cm de altura, apoiada em apoios indeslocáveis: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha.....	119
Tabela 4.15 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	123
Tabela 4.16 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	123
Tabela 4.17 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	124
Tabela 4.18 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	124
Tabela 4.19 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	125
Tabela 4.20 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	125
Tabela 4.21 - Resultados das análises das lajes nervuradas de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ , apoiada em apoios indeslocáveis: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha .	132
Tabela 4.22 - Resultado das análises das lajes nervuradas de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ , apoiada em apoios indeslocáveis: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha...	132
Tabela 4.23 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	136
Tabela 4.24 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	137
Tabela 4.25 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	137
Tabela 4.26 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	138
Tabela 4.27 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	138

Tabela 4.28 - Resultados das análises das lajes de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	139
Tabela 4.29 - Resultados das análises das lajes nervuradas de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ , apoiada em apoios indeslocáveis: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha .	146
Tabela 4.30 - Resultado das análises das lajes nervuradas de 17 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ , apoiada em apoios indeslocáveis: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha.....	146
Tabela 4.31 – Comparação entre os modelos de analogia de grelha e viga-placa.....	154
Tabela 5.1 Freqüência crítica para alguns casos especiais de estruturas [1].	157
Tabela 5.2 – Freqüência natural das lajes analisadas pela analogia de grelha. ....	157
Tabela A.1 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura, apoiada em apoios indeslocáveis: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha.....	169
Tabela A.2 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura, apoiada em apoios indeslocáveis: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha.....	169
Tabela A.3 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	169
Tabela A.4 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradaa de 13 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I.....	170
Tabela A.5 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	170
Tabela A.6 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura: 1 % do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II.....	171
Tabela A.7 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	171
Tabela A.8 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 13 cm de altura: 1% domomento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	172
Tabela A.9 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	173
Tabela A.10 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	174
Tabela A.11 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	174
Tabela A.12 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	175
Tabela A.13 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	175
Tabela A.14 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	176
Tabela A.15 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	177

Tabela A.16 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	178
Tabela A.17 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	178
Tabela A.18 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	179
Tabela A.19 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	179
Tabela A.20 - Resultados das análises das lajes de 13 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	180
Tabela B.1 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	181
Tabela B.2 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	181
Tabela B.3 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	182
Tabela B.4 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	182
Tabela B.5 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	183
Tabela B.6 - Resultados das análises das lajes nervuradas quadradas de 26 cm de altura: 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	183
Tabela B.7 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	184
Tabela B.8 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	184
Tabela B.9 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	185
Tabela B.10 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	185
Tabela B.11 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	186
Tabela B.12 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 1,5$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	186
Tabela B.13 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	187
Tabela B.14 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio I .....	187

Tabela B.15 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	188
Tabela B.16 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e o das vigas de bordo no estádio II .....	188
Tabela B.17 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : momento de inércia à torção integral das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo .....	189
Tabela B.18 - Resultados das análises das lajes de 26 cm de altura, com $L_x/L_y = 2$ : 1% do momento de inércia à torção das faixas da grelha e desprezando o das vigas de bordo.....	189

## Lista de Símbolos

$A_i$	área da porção $i$ da seção transversal
$B$	rigidez equivalente à torção de uma laje ortotrópica
$B_w$	largura da nervura da seção T
$b_i$	largura da porção $i$ da seção transversal
$b_f$	largura da mesa da seção T
$D$	rigidez da placa à flexão
$D_i$	distância do centro de gravidade da porção $i$ ao centro de gravidade da seção
$D_x, D_y$	rigidezes à flexão nas direções dos eixos coordenados $x$ e $y$ , respectivamente
$D_{xy}, D_{yx}$	rigidezes à torção nas direções dos eixos coordenados $x$ e $y$ , respectivamente
$D_1, D_2$	contribuição da flexão na torção da placa enrijecida
$E, E_c$	módulo de elasticidade (deformação) longitudinal, MPa
$E_{cs}$	módulo de elasticidade longitudinal secante, MPa
$e_x, e_y$	distância do topo da laje à linha neutra nas direções $x$ e $y$ , respectivamente
$F_x, F_y,$ $F_z$	forças aplicadas nas direções dos eixos $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente
$f$	freqüência natural da estrutura
$f_{ck}$	resistência característica do concreto à compressão
$f_{crit}$	freqüência crítica
$G, G_c$	módulo de elasticidade transversal, MPa
$(g + q)$	ação devida ao peso próprio e aos carregamentos externos aplicada perpendicularmente ao plano da placa no interior da placa
$h$	altura da laje
$h_i$	altura da porção $i$ da seção transversal
$h_f$	altura da mesa da seção T
$I$	momento de inércia à flexão da barra
$I_x$	momento de inércia à torção
$I_y, I_z$	momentos de inércia à flexão em torno do eixo $y$ e $z$ , respectivamente
$I_{sx}$	momento de inércia nas seções das nervuras de acordo com o eixo $x$
$I_{sy}$	momento de inércia nas seções das nervuras de acordo com o eixo $y$
$J$	momento de inércia à torção da barra
$J_1$	momento de inércia à torção relativo à mesa de uma seção T
$J_2$	momento de inércia à torção relativo à nervura de uma seção T
$L$	comprimento da barra

$L_x$	comprimento da laje no sentido de x (maior dimensão)
$L_y$	comprimento da barra no sentido de y (menor dimensão)
$M_{ox}, M_{oy},$ $M_{oz}$	momentos fletores aplicados nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente
$M_x$	momento fletor na nervura principal
$M_y$	momento fletor na nervura secundária
$M_{xy}$	momento torçor na nervura secundária
$M_{yx}$	momento torçor na nervura principal
$m_x$	momento por unidade de comprimento
NP	nervura principal
NS	nervura secundária
$S_m$	matriz de rigidez do elemento de grelha
$S_{md}$	matriz de rigidez associada aos eixos globais da estrutura
$S_x$ e $S_y$	espaçamento das nervuras na direção do eixo x
$S_x$ e $S_y$	espaçamento das nervuras na direção do eixo y
VB	viga de bordo
$x_m, y_m,$ $z_m$	eixos coordenados locais do elemento de grelha
$y_{cg}$	ordenada do centróide da seção T, medido a partir da face superior da nervura
w	deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje, cm
$\alpha_x, \alpha_y$	espaçamento das nervuras nas direções x e y, respectivamente
$\beta$	constante usual de torção para seções retangulares
$\gamma_c$	peso específico para o concreto armado
$\nu$	coeficiente de Poisson do concreto
{d}	vetor dos deslocamentos de cada barra da estrutura
{F}	vetor coluna de cargas externas
{F <sub>0</sub> }	vetor coluna dos esforços de imobilização dos nós da estrutura
2H	soma das rigidezes à torção nas direções x e y
[K]	matriz de rigidez da estrutura
[r]	matriz de rigidez no sistema global
{S}	esforços solicitantes nas extremidades das barras no sistema global
{S <sub>0</sub> }	vetor de esforços de imobilização dos nós de cada barra no sistema global
[T]	matriz de transformação do eixo local para o eixo global
[δ]	matriz coluna dos deslocamentos

## Lista de Abreviaturas

NBR-6118	Norma Brasileira para Estruturas de Concreto Armado
EPS	Poliestireno Expandido
ACI-435	American Concrete Institute
Eurocode	European Committee for Standardisation
REDUZCON	sistema de lajes nervuradas
BRC	barrote redutor de concreto

"Não sabendo que era impossível, ele foi lá e fez."

Jean Cocteau

# 1. Introdução

## 1.1. Generalidades

A análise estrutural de lajes por meio de métodos numéricos constitui-se, atualmente, em rotina nos escritórios de projeto. O cálculo e detalhamento com o auxílio de *softwares* são praticamente imprescindíveis, devido principalmente ao ritmo imposto pelos contratantes do projeto e à necessidade de avaliar as diversas possibilidades de sistemas estruturais distintos procurando, dessa forma, a de melhor viabilidade econômica.

A escolha do tipo de laje a ser utilizada nas construções cabe ao projetista, o que é, em geral, feita em função de sua experiência profissional, de tal forma que satisfaça plenamente os critérios arquitetônicos, de segurança e de economia.

Após definido o tipo de laje a ser utilizada, a determinação da espessura é feita baseando-se nos critérios dos estados limites de utilização, ou seja, de forma a se evitar grandes deformações ou que elas vibrem excessivamente, ocasionando sensação de desconforto.

Nas edificações, as lajes são responsáveis por elevada parcela do consumo de concreto. Utilizando-se lajes maciças nos pavimentos, esta parcela chega usualmente a quase dois terços do volume total da estrutura, sendo que a espessura das lajes maciças pode atingir valores tão elevados com o aumento dos vãos livres a serem vencidos que grande parte de sua capacidade resistente passa a ser utilizada para combater as solicitações devidas ao peso próprio, tornando a estrutura antieconômica.

Assim sendo, faz-se necessário o estudo dos critérios de escolha dos tipos de lajes a serem empregados tendo em vista a obtenção de soluções técnicas e econômicas, ou seja, procura-se reduzir o volume de concreto empregado nesses sistemas estruturais, o que pode ser feito suprimindo-se uma parte do concreto que não trabalha, na zona tracionada da laje, e agrupando-se as armaduras de tração em faixas, chamadas de nervuras, como mostrado na Figura 1.1.

A principal finalidade da nervura é a de proteger a armadura tracionada e fazer com que a estrutura trabalhe monoliticamente, pois o concreto na zona de tração (nervuras) tem sua resistência desprezada no dimensionamento.

Segundo a norma brasileira para estruturas de concreto armado, NBR-6118 [1], lajes nervuradas são definidas como lajes cuja zona de tração é constituída por nervuras entre as

quais podem ser colocados materiais inertes com a finalidade de tornar plana a superfície externa.



**Figura 1.1 - Laje nervurada de uma residência, Barueri-SP**

No espaço entre as nervuras, costuma-se colocar materiais inertes, de peso próprio reduzido em comparação com o do concreto, com a finalidade de permitir um acabamento plano ao teto e, dependendo do material, de servir de fôrmas para as nervuras, como ilustrado na Figura 1.2. Estes materiais inertes podem ser tijolos de argila, caixas de fibrocimento ou papelão, placas de gesso, blocos de poliestireno expandido (EPS), etc.



**Figura 1.2 – Laje nervurada bidirecional [2]**

Portanto, segundo SOUZA & CUNHA [3], a economia que se obtém é função do alívio de peso próprio e da diferença de custos entre o concreto e o material inerte que o substitui, incluindo-se aí a diferença de custos de execução entre as duas soluções.

Entre as vantagens das lajes nervuradas, pode-se citar:

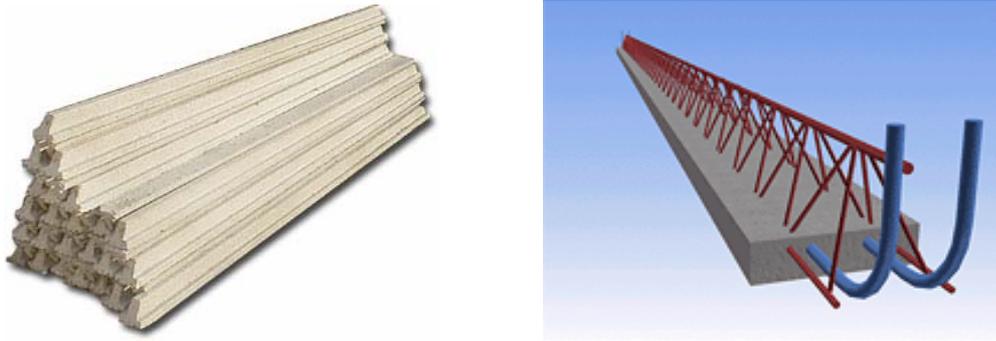
- Obtenção de estruturas mais leves para lajes que vencem grandes vãos;
- O material de enchimento, quando existente, normalmente é melhor isolante térmico que o concreto e, em alguns casos, é também incombustível;
- O isolamento acústico oferecido pelo material de enchimento, quando existente, é superior ao do concreto;
- A estrutura, para grandes vãos, é normalmente mais econômica que as lajes maciças ou as lajes cogumelo.

As lajes nervuradas podem apresentar as seguintes desvantagens e/ou exigir cuidados especiais na execução:

- Quando são utilizados tijolos, se os mesmos não forem suficientemente molhados antes da concretagem, há absorção da água do concreto, tornando mais difícil o adensamento. A falta desta molhagem, se ocorrer, muitas vezes leva ao acréscimo de água no concreto (por falta de orientação adequada) durante a execução, aumentando seu fator água-cimento e, conseqüentemente, diminuindo a resistência do concreto;
- A distribuição das cargas concentradas não é feita de forma tão eficiente quanto nas lajes maciças;
- Em virtude de a laje nervurada ser menos monolítica que a maciça, certas reservas de segurança existentes nesta última (embora não computadas no cálculo) ocorrem com menor intensidade na laje nervurada.

As lajes nervuradas podem ser moldadas no local ou ser executadas com nervuras pré-moldadas. Quando são moldadas no local, exigem todas as etapas de execução, ou seja, é necessário o uso de escoramentos, além do material de enchimento ou de fôrmas que os substituem.

Na alternativa, as nervuras são compostas de vigotas pré-moldadas, que dispensam o uso do tabuleiro da forma tradicional, de acordo com a Figura 1.3. Essas vigotas são capazes de suportar seu peso próprio e as ações de construção, necessitando apenas de cimbramentos intermediários.



**Figura 1.3 - Vigotas pré-moldadas**

Além das vigotas, essas lajes são constituídas por elementos de enchimento, que são colocados sobre os elementos pré-moldados, e também de concreto moldado no local, como mostrado na Figura 1.4.



**Figura 1.4 – Laje pré-moldada com elemento de enchimento**

Pelas razões acima expostas, percebe-se a grande vantagem em se utilizar lajes nervuradas, as quais não necessariamente precisam ter o mesmo número de nervuras nas duas direções e vê-se, então, a necessidade de um claro entendimento das diversas possibilidades de disposição estrutural, ou seja, do comportamento destas lajes quando se varia o número de nervuras.

O método adotado para tal investigação é o da analogia de grelha, por ser facilmente assimilado pelos projetistas e representar bem a estrutura em estudo, onde a malha utilizada no processo apresenta todas as barras do modelo coincidindo com o centro das nervuras.

## 1.2. Estado da Arte na Análise de Lajes Nervuradas de Concreto Armado

As lajes em geral têm dupla função estrutural: de placa e de chapa. Elas recebem as ações verticais, perpendiculares à superfície média, e as transmitem para os apoios. Esta situação se refere ao comportamento de placa.

A outra função de uma laje, com comportamento de chapa (com as ações atuando ao longo de seu plano), é atuar como diafragma horizontal rígido, distribuindo as ações horizontais entre os diversos pilares da estrutura.

O comportamento de chapa é fundamental para a estabilidade global da estrutura, principalmente nos edifícios altos. É através das lajes que os pilares contraventados se apoiam nos elementos de contraventamento, garantindo a segurança da estrutura em relação às ações laterais.

Com o desenvolvimento e as exigências das edificações de concreto armado, as lajes nervuradas passaram a ser uma solução interessante. Embora atualmente seja um sistema amplamente utilizado, as lajes nervuradas foram, desde o início, objeto de questionamento tanto pelo meio técnico, como pelo meio executivo. Tal fato ocorreu em virtude do alto consumo de formas necessárias à sua execução, principalmente com relação às lajes bidirecionais.

Nos dias de hoje, porém, este panorama está totalmente modificado. O desenvolvimento tecnológico que levou à criação de novos materiais, como as armaduras treliçadas, os blocos leves de EPS mostrados na Figura 1.5 e as formas plásticas aplicadas especialmente à produção de lajes nervuradas bidirecionais, ilustradas na Figura 1.6, tornou o emprego dessas lajes uma solução bastante utilizada atualmente nas estruturas de edifícios de múltiplos pisos.

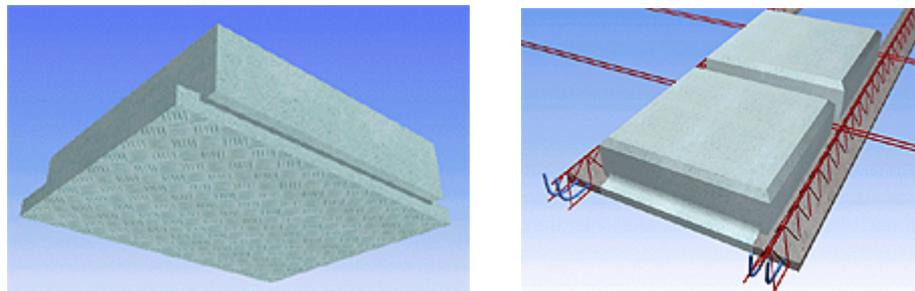


Figura 1.5 – Bloco de EPS usado em lajes nervuradas



**Figura 1.6 – Formas plásticas da empresa ATEX DO BRASIL**

O sistema nervurado, conforme citado em FRANCA & FUSCO [2], é uma evolução natural das lajes maciças, pois resulta da eliminação da maior parte do concreto abaixo da linha neutra, o que permite o aumento econômico da espessura total das lajes pela criação de vazios em um padrão rítmico de arranjo ou com a utilização de material inerte, que não colabora com a resistência da laje. Com isto, têm-se um alívio do peso próprio da estrutura e um aproveitamento mais eficiente dos materiais, aço e concreto, já que a mesa de concreto resiste aos esforços de compressão e a armadura, os de tração, sendo que a nervura de concreto faz a ligação mesa-alma.

A estrutura convencional com lajes nervuradas é um sistema articulado plano, formado pelo cruzamento de pequenas vigotas, com afastamento menor que 1,10 m, levando em consideração o piso como colaborante na resistência à flexão das vigas, denominadas nervuras, com objetivo de obter maiores distâncias entre os eixos dos pilares.

A evolução dos programas computacionais passou a permitir, na análise estrutural, um grau de sofisticação jamais visto. Além da precisão da análise, a integração das informações permitiu passar da análise ao projeto (dimensionamento, detalhamento e desenho) de uma forma rápida e precisa. Graças a esses sistemas, hoje é possível se fazer a análise do pavimento de um edifício permitindo tratar o conjunto de lajes nervuradas e vigas como uma única estrutura em grelha, eliminando-se assim as restrições decorrentes do uso de modelos simplificados para análise destas estruturas.

Diversos métodos para análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pavimentos de edifícios têm sido propostos e usados ao longo dos anos, como, por exemplo, o método dos elementos finitos, charneiras plásticas, analogia de grelha, etc. Esses métodos são usados para analisar os deslocamentos, os esforços internos, os elementos de apoio e a capacidade de carga das lajes.

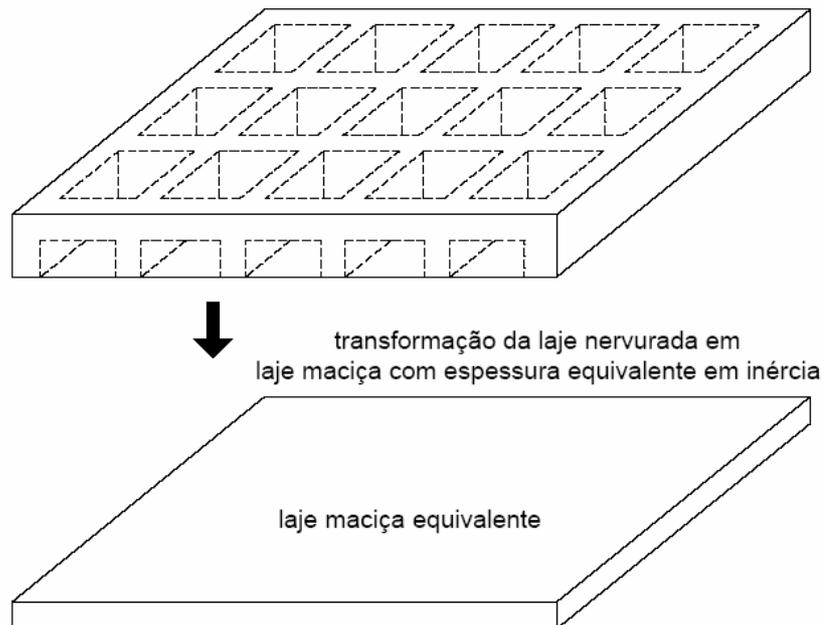
Conhecendo-se a distribuição dos esforços atuantes, tais como momentos fletores, momentos de torção e esforços cortantes, é possível verificar as tensões e calcular as armaduras necessárias nesse tipo de sistema estrutural.

Segundo o Código ACI-435 [4], Marsh, em 1904, substituiu uma laje maciça uniformemente carregada por uma malha de vigas que se cruzavam. Contudo, em sua modelagem, negligenciou os momentos torçores da placa, gerando assim um erro de 25% nos momentos fletores para uma placa simplesmente apoiada.

Posteriormente, de acordo com SOUZA & CUNHA [3], a teoria foi modificada numa tentativa de levar em conta os momentos torçores desprezados por Marsh. Dessa forma, introduziu fatores de modificação no cálculo dos momentos fletores e deslocamentos, relacionando condições de vinculação e características geométricas.

Conforme a NBR-6118 [1], mesmo considerando as lajes nervuradas como elementos estruturais complexos, estas podem ser calculadas como elementos de placa dando-lhes, assim, o mesmo tratamento das lajes maciças.

Neste sentido, foi feito um estudo por BARBIRATO [5], no qual a laje nervurada foi transformada numa laje maciça, de acordo com a Figura 1.7, de espessura constante, correspondente em comportamento à laje nervurada através de uma equivalência da inércia à flexão.



**Figura 1.7 – Transformação de uma laje nervurada em maciça equivalente [5]**

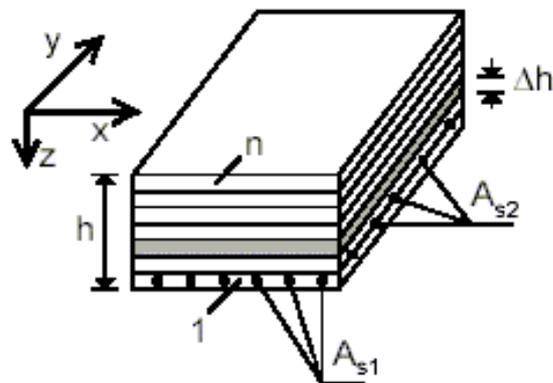
Nesse trabalho [5], não se considera a rigidez à torção da laje, sendo o módulo de deformação transversal do concreto,  $G$ , correspondente a 1% do valor calculado pela equação obtida através da teoria clássica da elasticidade.

Existem alguns estudos comparando os resultados obtidos por grelha e por elementos finitos (placa equivalente). Dentre eles, citam-se BOCCHI JR [6], onde se

considerou apenas 20% da rigidez à torção integral da seção T, e BARBIRATO [5], sendo que ambos concluem que o modelo que melhor representa essa tipologia de pavimento é a analogia de grelha.

No intuito de se fazer um estudo comparativo dos resultados obtidos pelo método de analogia de grelha, pelo método tridimensional em elementos finitos e pelo procedimento preconizado pela norma brasileira (laje equivalente), STRAMANDINOLI [7] chega a resultados insatisfatórios com a substituição de lajes nervuradas por placas elásticas, onde os momentos elásticos e as flechas foram menores do que os obtidos por analogia de grelha e por elementos finitos. Stramandinoli [7] recomenda que só sejam assim calculadas as lajes nervuradas se os esforços forem obtidos sem a consideração da rigidez à torção.

De acordo com ARAÚJO [8,9,10], para se analisar uma laje maciça ou nervurada, pode-se dividi-la em diversas lâminas ou camadas de pequena espessura, Figura 1.8. Este método é baseado na teoria das placas de Mindlin, como citado em ARAÚJO [8,9,10], e a análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, considerando-se a não-linearidade física do concreto em compressão e a colaboração do concreto tracionado entre fissuras.



**Figura 1.8 – Modelo laminar para laje maciça de concreto armado [9,10]**

No método laminar [8,9,10], admite-se que a laje nervurada de concreto armado seja tratada como uma laje maciça com propriedades equivalentes para as camadas de concreto situadas na região das nervuras. Ou seja, deve-se trabalhar com propriedades equivalentes do concreto, para que o modelo seja capaz de representar os vazios deixados na estrutura pela eliminação de parte do concreto da zona tracionada. Quando os vazios forem permanentemente preenchidos com blocos de um material inerte (aquele com peso próprio reduzido em comparação com o concreto), esse efeito favorável poderá ser considerado, adotando-se propriedades equivalentes para esse material. As armaduras também podem ser consideradas, substituindo-as por uma lâmina contínua.

Em seus trabalhos, o autor [8,9,10] conclui que as lajes nervuradas de concreto armado apresentam um comportamento muito semelhante ao das lajes maciças, o que permite que o cálculo seja feito como uma laje maciça equivalente com rigidez à torção igual à rigidez à flexão. Ainda que as nervuras sejam diferentes nas duas direções, ARAÚJO [8,9,10] recomenda o cálculo como placa ortotrópica, porém com uma rigidez à torção equivalente. Segundo esse mesmo autor, os eventuais desvios da solução elástica equivalente em relação à resposta não-linear (e experimental) devem-se à fissuração do concreto, não sendo consequência de uma possível redução da rigidez à torção da laje nervurada.

COELHO & LORIGGIO [11] desenvolveram estudos de lajes através dos métodos dos elementos finitos, solução de Navier e analogia de grelha e concluíram que esta última é uma ferramenta útil na análise e dimensionamento de lajes de concreto armado, pois consegue simulá-las adequadamente e de maneira prática fornecendo resultados muito próximos da teoria das placas delgadas em regime elástico.

A fim de contribuir para o aprimoramento da análise estrutural de lajes nervuradas, DIAS et al [12] estudaram modelos nos quais se considera, de forma simplificada e realista, a excentricidade existente entre os eixos das nervuras e o plano médio da capa, procedendo-se às análises numéricas por meio do método dos elementos finitos. Os modelos simplificados adotados foram os de grelha, utilizando apenas elementos finitos de barra, e laje maciça equivalente em flexão, utilizando apenas elementos finitos de casca plana. Ambos os modelos simplificados consideraram uma seção “T” formada pela nervura mais a largura colaborante da capa da laje nervurada. O modelo mais realista simula a capa por elementos finitos de casca plana e as nervuras por elementos de barra tridimensional que permitem a criação de *offsets* rígidos para definir a localização exata do centróide da seção em relação à localização do nó do elemento no modelo. Verifica-se que o modelo da consideração da excentricidade pelo *offset* rígido apresenta os melhores resultados na fase elástica do material.

BARBOZA [13] mostra, comparando-se os resultados obtidos com a analogia de grelha e com o método dos elementos finitos, que a analogia oferece resultados satisfatórios para lajes maciças. Assim, esperam-se resultados ainda melhores com a análise de lajes nervuradas em um modelo tridimensional de analogia de grelha, devido à maior semelhança geométrica entre ambos; estrutura real e modelo computacional.

No entanto, de acordo com SHEIKH & MUKHOPADHYAY [14], a modelagem de placas enrijecidas através de sistemas de grelhas têm fracassado na evolução de uma solução genérica satisfatória.

Com um estudo experimental e numérico de deformações em uma laje nervurada, SELISTRE & KLEIN [15], realizaram análises numéricas de dois modelos computacionais,

sendo um gerado com elementos finitos de placa no SAP90 [16], baseado no conceito de rigidez equivalente à flexão na região nervurada considerando a rigidez à torção da laje, e outro com elementos de grelha no GRELHA-TQS [17], o qual desprezou a influência da torção.

Um modelo reduzido foi confeccionado em microconcreto armado na escala 1:7,5 para a realização da análise experimental. Os carregamentos previstos para a laje foram simulados através de uma altura equivalente de coluna d'água. Foram feitos ensaios de curta e longa duração. Inicialmente, com o ensaio foi de curta duração, atingia-se o nível d'água desejado, aguardavam-se alguns minutos e, uma vez realizadas as leituras dos instrumentos, passava-se, imediatamente, à etapa de carga seguinte. Seguiu-se um ciclo de 15 etapas de carga do ensaio de curta duração. Logo após, foi iniciado o ensaio de longa duração, que consistiu em acompanhar a evolução dos deslocamentos verticais do modelo submetido à carga de  $7,5 \text{ kN/m}^2$  (75 cm de coluna d'água) durante 76 dias e, depois de descarregado, durante mais 14 dias.

Das análises dos resultados, os autores [15] concluem que o cálculo que melhor simula o comportamento elástico-linear da estrutura é o que utiliza elementos finitos de placa, sendo o mais rígido, discretizado pelo SAP90 [16]. Entretanto, à medida que a fissuração da laje evolui durante o ensaio reduzindo, assim, sua rigidez, o seu comportamento se aproxima do previsto pelo modelo numérico menos rígido, gerado com elementos de grelha no GRELHA – TQS [17]. Nos últimos estágios de carga, a fissuração do microconcreto provoca um comportamento o qual nenhum dos dois modelos numéricos é capaz de reproduzir seu desempenho elasto-plástico.

MELO & FONTE [18] também desenvolveram um estudo comparando modelos numéricos, através do método dos elementos finitos e da analogia de grelha, e um modelo experimental de uma laje nervurada sem vigas, apoiada diretamente sobre pilares. A melhor representação obtida para os momentos foi a de elementos de barra para as nervuras e elementos de placa para o capeamento, as faixas sólidas e os ábacos; sendo a região dos pilares composta por placas de grande rigidez. No modelo de elementos finitos com placas de espessura equivalente representando as nervuras, os resultados, principalmente nas faixas dos pilares, foram menos satisfatórios que os do modelo anterior. Foram verificados bons resultados nas regiões das nervuras através do modelo da analogia de grelha, porém, em regiões de ábacos e faixas sólidas, seus resultados de momentos não foram muito adequados. Quanto aos deslocamentos, os dois modelos apresentaram bom desempenho.

A modelagem computacional, como ferramenta numérica, permite nos dias atuais que os novos sistemas de pisos, e também aqueles analisados pelos pesquisadores no passado, sejam substituídos por modelos numéricos que podem expressar uma realidade bem aproximada dos modelos criados em laboratório. Esta ferramenta numérica, baseada

no método dos elementos finitos, facilita a adoção de critérios de projeto e a avaliação do comportamento dos pisos a serem adotados nas construções atuais. Seu papel é fundamental para evitar o custo adicional e o tempo duradouro empregados na realização das pesquisas de caráter experimental.

### **1.3. Objetivos e Motivação**

Com a utilização crescente de lajes nervuradas em edifícios residenciais, comerciais e industriais, e até mesmo residências, motivada pela sua simples e rápida execução, aliada à um bom desempenho funcional da estrutura e pela relativa facilidade na elaboração de projetos, graças ao desenvolvimento de programas avançados de análise estrutural, vê-se a necessidade de contribuir com informações e conclusões que possam ser adotadas como parâmetros de projeto e/ou nortear projetistas quanto ao uso adequado destas lajes.

Considerando-se a relevância do assunto, este trabalho tem como objetivo principal estudar o comportamento de lajes nervuradas com relação à variação do número de nervuras secundárias conjuntamente ao estudo da variação da rigidez à torção das nervuras e das vigas de apoio em diferentes relações entre os lados de uma laje retangular. Este estudo é realizado à luz dos resultados obtidos através de modelagem numérica computacional com o auxílio do programa ANSYS [19].

Os resultados obtidos pela analogia de grelha são comparados com os obtidos por modelos de elementos finitos de placa e viga, representando, respectivamente, a mesa e as nervuras da laje. Também são refeitas algumas análises numéricas com base no emprego da analogia de grelha para que se pudesse validar os modelos desenvolvidos nesta dissertação.

Este trabalho é dividido em duas etapas distintas. Em uma primeira etapa é realizado um estudo paramétrico do comportamento estático das lajes nervuradas e, em uma segunda etapa, são realizadas análises do comportamento das frequências dessas lajes.

Pretende-se, portanto, abordar assuntos importantes a respeito desse sistema estrutural de tal forma que se possam ter subsídios para estudos e trabalhos futuros com outros parâmetros físicos e geométricos. As metodologias de análise desenvolvidas são descritas e discutidas em detalhe.

## 1.4. Escopo do Trabalho

O presente capítulo apresentou a motivação para o desenvolvimento deste trabalho, um breve resumo do estado da arte para as lajes nervuradas, especificou os seus principais objetivos além de uma pequena descrição do conteúdo de cada capítulo conforme pode ser observado a seguir.

No Capítulo 2 são apresentados os aspectos teóricos da teoria das grelhas e da teoria das placas. Tem-se, também, neste capítulo, algumas normas e recomendações para a análise e projeto de lajes nervuradas.

O Capítulo 3 expõe algumas considerações acerca das peculiaridades da laje nervurada do tipo REDUZCON [21], empresa que fabrica os moldes para estas lajes e que as constrói. Ainda neste mesmo capítulo, é apresentada a sua modelagem computacional para o sistema estrutural analisado, bem como o detalhamento do método da analogia de grelha para o estudo realizado. Incluem-se, também neste capítulo, as propriedades físicas e geométricas e os carregamentos adotados para o estudo paramétrico.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados das análises das lajes nervuradas, analisando-se separadamente a influência dos diversos parâmetros considerados. Também é feita uma análise com elementos finitos de viga para representar as nervuras e placa para as mesas, utilizados para discretizar as lajes nervuradas. Esta análise é comparada à anteriormente realizada pelo método da analogia de grelha.

O Capítulo 5 contém o estudo das freqüências fundamentais das lajes REDUZCON [21] e uma comparação destes resultados com aqueles preconizados pela Norma Brasileira de Concreto Armado, NBR-6118 [1]. Apresentam-se, também, os modos fundamentais de vibração destas lajes.

Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as considerações finais e algumas sugestões para trabalhos futuros de forma a contribuir para o avanço desta linha de pesquisa.

## **2. Aspectos Teóricos e Modelagem de Lajes Nervuradas**

### **2.1. Generalidades**

Neste capítulo são apresentados conceitos importantes associados às teorias para análise de lajes em geral. Também são discutidos alguns procedimentos usuais preconizados em normas e adotados na prática corrente de projetos de lajes nervuradas. Finalmente, é feita uma abordagem geral sobre a analogia de grelha para lajes nervuradas, demonstrando os conceitos e parâmetros mais importantes.

### **2.2. Aspectos Teóricos**

As placas delgadas encontram-se submetidas, essencialmente, aos esforços de flexão, enquanto que as chapas estão submetidas a cargas aplicadas em seu plano médio.

As placas variam de acordo com sua forma, seu apoio e sua carga aplicada. Quanto à forma, podem ser poligonal ou circular, maciças ou com espaços vasados. Podem estar apoiadas em seu contorno, estarem em balanço e serem contínuas em uma ou duas direções, apresentando apoio pontual ou linear, simples ou engastado. Além disso, as placas podem estar submetida a cargas do tipo pontual, uniforme, triangular, etc.

Os métodos tradicionais para a determinação da distribuição de momentos em uma laje têm sido feito através dos modelos elásticos, os quais se baseiam na solução da equação diferencial que rege o comportamento de uma placa. Essas soluções limitam-se, contudo, a casos nos quais se tenham condições de contorno simples que levem a soluções exatas.

#### **2.2.1. Teoria das Placas**

A Teoria da Elasticidade, segundo TIMOSHENKO & WOINOWSKI – KRIEGER [20], é uma teoria cujas hipóteses básicas variam de acordo com o tipo de placa considerada. Para placas de pouca espessura, como a maioria das lajes de edifícios, tem-se as seguintes hipóteses básicas:

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico;

- A espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões (da ordem de 1/10);
- As deformações angulares da superfície média são pequenas comparadas à unidade;
- Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos comparados com a espessura da placa (inferiores a 1/10, para que se possam considerar pequenas deformações);
- As cargas dinâmicas ou estáticas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- A configuração deformada da placa é tal que linhas retas inicialmente perpendiculares à superfície média permanecem retas e perpendiculares;
- As deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas;
- A deformação da placa é produzida por deslocamentos dos pontos da superfície média perpendicular ao plano indeformado;
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às tensões no mesmo plano.

A resolução de um tipo de placa com essas condicionantes é feita através da integração da equação diferencial de equilíbrio proposta por Lagrange (eq. 2.1), a qual possibilita o cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos para um ponto qualquer no interior da placa isotrópica.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{(g + q)}{D} \quad ( 2.1 )$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad ( 2.2 )$$

D: rigidez da placa à flexão;

E: módulo de deformação longitudinal do material;

h: altura da laje;

$\nu$ : coeficiente de Poisson do material;

(g + q): ação devida ao peso próprio e aos carregamentos externos aplicada perpendicularmente ao plano da placa no interior da placa;

w: deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje;

$x, y$ : eixo de coordenadas ortogonais para o plano médio da placa.

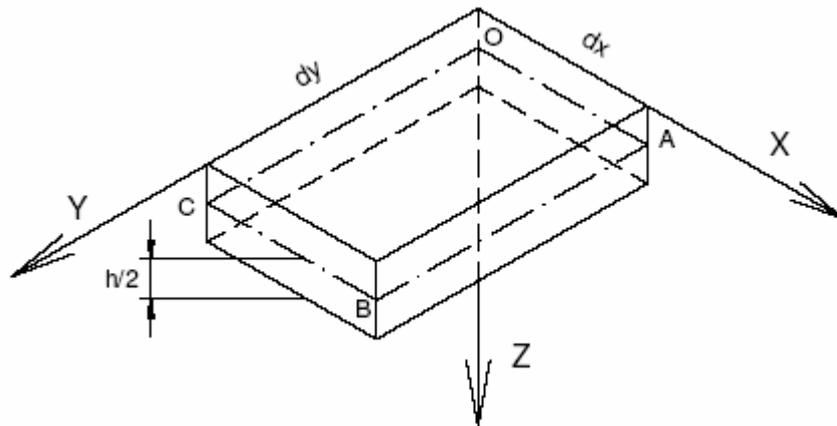
A equação 2.1 também pode ser escrita na forma Laplaciana:

$$\nabla^4 w = \frac{(g + q)}{D} \quad ( 2.3 )$$

onde:

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad ( 2.4 )$$

O sistema de coordenadas adotado é esquematizado na Figura 2.1:



**Figura 2.1 – Sistema de coordenada de um elemento de placa**

A resolução do problema também depende da determinação das condições de contorno. Estas condições variam com o tipo de vinculação, ou seja, para bordas simplesmente apoiadas, perpendiculares ao eixo  $Ox$ , como na Figura 2.1, tem-se que os deslocamentos  $w$  serão nulos e, se não houver momentos prescritos,  $m_x$  também será nulo. Portanto:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ( 2.5 )$$

Para bordas com engastamento perfeito, perpendiculares ao eixo Ox, os deslocamentos  $w$  serão nulos e a rotação  $\theta_x$ , não sendo prescrito, também será nulo ao longo dessa borda, de acordo com a Figura 2.1:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x = 0 \quad ( 2.6 )$$

Com relação às bordas livres, perpendiculares ao eixo Ox, como ilustrado na Figura 2.1, tem-se que os esforços cortantes  $r_x$  e os momentos fletores  $m_x$  ao longo desse apoio deverão ser nulos:

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad ( 2.7 )$$

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad ( 2.8 )$$

Para as bordas perpendiculares ao eixo Oy, de acordo com a Figura 2.1, as equações são as mesmas acima demonstradas, apenas alterando-se as variáveis  $x$  e  $y$ .

Com a integração da equação diferencial, obtém-se o deslocamento ortogonal ao plano em qualquer ponto da placa e, com este, utilizando-se de combinações de derivadas da função de deslocamentos, os momentos, os esforços cortantes e as reações. As tensões podem ser calculadas através de momentos e esforços cortantes.

Um artifício para o cálculo das lajes nervuradas, através da equação de Lagrange, é utilizar uma laje maciça equivalente em inércia à nervurada.

As lajes nervuradas cujas nervuras têm diferentes espaçamentos nas duas direções perpendiculares são transformadas em maciça equivalente ortotrópica para o cálculo dos deslocamentos, momentos e cortantes. De acordo com TIMOSHENKO & WOINOWSKI – KRIEGER [20], para a resolução desta laje equivalente, conhecidos o seu carregamento e suas condições de contorno, integra-se a seguinte equação diferencial:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad ( 2.9 )$$

sendo:

$D_x$  e  $D_y$ : rigidezes à flexão nas duas direções ortogonais;

2H: rigidez total à torção; soma das rigidezes à torção nas direções x e y, ou seja,  $D_{xy}$  e  $D_{yx}$ , e as rigidezes acopladas  $D_1$  e  $D_2$ , que representam a contribuição da flexão para a torção da placa. Portanto, tem-se:

$$2H = (D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2) \quad ( 2.10 )$$

onde:

$D_{xy}$  e  $D_{yx}$ : rigidezes à torção nas direções x e y, tendo-se:

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{Gh^3}{12} \quad ( 2.11 )$$

$D_1$  e  $D_2$ : contribuição da flexão na torção da placa enrijecida:

$$D_1 = D_2 = \nu \frac{E_{cs} h^3}{12(1-\nu^2)} \quad ( 2.12 )$$

Como mencionado em BARES & MASSONNET [22] *apud* DIAS [23], o termo de rigidez 2H também pode ser escrito na forma:

$$2H = 2\alpha \sqrt{D_x D_y} \quad ( 2.13 )$$

sendo que:

$$\alpha = \frac{D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2}{2\sqrt{D_x D_y}} \quad ( 2.14 )$$

O coeficiente  $\alpha$  tem seu valor entre 0 e 1. Para o caso de uma placa estritamente isotrópica,  $\alpha = 1$ , sendo que  $H = D_x = D_y$ . Para uma grelha com elementos desprovidos de rigidez à torção,  $\alpha = 0$ , portanto,  $H = 0$ .

No intuito de resoluções de ordem prática, segundo BARES & MASSONNET [22] *apud* DIAS [23], tem-se:

$$D_x = \frac{EI_{sx}}{S_x} \quad ( 2.15 )$$

$$D_y = \frac{EI_{sy}}{S_y} \quad ( 2.16 )$$

sendo:

$I_{sx}$  e  $I_{sy}$ : momentos de inércia nas seções das nervuras de acordo com os eixos x e y, respectivamente;

$S_x$  e  $S_y$ : espaçamento das nervuras.

A equação de Lagrange descreve um problema com poucas soluções exatas, restringindo-se, somente, a casos comuns de geometria da placa e do carregamento, como, por exemplo, lajes circulares e retangulares simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído.

A solução do problema de placas pelo caminho clássico é, portanto, limitada a um número relativamente pequeno de geometrias, de carregamentos e condições de contorno, o que, para casos mais complexos, torna a análise impraticável, especialmente quando os efeitos das deformações dos elementos de apoio precisam ser levados em consideração.

Portanto, o cálculo de placas, em termos de projetos de engenharia, é feito através de métodos numéricos com programas computacionais, os quais vêm sendo cada vez mais utilizados, principalmente para lajes com características especiais.

### 2.2.2. Teoria das Grelhas

Grelhas são as estruturas planas formadas por barras coplanares rigidamente ligadas entre si, que são solicitadas por carregamento perpendicular ao plano da estrutura.

Considerando-se elementos associados a estruturas espaciais, sabe-se que existem 6 esforços solicitantes atuantes nesses elementos, conforme indicado na Figura 2.2.

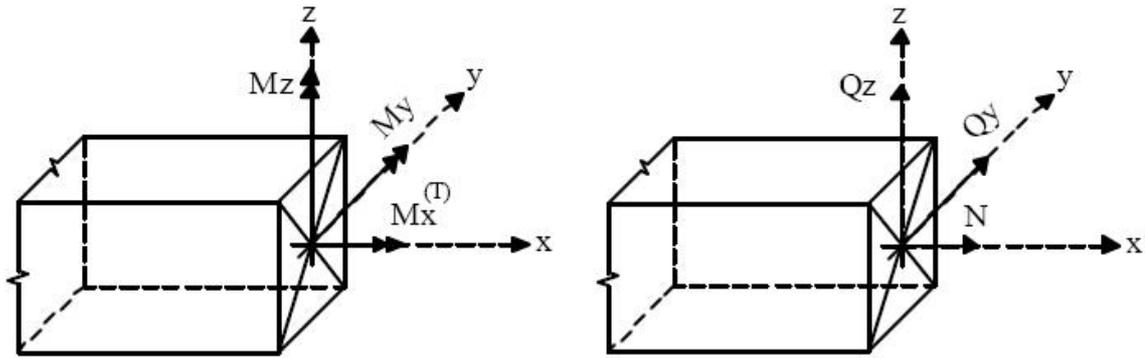


Figura 2.2 – Esforços internos solicitantes em um elemento de estrutura espacial [24]

Para elementos de grelha, devido à ausência de carregamento no plano da estrutura, somente 3 esforços solicitam esta barra: esforço cortante, momento fletor e momento torçor, tal como indicado na Figura 2.3.

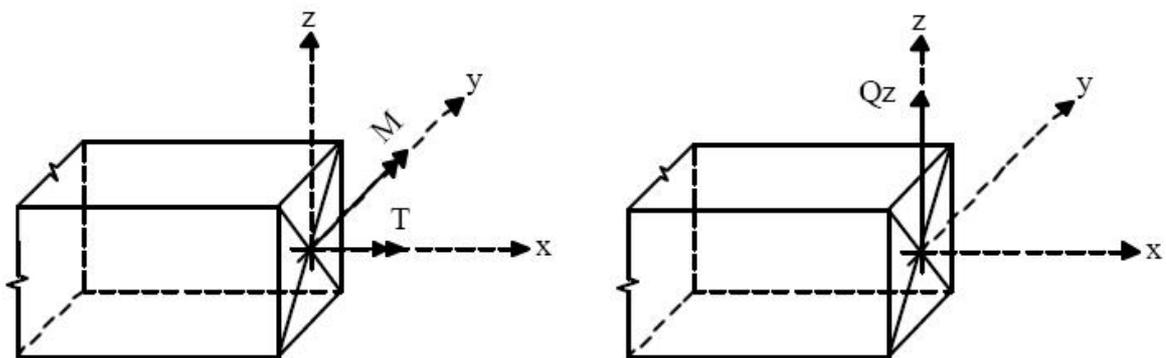


Figura 2.3 – Esforços internos solicitantes em um elemento de grelha [24]

Para os corpos rígidos, têm-se as seguintes equações de equilíbrio da mecânica:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad ( 2.17 )$$

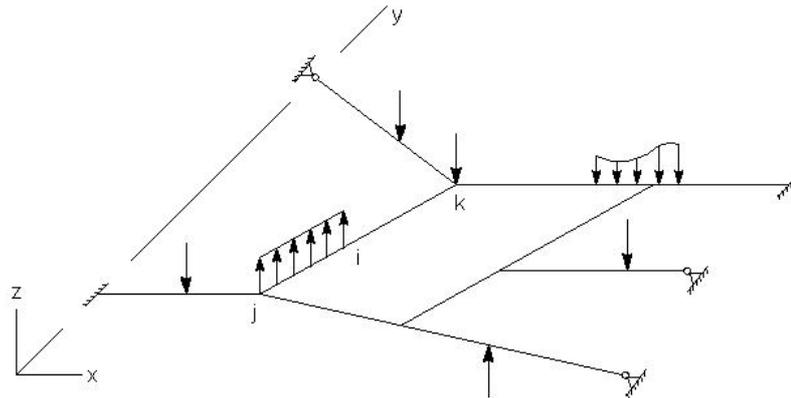
$$\sum M_{ox} = 0 \quad \sum M_{oy} = 0 \quad \sum M_{oz} = 0 \quad ( 2.18 )$$

No caso das grelhas, estas equações se resumem à apenas 3, devido à ausência de cargas horizontais:

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_{ox} = 0 \quad \sum M_{oy} = 0 \quad ( 2.19 )$$

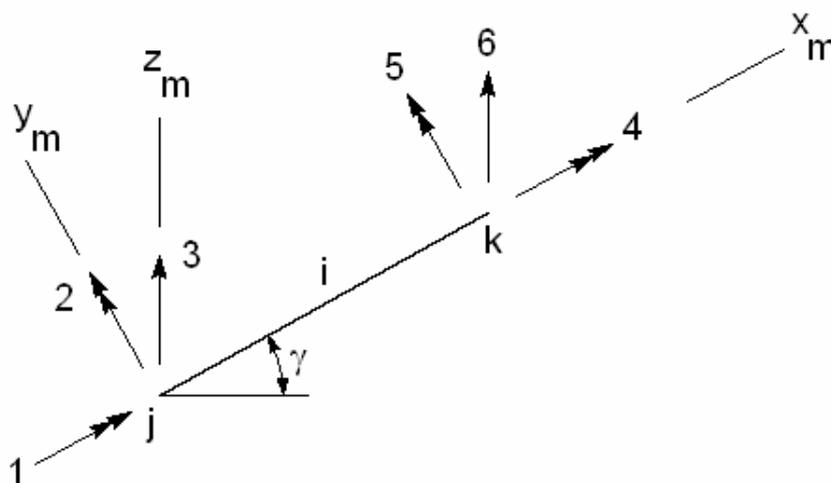
A equação 2.19 fornece 3 condições de equilíbrio (somatório de forças verticais e de momentos em torno de dois eixos nulos) o que, para uma grelha internamente isostática ser considerada isostática, precisa apresentar no mínimo 3 vínculos externos que ofereçam as condições necessárias para o equilíbrio.

Geralmente, consideram-se os efeitos de flexão nas grelhas predominantes, sendo os efeitos de torção secundários na análise destas. No estudo de uma estrutura de grelha, os eixos coordenados são tomados como na Figura 2.4:



**Figura 2.4 - Grelha plana**

A estrutura existe no plano x-y, sendo que todas as forças aplicadas atuam paralelas ao eixo z, como já mencionado. Os deslocamentos dos nós são as rotações nos sentidos de x e y e as translações na direção de z, sendo mostrado os seus 6 deslocamentos possíveis do elemento i, como ilustrado na Figura 2.5.



**Figura 2.5 – Graus de liberdade de uma barra de grelha**

Esses seis deslocamentos de extremidade mostrados são as rotações nos sentidos de  $x_m$  e  $y_m$  e a translação na direção de  $z_m$  nas extremidades  $j$  e  $k$ , respectivamente; onde  $x_m$ ,  $y_m$  e  $z_m$  são os eixos coordenados locais do elemento. Sendo assim, podem ser provocados deslocamentos unitários desses seis tipos de deslocamentos nas extremidades do elemento, um de cada vez, para que se possa formar a matriz de rigidez do elemento  $S_m$  para os eixos do elemento (Figura 2.5), sendo esta apresentada na Equação 2.20.

$$S_m = \begin{bmatrix} \frac{G.J}{L} & 0 & 0 & -\frac{G.J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E.I_y}{L} & -\frac{6E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{2E.I_y}{L} & \frac{6E.I_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6E.I_y}{L^2} & \frac{12E.I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6E.I_y}{L^2} & \frac{12E.I_y}{L^3} \\ -\frac{G.J}{L} & 0 & 0 & \frac{G.J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E.I_y}{L} & -\frac{6E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{4E.I_y}{L} & \frac{6E.I_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6E.I_y}{L^2} & -\frac{12E.I_y}{L^3} & 0 & \frac{6E.I_y}{L^2} & \frac{12E.I_y}{L^3} \end{bmatrix} \quad ( 2.20 )$$

Obtida a matriz de rigidez em relação aos eixos locais dos elementos (Equação 2.20), deve-se fazer a transformação desta para a matriz de rigidez associada aos eixos globais da estrutura, representada pelo elemento mostrado na Figura 2.6.

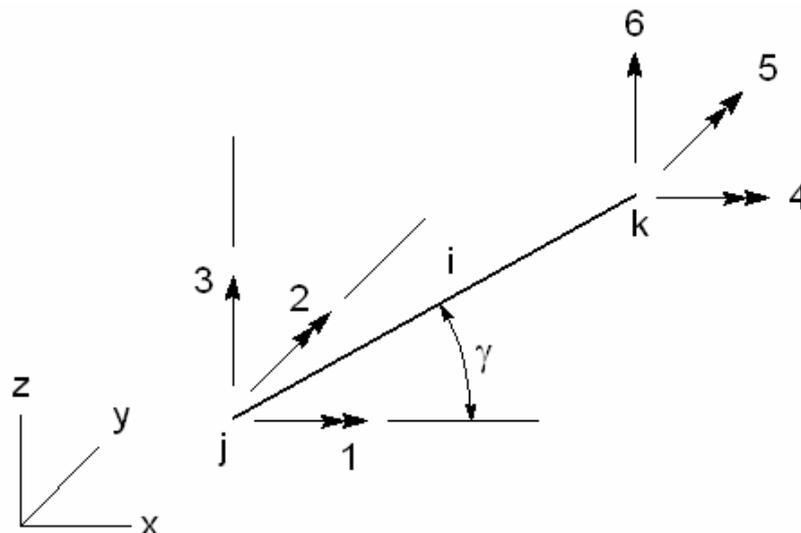


Figura 2.6 – Eixos globais da estrutura em relação ao elemento de grelha

Desta forma, obtém-se a matriz de rigidez do elemento  $S_{md}$  para os eixos da estrutura, indicada na Equação 2.21.

$$S_{md} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L} C_x \\ \frac{6EI}{L} C_y & -\frac{6EI}{L} C_x & \frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L} C_y & -\frac{6EI}{L} C_x & \frac{12EI}{L} \\ \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} - \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L} C_y \\ -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L} C_x \\ -\frac{6EI}{L} C_y & \frac{6EI}{L} C_x & \frac{12EI}{L} & -\frac{6EI}{L} C_y & \frac{6EI}{L} C_x & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix} \quad ( 2.21 )$$

sendo:

$$C_x = \cos \gamma \quad ( 2.22 )$$

$$C_y = \sin \gamma \quad ( 2.23 )$$

Sendo conhecida a matriz de rigidez  $S_{md}$ , faz-se a análise da estrutura submetida ao carregamento.

Utilizando-se do método dos deslocamentos (ou rigidez), formam-se os vetores associados às cargas aplicadas sobre a grelha. As cargas externas aplicadas nos nós e as reações de apoio constituem a matriz coluna das ações atuantes na estrutura, ou seja, constituem o vetor  $\{F\}$  da equação 2.24. As cargas que atuam ao longo da barra da grelha são substituídas por ações localizadas nas extremidades da barra restringida, que constituem o vetor de imobilização dos nós da estrutura,  $\{F_0\}$ .

$$[K][\delta] = \{F\} - \{F_0\} \quad ( 2.24 )$$

onde:

[K]: matriz de rigidez da estrutura;

[\delta]: matriz coluna dos deslocamentos.

A resolução da equação 2.24 fornece os deslocamentos nodais e as reações de apoio. Determinados, inicialmente, os deslocamentos, define-se, através destes, os esforços. Assim sendo, as ações nas extremidades das barras para o sistema global, são obtidas pela equação 2.25 e transformadas para o eixo local pela equação 2.26.

$$\{S\} = [r]\{d\} + \{S_0\} \quad ( 2.25 )$$

$$\{\underline{S}\} = [T]\{S\} \quad ( 2.26 )$$

sendo:

$\{S\}$ : esforços solicitantes nas extremidades das barras no sistema global;

$[r]$ : matriz de rigidez no sistema global;

$\{d\}$ : vetor dos deslocamentos de cada barra da estrutura;

$\{S_0\}$ : vetor de esforços de imobilização dos nós de cada barra no sistema global;

$\{\underline{S}\}$ : vetor de esforços de imobilização dos nós de cada barra no sistema local;

$[T]$ : matriz de transformação do eixo local para o eixo global.

### 2.3. Lajes Nervuradas de Concreto Armado – Normas e Recomendações

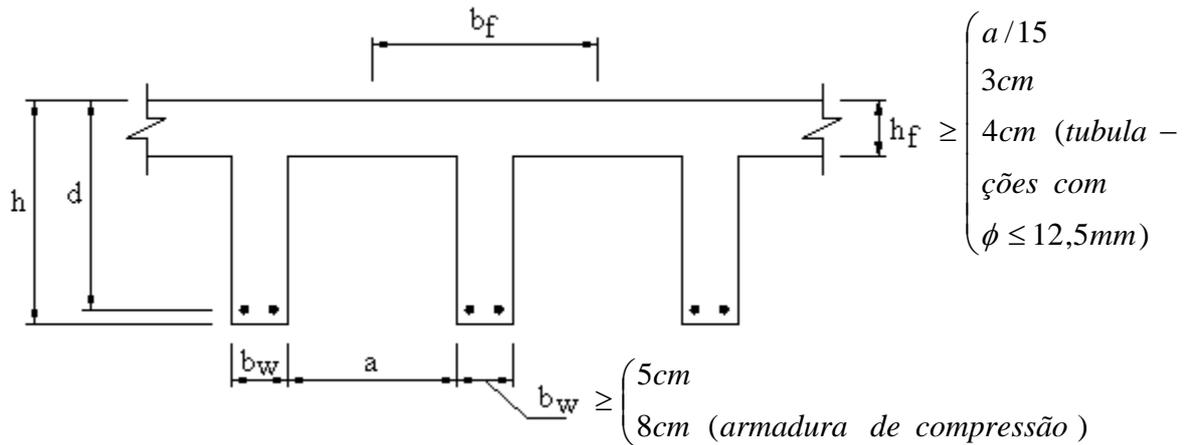
De acordo com a NBR 6118 [1], lajes nervuradas são lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte, de modo a tornar plana a superfície externa, como já mencionado.

O item 13.2.4.2 da referida norma trata das dimensões e das considerações de projeto para lajes nervuradas, as quais são apresentadas abaixo.

A espessura da mesa, quando não houver tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a 1/15 da distância entre nervuras e não menor que 3 cm. O valor mínimo absoluto deve ser 4 cm, quando existirem tubulações embutidas de diâmetro máximo 12,5 mm.

A espessura das nervuras não deve ser inferior a 5 cm e aquelas com espessura menor que 8 cm não devem conter armadura de compressão. A Figura 2.7, abaixo, ilustra uma seção típica de laje nervurada e suas dimensões mínimas.

Com relação aos estribos, quando necessários, não devem ter espaçamento entre si superior a 20 cm.



**Figura 2.7 – Seção típica e dimensões mínimas de uma laje nervurada**

Os critérios de projeto dependem do espaçamento entre os eixos das nervuras. Em lajes com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa e, para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje, através do item 19.4.1 [1]. Se, através deste item, for verificada a necessidade de armadura transversal, deve-se aplicar os critérios estabelecidos no item 19.4.2 [1].

Se o espaçamento entre eixos de nervuras tiver entre 65 e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas. Deve-se, neste caso, ser colocada uma armadura perpendicular à nervura, na mesa, por toda sua largura útil, com área mínima de 1,5 cm<sup>2</sup>/m.

A verificação da flexão da mesa também deve ser feita se existirem cargas concentradas entre nervuras.

Permite-se a verificação ao cisalhamento das nervuras como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras for maior que 12 cm.

Para lajes nervradas com espaçamento entre eixos de nervuras maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

Para a determinação dos esforços resistentes das seções de lajes, no estado limite último, submetidas a esforços normais e momentos fletores, devem ser usados os mesmos princípios estabelecidos nesta norma para seções de vigas, pilares e tirantes em 17.2.1 a 17.2.3 da norma brasileira [1].

Nas regiões de apoio das lajes devem ser garantidas boas condições de ductilidade, segundo o item 14.6.4.3 [1].

Quando, na seção crítica adotada para dimensionamento, a direção das armaduras diferir das direções das tensões principais em mais de  $15^\circ$ , este fato deve ser considerado no cálculo estrutural.

Para a verificação da flecha em lajes, no estado limite de deformação, devem ser usados os critérios dados em 17.3.2 [1], considerando a possibilidade de deformação (estádio II). Este item estabelece limites para flechas segundo a Tabela 13.2 da referida norma, levando-se em consideração as combinações de ações conforme o item 11.8.3.1 [1].

O cálculo da flecha é feito utilizando-se processos analíticos estabelecidos pela própria norma, item 17.3.2 [1], que divide o cálculo em duas parcelas: flecha imediata e flecha diferida, de acordo com o que segue:

- A flecha imediata, aquela referente ao deslocamento imediato após a aplicação dos carregamentos, é abordada no item 17.3.2.1.1 [1];
- A flecha diferida é a parcela decorrente das cargas de longa duração, em função da fluência, e é abordada no item 17.3.2.1.2 [1];

Para os estados limites de fissuração e de descompressão ou de formação de fissuras, são usados os critérios dos itens 17.3.3 e 17.3.4 [1].

Outras normas internacionais também tratam do assunto, como, por exemplo, o EUROCODE 2 [25], na qual relata que uma laje nervurada pode ser tratada como laje maciça quando:

- As nervuras possuem rigidez suficiente à torção;
- A distância entre as nervuras não ultrapassarem 150 cm;
- A espessura da mesa for maior ou igual a 5 cm ou 4 cm (quando existir bloco de fechamento permanente entre as nervuras), ou maior de 1/10 da distância livre entre nervuras.

## **2.4. Modelagem Computacional**

### **2.4.1. Generalidades sobre o Método dos Elementos Finitos**

O método dos elementos finitos, MEF, teve suas origens na análise estrutural. Com o surgimento dos primeiros computadores digitais na década de 50, os métodos matriciais para análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, mas a crescente demanda por estruturas mais leves, tais como as encontradas na indústria aeronáutica, conduziu ao desenvolvimento de

métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos.

Entre os trabalhos pioneiros nesta linha, pode-se citar os trabalhos de Turner, M. R. (1956) e Argyris, J. H. (1960). Zienkiewicz [26], em seu histórico artigo “*The Finite Element Method: From Intuition Generality*”, apresenta uma descrição mais detalhada da evolução do MEF nesta fase inicial. Na década de 70, o MEF teve suas aplicações estendidas a problemas de mecânica dos fluidos e, desde então, vem consolidando-se como um método mais geral de solução de equações diferenciais parciais.

Este método consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e, a partir daí, obter o estado de deformações correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permite definir o estado de tensões em todo o elemento. Este estado de tensões é transformado em esforços internos que têm de estar em equilíbrio com as ações externas.

O processamento de uma estrutura através de um *software* baseado na teoria do MEF possui, basicamente, a seqüência abaixo:

- Modelagem: consiste no desenho em CAD da estrutura a ser calculada. Pode ser executado no próprio programa ou importado de outros via desenho ou texto;
- Malha de elementos finitos: consiste na discretização da estrutura, ou seja, a sua divisão em elementos conectados por nós;
- Condições de contorno:
  - Restrições: definem como a estrutura se relaciona com o meio ambiente (engastamentos);
  - Carregamentos: definem as solicitações as quais a estrutura está submetida (forças nodais, pressões, momentos, carga térmica, etc.);
- Propriedades do material: definição das características físicas do material a ser utilizado na estrutura (módulo de elasticidade, densidade, coeficiente de Poisson);
- Processamento: montagem da matriz de rigidez e cálculo dos deslocamentos nodais e tensões;
- Deslocamentos: a estrutura pode ser visualizada deformada e também podem-se conhecer os deslocamentos individuais de cada nó;
- Tensões: as tensões podem ser visualizadas (na forma de mapas de cores) nas direções principais, os valores máximos e mínimos principais ou de acordo com

os critérios de resistência. Em alguns casos, ao invés de tensões, são fornecidos os esforços solicitantes.

Algumas das análises que podem ser executadas pelo método dos elementos finitos e suas áreas de aplicação:

- Estática linear de tensões e deformações (edifícios, pontes, torres, componentes mecânicos em geral, tubulações industriais, etc.);
- Dinâmica (modos de vibração e frequências naturais);
- Térmica (transmissão de calor em regime permanente e transiente);
- escoamento de fluidos (aerodinâmica e hidrodinâmica);
- Campos elétricos (condutores, isolantes, eletrodeposição e corrosão) e magnéticos.

Os engenheiros civis foram os primeiros a utilizar a análise por elementos finitos, conhecida como “Método de Análise Matricial de Estruturas”, onde a estrutura real é transformada matematicamente numa série de elementos.

#### 2.4.2. Analogia de Grelha para as Lajes Nervuradas

A substituição de uma laje por uma série ortogonal de vigas se cruzando, formando uma grelha, é uma das mais antigas propostas de solução. Dividindo-se as lajes em um número adequado de faixas, onde os elementos de barra da grelha equivalente passam a representar os elementos estruturais do pavimento (lajes e vigas), é possível reproduzir o comportamento estrutural de pavimentos em concreto armado com praticamente qualquer geometria e em diferentes situações de esquema estrutural, como ilustrado na Figura 2.8. Esta é a base do processo de analogia de grelha, o qual possibilita que se faça o cálculo integrado de um pavimento, considerando não só a laje, mas também suas vigas de apoio na análise.

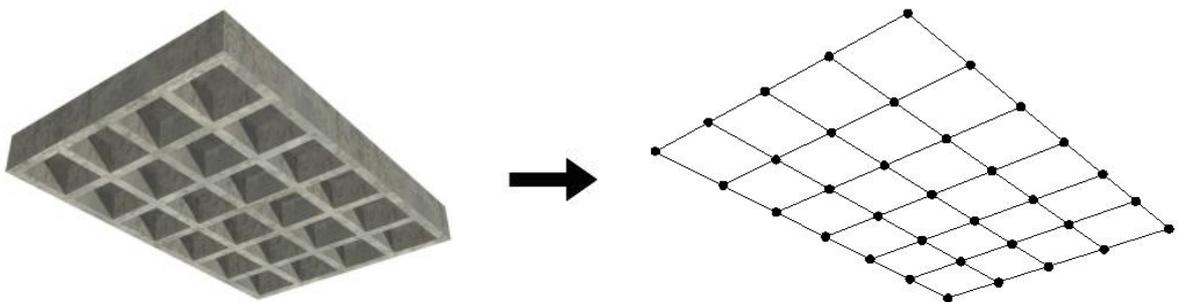
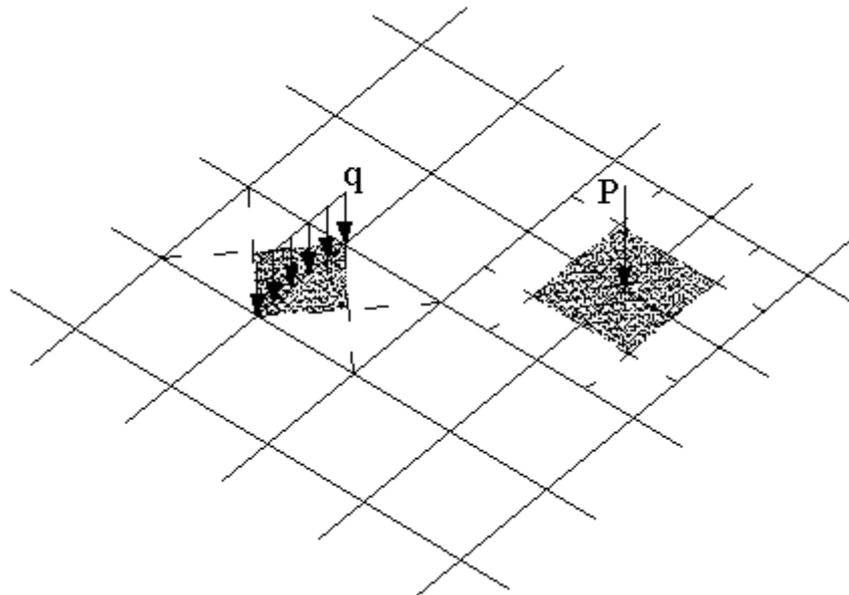


Figura 2.8 – Representação da laje nervurada na analogia de grelha

Há que se considerar alguns cuidados quando se efetua a modelagem, para que os resultados obtidos possam ter o significado desejado. É necessário decidir quantos são os elementos de grelha que se devem considerar na análise e qual sua localização, para o caso de lajes maciças. No estudo de lajes nervuradas, geralmente, os elementos da grelha coincidem com os eixos das nervuras.

Torna-se necessário, ainda, determinar quais características geométricas atribuir aos elementos de grelha de tal forma que a modelagem conduza a resultados o mais próximo possível do que ocorre na laje real. É preciso definir quais os tipos de apoio que devem ser considerados nos nós pertencentes a bordos apoiados da laje e quais as cargas a se considerar na modelagem do carregamento atuante.

Segundo CARVALHO & FIGUEIREDO FILHO [27], considera-se que as cargas distribuídas atuantes no pavimento se dividem entre as barras da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada uma. As cargas podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha ou concentradas diretamente nos seus nós, como mostrado na Figura 2.9.



**Figura 2.9 – Carregamentos nos nós (carga nodal P) e carregamento distribuído (carga uniformemente distribuída q)**

Tendo em vista que esta forma de modelagem de lajes (analogia de grelha) apenas permite uma solução aproximada, não faz sentido, do ponto de vista prático, sofisticar em demasia o processo de determinação da distribuição de cargas pelas barras da estrutura.

Poder-se-ia pensar em aplicar em cada elemento de grelha um carregamento trapezoidal, correspondente à forma como as lajes “descarregam” em cada uma das vigas

fictícias. Esta forma de definição do carregamento tem como desvantagem o volume de cálculos envolvido na determinação dos correspondentes valores para cada uma das barras.

Considera-se, geralmente, o carregamento constituído por uma carga uniformemente distribuída aplicado em toda a laje, o qual é distribuído uniformemente nas faixas da grelha ou concentrado nos nós da grelha, como já mencionado anteriormente.

Os valores do módulo de deformação longitudinal à compressão do concreto ( $E_c$ ), do módulo de deformação transversal do concreto ( $G_c$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) relativos às deformações elásticas podem ser determinados à partir das recomendações da norma brasileira de concreto armado [1].

No que se refere às condições de apoio no método da analogia de grelha, têm-se que cada escolha altera o campo de deformações da laje e, portanto, os esforços internos e as reações de apoio. Para simular a situação real da laje, pode-se considerar:

- Bordos engastados: todos os nós que estiverem sobre um bordo engastado, são considerados como nós engastados, onde todos os deslocamentos se encontram impedidos;
- Bordos simplesmente apoiados: para os nós existentes sobre esses bordos devem-se restringir o deslocamento transversal e as rotações em torno da normal exterior ao bordo em questão. Isto corresponde à existência de apoios cilíndricos em cada um destes nós, nos quais o eixo do cilindro é coincidente com o bordo da laje;
- Bordos de continuidade: quando se considera a existência de um apoio de rigidez infinita (por exemplo, uma parede sob a laje), tem-se que todos os nós existentes sobre este eixo estão sujeitos a um apoio cilíndrico;
- Apoios elásticos: em condições reais, os elementos estruturais apóiam-se em elementos deformáveis (vigas, pilares, paredes de rigidez finita), o que faz com que as condições de fronteira sejam alteradas para se considerar este efeito.

No caso de um painel de lajes contínuas de um edifício de concreto armado, as lajes são apoiadas em paredes rígidas ou em vigas que não são totalmente rígidas. A flexibilidade destas vigas pode influenciar bastante o resultado dos deslocamentos e dos esforços.

A variação da flexibilidade dos apoios de lajes intermediárias, por exemplo, mostra que, para apoios muito rígidos, estas se comportarão como se fossem isoladas, com os lados externos simplesmente apoiados e os lados contíguos às lajes contínuas, engastados. Diminuindo-se a rigidez da viga intermediária, pode-se chegar ao caso extremo no qual as lajes se comportam como se fossem uma única laje simplesmente apoiada no contorno [28].

Quanto à existência de pilares, é necessário que se garanta que neste ponto passe um nó da grelha para que seja possível a correta definição das condições de apoio correspondentes.

### 2.4.2.1. Características Geométricas dos Elementos de Grelha

Uma laje nervurada é formada por um conjunto de vigas (ou nervuras) solidarizadas entre si pela mesa, portanto, o seu comportamento estático é intermediário entre uma placa e uma grelha. Quando se definem os elementos de grelha com os quais se pretende simular o comportamento da laje, é necessário atribuir-lhes uma dada rigidez à flexão,  $EI$ , e uma dada rigidez à torção,  $GJ$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade;  $I$ , o momento de inércia à flexão;  $G$ , módulo de elasticidade transversal e  $J$  o momento de inércia à torção.

Destaca-se que a consideração direta do efeito do momento de torção dificulta a tarefa de dimensionamento e construção das lajes nervuradas. É freqüente que nas grelhas se despreze o valor da rigidez à torção, assumindo então que  $GJ = 0$ , embora o cálculo possa ser feito considerando-a. Essa consideração,  $GJ = 0$ , está do lado da segurança, uma vez que o carregamento será equilibrado apenas com a distribuição de momentos fletores (COELHO [29]).

Baseando-se na Figura 2.10 e nas considerações feitas nos itens 2.2.1 e 2.2.2 deste trabalho, as rigidezes à flexão  $D_x$  e  $D_y$ , assim como as rigidezes acopladas  $D_1$  e  $D_2$ , de uma seção não fissurada, podem ser expressas por:

$$D_x = D + \frac{Eh \left( e_x - \frac{h}{2} \right)^2}{1 - \nu^2} + \frac{EI'_x}{\alpha_x} \quad ( 2.27 )$$

$$D_y = D + \frac{Eh \left( e_y - \frac{h}{2} \right)^2}{1 - \nu^2} + \frac{EI'_y}{\alpha_y} \quad ( 2.28 )$$

$$D_1 = \nu D'_x \quad ( 2.29 )$$

$$D_2 = \nu D'_y \quad ( 2.30 )$$

onde:

$D$ : rigidez à flexão da mesa com relação ao seu plano médio (Eq. 2.2);

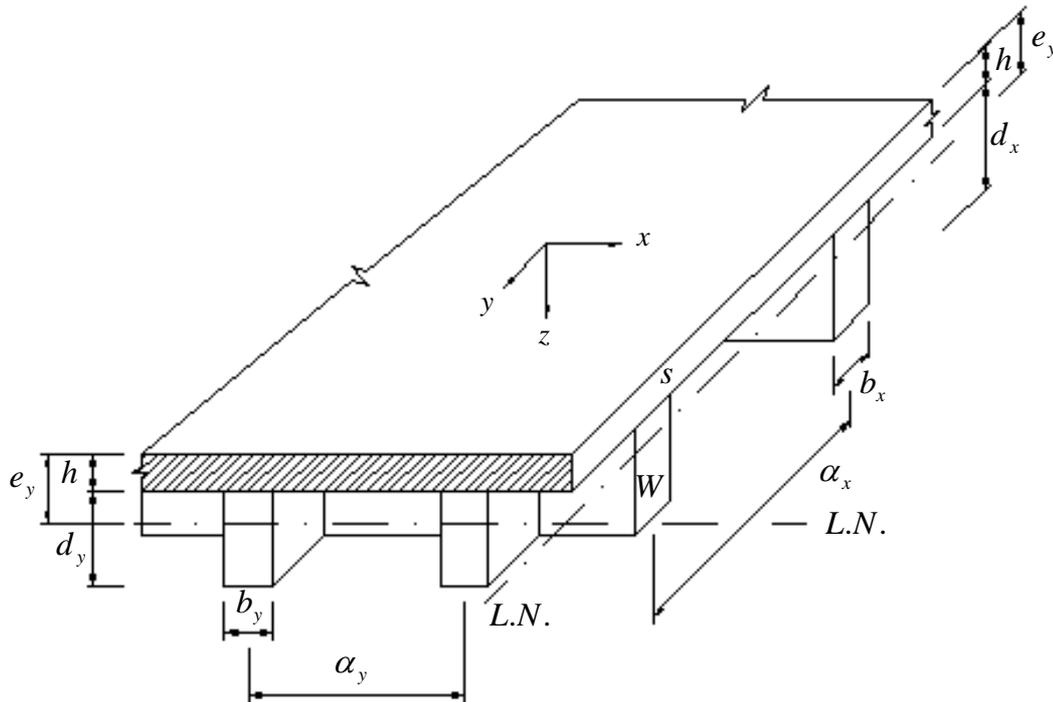
$h$ : espessura da mesa;

$\alpha_x$  ( $\alpha_y$ ): espaçamento das nervuras nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$e_x$  ( $e_y$ ): distância do topo da laje à linha neutra nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$I'_x$  ( $I'_y$ ): momento de inércia das nervuras nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$D'_x$  ( $D'_y$ ): rigidez à flexão da mesa em relação à linha neutra nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.



**Figura 2.10 – Geometria de uma laje nervurada com os eixos de referência [30]**

Para as lajes nervuradas, o momento de inércia à flexão das barras da grelha é, normalmente, adotada como a inércia de uma seção T, considerando-se a largura colaborante da laje. Desta forma, obtém-se:

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i h_i^3}{12} + A_i d_i^2 \right) \quad ( 2.31 )$$

onde:

$b_i$ : largura da porção  $i$  da seção transversal;

$h_i$ : altura da porção  $i$  da seção transversal;

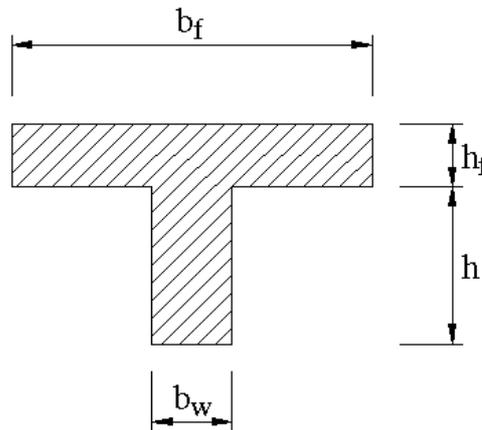
$A_i$ : área da porção  $i$  da seção transversal;

$d_i$ : distância do centro de gravidade da porção  $i$  ao centro de gravidade da seção.

No intuito de melhor quantificar esta propriedade geométrica, KENNEDY & BALI [30] propuseram uma modificação na maneira de calcular o momento de inércia desse tipo de seção. Sendo que a mesa da seção T da barra (Figura 2.11) está, na verdade,

representando uma porção da capa da laje, a área da mesa deve ser majorada pelo fator  $1/(1-\nu^2)$  para levar em consideração a influência do coeficiente de Poisson. Portanto:

$$I = \frac{b_f h_f^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{b_f h_f (y_{CG} - \frac{h_f}{2})^2}{(1-\nu^2)} + \frac{b_w h^3}{12} + b_w h (h_f + \frac{h}{2} - y_{CG})^2 \quad ( 2.32 )$$



**Figura 2.11 – Seção transversal de seção T da laje nervurada**

onde:

$$y_{CG} = \frac{b_w h (h_f + \frac{h}{2}) + \frac{b_f h_f^2}{2(1-\nu^2)}}{b_w h + \frac{b_f h_f}{(1-\nu^2)}} \quad ( 2.33 )$$

$y_{CG}$ : é a ordenada do centróide da seção T, medido a partir da face superior da nervura.

Outra propriedade de importante consideração na análise de lajes em geral, e em especial as nervuradas, é o momento de inércia à torção.

Para a analogia de grelha, assim como é feito com a inércia à flexão, também adota-se a inércia à torção como aquela de uma seção T, considerando-se a largura colaborante da laje.

A consideração da rigidez à torção e da resistência do concreto ao momento torçor no cálculo de lajes de concreto armado, além de reproduzir melhor a distribuição dos

esforços (e, conseqüentemente a distribuição de armaduras), pode diminuir de maneira criteriosa e segura a quantidade de aço necessária para o detalhamento das lajes em comparação com uma modelagem simplificada. Diminui, também, o valor da flecha devido à consideração da rigidez à torção.

O parâmetro de rigidez à torção,  $GJ$ , é composto pelo módulo de elasticidade transversal,  $G$ , do material, que pode ser medido ou calculado, em função do módulo de elasticidade longitudinal,  $E_c$ , e pelo momento de inércia à torção da seção transversal da barra.

Segundo a lei de Hooke, para materiais isotrópicos e homogêneos, tem-se:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ( 2.34 )$$

Sendo que, para aplicações em concreto armado, tem-se o valor do coeficiente de Poisson igual a 0,2 [1].

De acordo com ARAÚJO [8], as lajes nervuradas unidirecionais devem ser calculadas segundo a direção das nervuras desprezadas a rigidez transversal e a rigidez à torção. As lajes com nervuras pré-moldadas funcionam como lajes armadas em uma direção. O cálculo pode ser feito como viga, na direção das nervuras principais. Nas lajes moldadas no local, quando a relação entre os vãos é maior do que 2, o cálculo também é feito como viga, segundo a direção do vão menor. Segundo este autor, nesses dois casos, a rigidez à torção não tem influência nos resultados, já que a análise é feita como viga.

Em outros trabalhos do mesmo autor, [9,10], cita-se que as lajes nervuradas bidirecionais podem ser calculadas, para efeito de esforços solicitantes, como lajes maciças, portanto, os resultados são muito dependentes da rigidez à torção da laje.

Desde que sejam atendidas algumas exigências das normas de projeto quanto as dimensões das lajes nervuradas bidimensionais, a mesma pode ser calculada como lajes maciças [1]. Se as dimensões das nervuras e seus espaçamentos são os mesmo nas duas direções, a placa é isotrópica. Em caso contrário, a placa é ortotrópica, com rigidez à flexão  $D_x$  e  $D_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e é determinada considerando-se os momentos de inércia centroidais das seções  $T$  de cada direção. A rigidez à torção da laje, conforme Araújo [9,10] será:

$$B = \sqrt{D_x + D_y} \quad ( 2.35 )$$

De acordo com KENNEDY & BALI [30], a inércia à torção de uma seção não fissurada de uma laje nervurada de concreto armado deve ser calculado considerando-se a seção T, como mostrado na Figura 2.12.

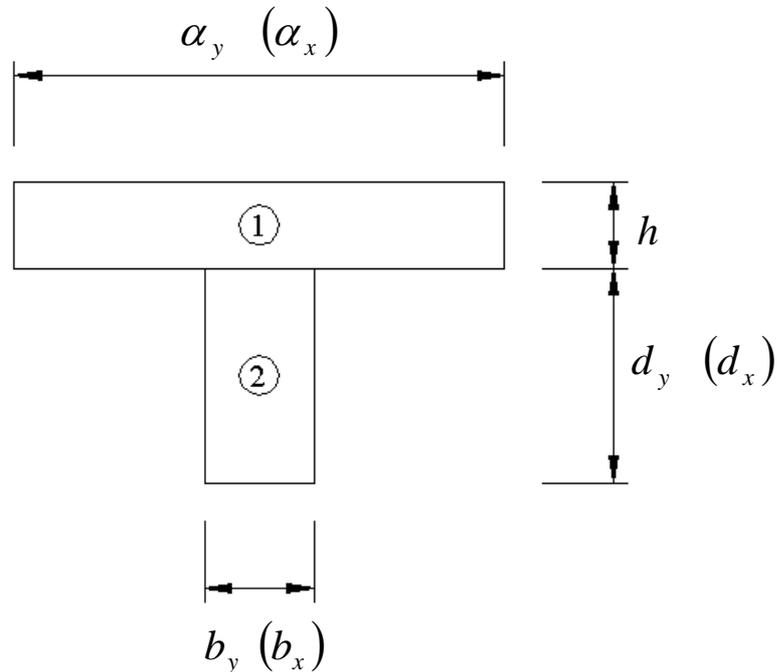


Figura 2.12 – Subdivisões da seção transversal considerada na laje nervurada [30]

A inércia à torção das seções retangulares 1 e 2 são calculadas e somadas para resultar na inércia à torção final  $J$ . Portanto, para uma seção normal ao eixo  $y$ :

$$J = J_1 + J_2 \quad ( 2.36 )$$

onde  $J_1$  e  $J_2$  são relativas às contribuições das áreas 1 e 2 respectivamente, definidas por:

$$J_1 = \frac{1}{2} \beta \alpha_y h^3 \quad ( 2.37 )$$

$$J_2 = \beta d_y b_y^3 \quad \text{para } d_y \geq b_y \quad ( 2.38 )$$

$$J_2 = \beta b_y d_y^3 \quad \text{para } b_y \geq d_y \quad ( 2.39 )$$

onde  $\beta$  é a constante usual de torção para seções retangulares mostrado na Equação 2.44.

O fator de redução 0,5, utilizado no cálculo de  $J_1$  é devido ao fato da mesa estar representando uma laje, que é diferente de uma seção T isolada, ou seja, a inércia à torção de uma laje é a metade da obtida para uma viga.

Além disso, quando se está analisando uma laje nervurada com nervuras em duas direções ortogonais, justifica-se fazer uma modificação no cálculo de  $J_1$ , pois neste caso a inércia à torção  $J_1$  da laje em uma direção é aumentada devido ao enrijecimento proporcionado pela nervura na direção ortogonal. Esse aumento na rigidez à torção pode ser calculado considerando uma seção normal ao eixo x, mostrada na Figura 2.10. A presença da nervura transversal W irá aumentar a rigidez à torção da laje S para um valor denotado por  $(J_s + J_w)$ . Portanto o novo valor de  $J_1$  para a área hachurada (normal ao eixo y) da referida figura será:

$$(J_1)_{\text{modificado}} = J_1 \frac{(J_s + J_w)}{J_s} \quad ( 2.40 )$$

ou seja,

$$J = J_1 + J_2 \quad ( 2.41 )$$

Desta forma, a rigidez à torção  $D_{yx}$  pode ser calculado por:

$$D_{yx} = \frac{GJ}{\alpha_y} \quad ( 2.42 )$$

A rigidez à torção  $D_{xy}$  de uma seção normal ao eixo x pode ser calculada apenas trocando os eixos utilizados.

LEONHARDT [31] afirma que a rigidez à torção das barras da nervura deve ser desprezada, devido à baixa resistência à torção destas, além da pequena largura das mesmas impedir a colocação de armaduras para absorver os esforços oriundos da torção.

Segundo GERE & WEAVER [32], para uma barra de seção transversal T, o momento de inércia de torção integral desse tipo de seção pode ser calculado da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=1}^n \beta b_i^3 h_i \quad ( 2.43 )$$

onde:

$b_i$ : menor dimensão da seção transversal;

$h_i$ : maior dimensão da seção transversal.

$$\beta = \frac{1}{3} - \left( 0,21 \frac{b}{h} \right) \left( 1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \quad ( 2.44 )$$

Portanto, a modelagem de lajes nervuradas utilizando o processo de analogia de grelhas (através do cruzamento de faixas com seção T) é muito mais realista do que o um processo simplificado, como o de Marcus, por exemplo. Todavia, também introduz algum erro, contra a economia, quando se considera a capa de concreto da laje como parte da viga T, ou seja, desconectadas entre si. Isto permite um deslocamento relativo que não corresponde bem à realidade, levando a resultados superiores ao da laje real, porém, a favor da segurança.

### 3. Descrição do Sistema Estrutural Estudado

#### 3.1. Generalidades

Neste item, são expostos as peculiaridades inerentes ao sistema REDUZCON de lajes nervuradas, assim como o modelo computacional desenvolvido. A descrição das propriedades físicas e geométricas utilizadas na analogia de grelha para o estudo dessas lajes também fazem parte desta seção.

#### 3.2. Analogia de Grelha para Lajes do Tipo REDUZCON

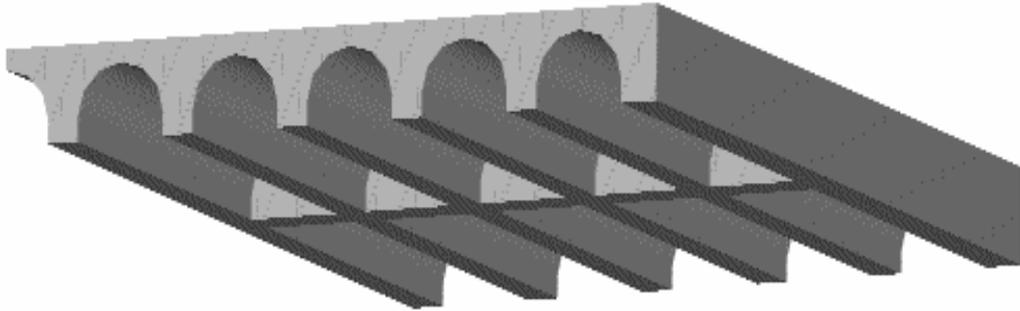
O esquema estrutural utilizado neste estudo baseia-se no sistema de lajes nervuradas do modelo REDUZCON, mostrado na Figura 3.1.

Trata-se de um sistema de construção de lajes nervuradas de baixa espessura, com o uso de fôrmas ou cubas cilíndricas invertidas metálicas. Estas lajes apresentam distâncias diferentes entre eixos de nervuras nas duas direções, ou seja, entre nervuras principais e secundárias. As lajes nervuradas REDUZCON variam de 13 a 26 cm de altura com capas de concreto (espessuras das mesas) na faixa de 3 a 5 cm.



**Figura 3.1 – Lajes nervuradas do tipo REDUZCON**

A peculiaridade deste sistema consiste no formato de arco existente entre as nervuras principais, ou seja, entre aquelas menos espaçadas e paralelas ao menor vão, como pode ser observado na Figura 3.2.



**Figura 3.2 – Esquema estrutural de laje REDUZCON [21]**

As formas semicilíndricas deste tipo de laje, apresentadas na Figura 3.3, são dispostas de tal forma que, estando cada uma destas peças apoiadas em dois pontos, formam um conjunto estável de barrotes (BRC – barrotes redutores de concreto). Este conjunto cria uma estrutura capaz de absorver o peso do concreto e, depois da desforma, geram uma laje nervurada.



**Figura 3.3 – Formas semicilíndricas de lajes REDUZCON**

Estes barrotes redutores de concreto (BRC) são projetados para ser o assoalho e a estrutura horizontal de resistência da forma.

Como pode ser visto na Figura 3.4, o princípio de montagem do conjunto consiste em se justapor as peças sobre linhas de escoramentos a cada 1 m aproximadamente (esquema usual de apoio nas lajes maciças), sem assoalhar os barrotes. Já que estes barrotes são todos colocados lado a lado, não há vãos entre eles, não sendo, portanto, necessário colocar o assoalho entre as peças (compensado, tábuas, etc).



**Figura 3.4 – Esquema estrutural de escoramento**

Nos trechos em que o barrote não é aplicado, pode-se usar o sistema convencional com sarrafo de madeira e compensado para fazer os complementos do assoalho, tendo-se assim um trecho com a laje maciça, como é ilustrado na Figura 3.5.



**Figura 3.5 – Sistema de laje nervurada com trechos de laje maciça**

Segundo o fabricante [21], com este sistema de lajes nervuradas pode-se obter grandes reduções de concreto e aço, o que reduz peso próprio da estrutura. Estes números variam dependendo do projeto, mas pode-se admitir cerca de 40% para o concreto, 30% para o aço e 10% nas cargas das fundações (comparando com uma laje maciça de menor espessura). Com isto os ganhos podem ser de cerca de 10% no custo total da superestrutura, composta de pilares, vigas e lajes [21].

Na Figura 3.6, apresenta-se um esquema associado à geometria da laje nervurada do tipo REDUZCON.

Na sequência do texto, a Tabela 3.1 contém as dimensões comerciais para a construção civil do referido sistema estrutural. Ressalta-se que essas dimensões, adotadas correntemente na construção civil, são empregadas ao longo da presente investigação na análise estrutural dos modelos.

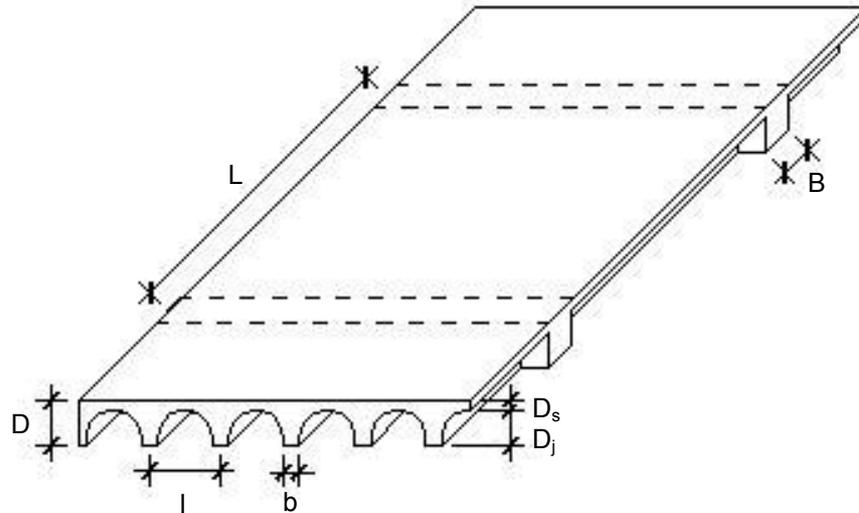


Figura 3.6 – Esquema de laje REDUZCON [21]

onde:

l: distância inter-eixos da nervura principal;

L: distância inter-eixos da nervura secundária;

D: altura total da laje nervurada;

$D_s$ : espessura mínima da capa;

$D_j$ : altura máxima do molde;

b: largura mínima da nervura primária;

B: largura mínima da nervura secundária.

Tabela 3.1 – Composição estrutural nas modalidades dos barretes

<b>BRC 100 – capa 3 cm</b>						
l (cm)	L (cm)	$D_s$ (cm)	$D_j$ (cm)	D (cm)	b (cm)	B (cm)
26	112	3	10	13	6	12
<b>BRC 130 – capa 4 cm</b>						
l (cm)	L (cm)	$D_s$ (cm)	$D_j$ (cm)	D (cm)	b (cm)	B (cm)
26	112	4	13	17	6	12
<b>BRC 210 – capa 5 cm</b>						
l (cm)	L (cm)	$D_s$ (cm)	$D_j$ (cm)	D (cm)	b (cm)	B (cm)
33	116	5	21	26	8	16

Para que se tenha um modelo de grelha que expresse tanto o comportamento da estrutura (laje nervurada) quanto do material (concreto armado) algumas considerações

também devem ser feitas na concepção da grelha quanto às propriedades geométricas da seção e aos parâmetros do concreto. Estes são mostrados nos itens subsequentes.

### 3.3. Modelo Computacional Desenvolvido

Para a análise dos modelos executados neste trabalho, é utilizado o programa computacional ANSYS [19], considerando-se um comportamento elástico-linear para o material concreto armado. O programa ANSYS [19] é um software baseado no método dos elementos finitos, possuindo uma vasta biblioteca de elementos permitindo, assim, diversos tipos de análises.

Na investigação através do método da analogia de grelha, é utilizado um elemento elástico de viga tridimensional, elemento BEAM44 [19], de forma a simular os modelos estruturais. O BEAM44 [19] é um elemento uniaxial, linear com capacidades de atuar na tração, compressão, torção e flexão. Este elemento possui seis graus de liberdade em cada nó, ou seja: 3 translações referentes às direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , além de 3 rotações em torno dos eixos cartesianos, Figura 3.7.

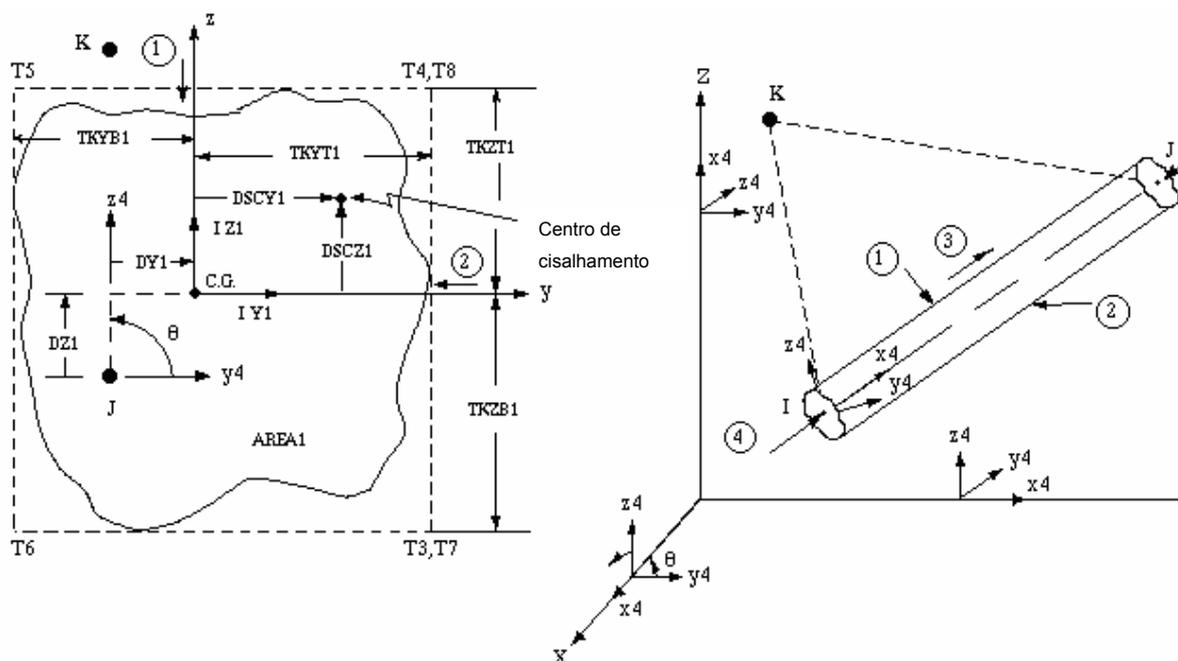


Figura 3.7 - Elemento BEAM44 [19]

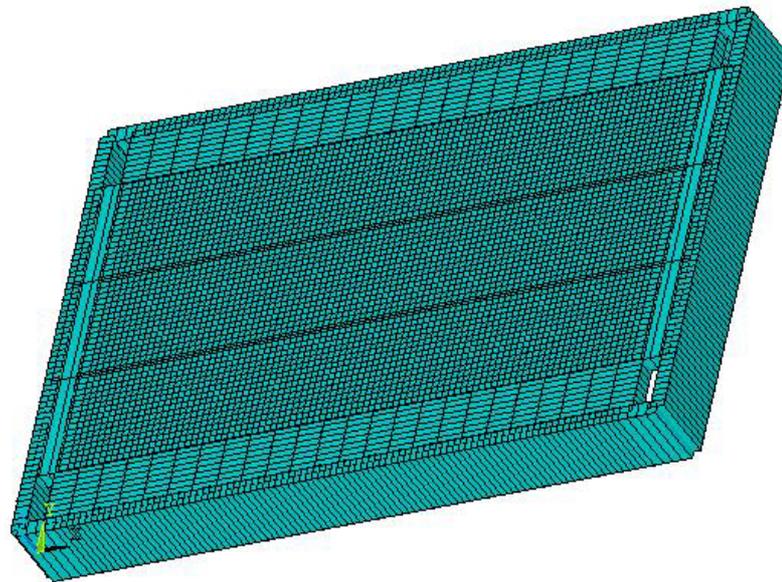
Uma das vantagens deste elemento é a possibilidade de permitir que seus nós sejam posicionados de forma a considerar as diferenças existentes entre as distâncias dos eixos dos centróides das barras, visto que a laje e as vigas não estão posicionadas no mesmo

eixo, como ilustrado na Figura 3.8. Tal excentricidade deve ser considerada na modelagem computacional, pois apresenta, como era de se esperar, influência significativa nos resultados obtidos.



**Figura 3.8 – Visualização da excentricidade existente entre a viga de bordo e a laje nervurada**

Na Figura 3.9 pode ser visualizado um dos modelos estruturais de laje nervurada adotados, com 3 nervuras secundárias e 24 principais, discretizado em elementos finitos, com o auxílio do programa ANSYS [19].



**Figura 3.9 – Malha de elementos finitos [19]**

Com o intuito de relatar as experiências adquiridas acerca do desempenho computacional obtido durante o presente trabalho, são apresentados os tempos médios de

processamento necessário para obtenção dos resultados numéricos dos modelos de lajes nervuradas.

As análises computacionais foram realizadas em um microcomputador com processador PENTIUM IV, com 1GB de memória RAM e disco rígido com 160 GB. O software utilizado nas análises foi o ANSYS [19] na versão 10.0, rodando sobre sistema operacional Windows XP Professional.

O tempo gasto para obtenção dos resultados das análises estática para os modelos de laje nervurada com vãos variando de 4,5 por 4,5 m a 4,5 por 9 m foi inferior a 10 s.

### 3.4. Descrição do Sistema Estrutural Estudado

Neste estudo, é considerada a variação do número de nervuras secundárias, apenas com o cunho didático, para que se possa observar o comportamento da laje na transição entre uma estrutura com geometria aproximadamente isotrópica para um modelo estrutural geometricamente ortotrópico. Ressalta-se que, na prática, a quantidade de nervuras secundárias das lajes nervuradas do tipo REDUZCON [21] é definido pelo vão livre e pela forma utilizada.

Tem-se que, para os exemplos com lajes de 13 e 17 cm de altura, onde a distância entre nervuras principais é de 26 cm, torna-se possível utilizar 17 formas do tipo BRC100 e BRC130 [21] para o vão livre estudado (igual a 4,5 m), como mostrado nas Figura 3.10 e Figura 3.11. Desta forma, obtém-se 16 nervuras principais no sistema estrutural final.

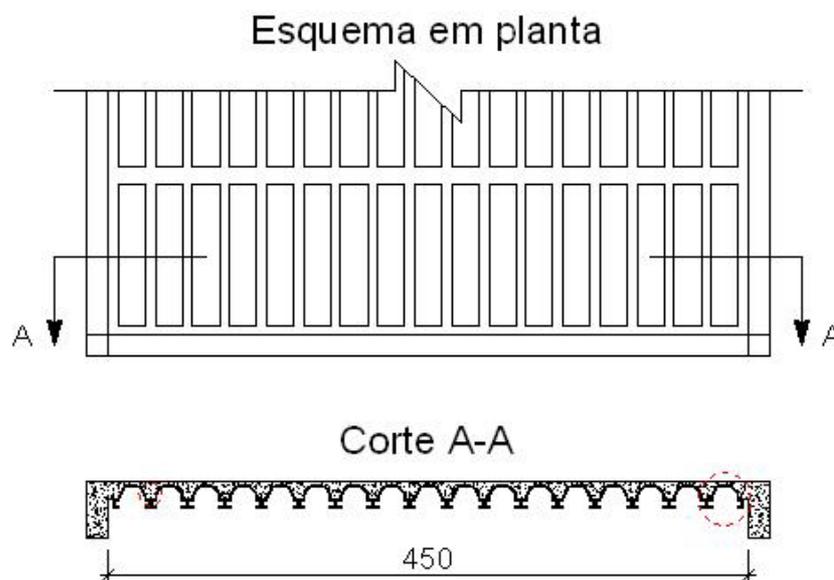
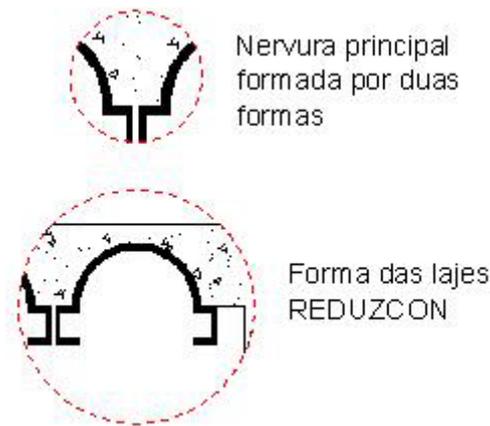
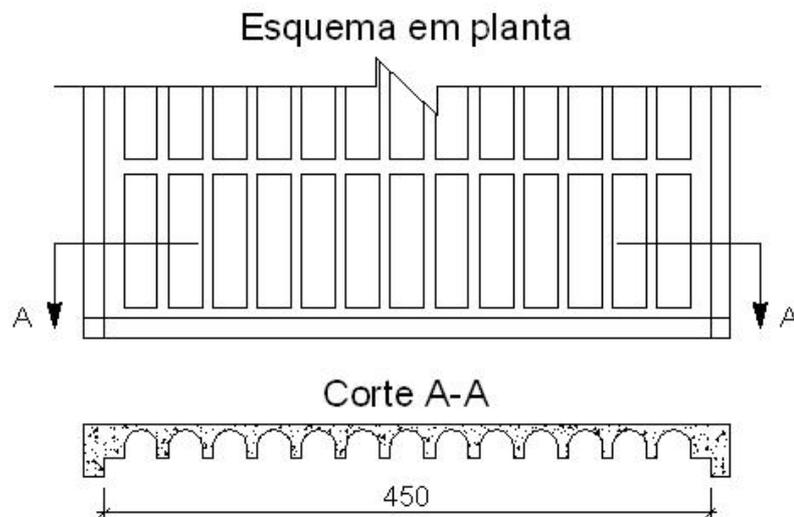


Figura 3.10 – Esquema de montagem da laje nervurada do tipo REDUZCON [21] (17 formas formando 16 nervuras principais – cota em cm)



**Figura 3.11 – Detalhes do corte A-A**

Já para as lajes de 26 cm de altura, obtidas com a utilização da forma BRC210 (33 cm de distância entre nervuras principais), têm-se, neste mesmo vão livre, 13 formas, as quais formarão 12 nervuras principais, tal como é mostrado na Figura 3.12.



**Figura 3.12 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 26 cm de altura (13 formas formando 12 nervuras principais – cota em cm)**

Na seqüência, tem-se variado o número de nervuras secundárias a partir de 16 até 2 nervuras para BRC100 e 130 e de 12 até 2 para BRC210, mantendo-se fixo o número de nervuras principais, igual a 16 e 12, respectivamente. Estes números iniciais de nervuras secundárias (16 e 12) são escolhidos no intuito de se observar o comportamento da laje nervurada com a mesma quantidade de nervuras nas duas direções, pois esta é a quantidade de nervuras principais para as lajes quadradas (16 para BRC100 e 130 e 12 para BRC210). Observa-se que não se pode considerar isotrópica a laje cujo número de

nervuras é igual nas duas direções, visto que as nervuras secundárias têm a largura da alma um pouco maior do que aquela das nervuras principais.

A Tabela 3.2 apresenta os dados referentes à geometria do modelo estrutural, ou seja, o número de nervuras secundárias e a distância entre estas nervuras para as formas BRC100 e 130, e a Tabela 3.3, para BRC210.

**Tabela 3.2 - Variação do número de nervuras secundárias dos modelos estruturais obtidos com as formas BRC100 e BRC130**

Exemplo	Nº de Nervuras	Distância (cm)
1	16	26,0
2	13	32,1
3	10	40,9
4	7	56,2
5	5	75,0
6	3	112*
7	2	112*

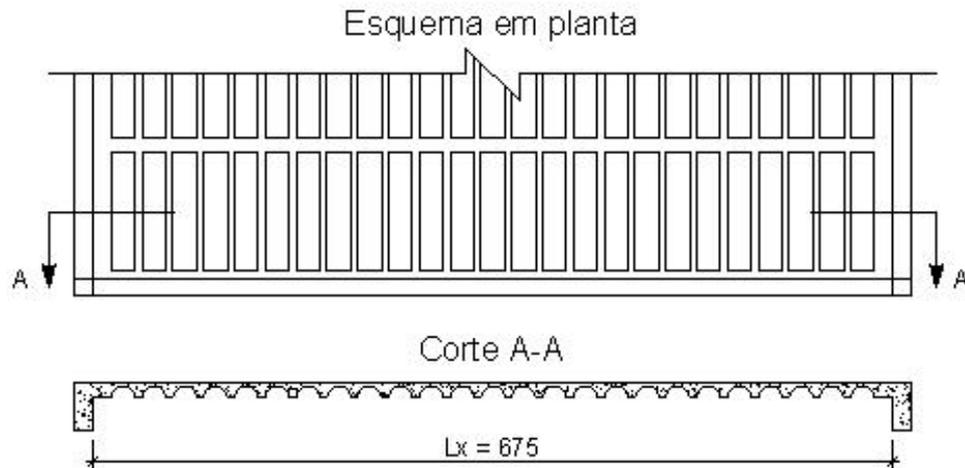
**Tabela 3.3 - Variação do número de nervuras secundárias dos modelos estruturais obtidos com a forma BRC210**

Exemplo	Nº de Nervuras	Distância (cm)
8	12	33,0
9	10	40,9
10	7	56,2
11	5	75,0
12	3	112
13	2	116*

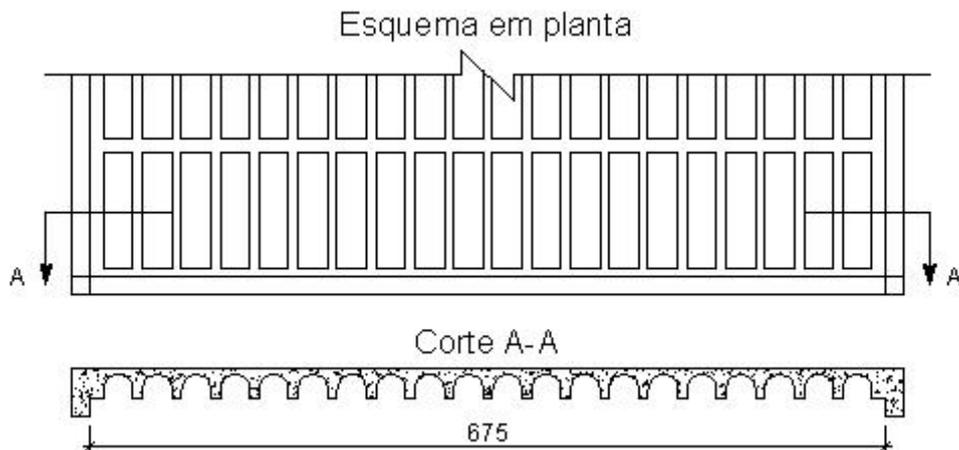
**Obs.:** Somente as dimensões de nervuras assinaladas com (\*) são obtidas nas lajes REDUZCON. Todas as outras dimensões foram utilizadas apenas com o objetivo de investigar o comportamento estrutural do sistema de modo mais didático.

Para todos estes exemplos, são feitas análises com a relação entre os lados das lajes,  $L_x/L_y$ , igual a 1, 1,5 e 2, sendo que  $L_x$  é o lado perpendicular às nervuras principais e  $L_y$ , o paralelo à estas.

Para as lajes com relação entre os vãos igual a 1,5, obtiveram-se 24 nervuras principais para BRC100 e BRC130 e 19 para BRC210, conforme mostrado na Figura 3.13 e Figura 3.14. Para  $L_x/L_y = 2$ , 33 e 25, respectivamente. Observa-se que foram mantidas os mesmos números de nervuras secundárias, ou seja, aqueles apresentados nas tabelas acima.

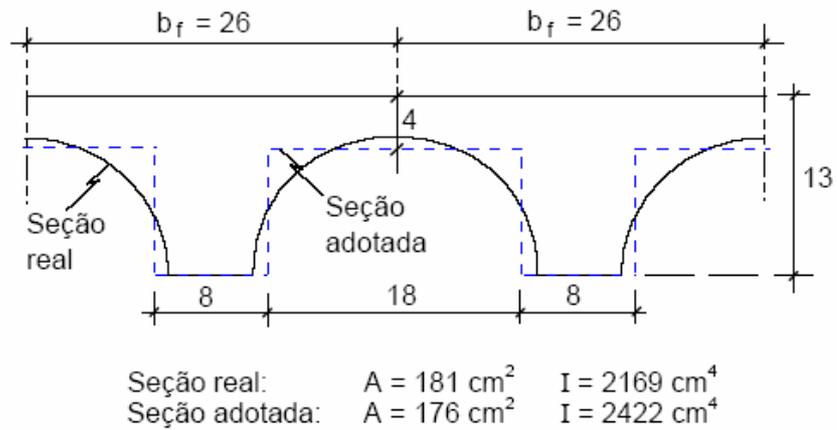


**Figura 3.13 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 13 cm de altura e a relação entre os vãos igual a 1,5 (25 formas BRC100 formando 24 nervuras principais – cota em cm)**



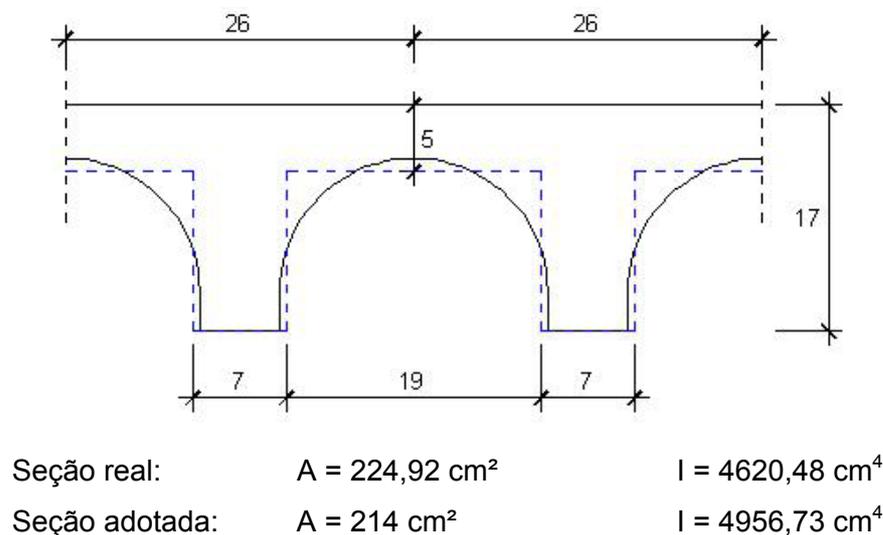
**Figura 3.14 – Laje nervurada do tipo REDUZCON [21] com 26 cm de altura e a relação entre os vãos igual a 1,5 (20 formas BRC210 formando 19 nervuras principais – cota em cm)**

Na direção das nervuras principais, a seção transversal possui a forma de arco. Adota-se para as lajes analisadas REDUZCON [21] uma seção equivalente [34], como representado na Figura 3.15 associada ao modelo BRC100, a qual tem, aproximadamente, a mesma área e o mesmo momento de inércia da seção real. Ressalta-se que a seção transversal das nervuras secundárias têm formas retas, o que dispensa a utilização de uma seção equivalente, e sua nervura tem 12 cm de largura, tanto para a forma BRC100 quanto para BRC130.

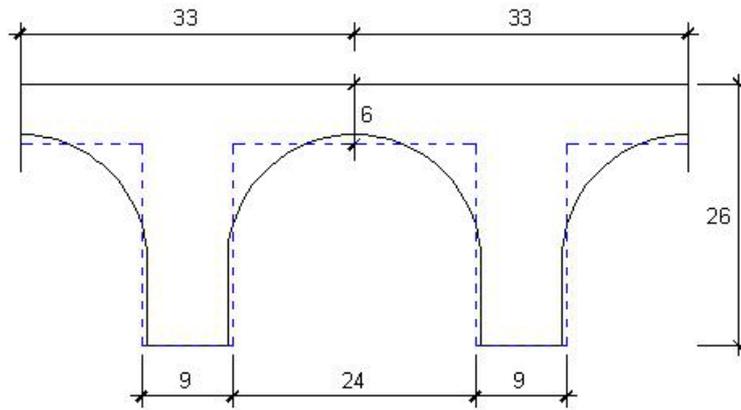


**Figura 3.15 - Seção do tipo "T" adotada para as nervuras principais das lajes com 13 cm de altura (BRC100 - cotas em cm)**

Da mesma forma, são obtidas as seções equivalentes para as lajes com 17 e 26 cm de altura, de acordo com a Figura 3.16 e a Figura 3.17, respectivamente, representadas a seguir. Para a seção equivalente da forma BRC130, a diferença numérica da área em relação à seção real foi de 4,86% e em relação à inércia à flexão, 7,28%. Quanto àquela utilizada para representar a forma BRC210, a diferença numérica em relação à área real foi de 5,51%, já para a inércia, encontrou-se 7,07% de diferença.



**Figura 3.16 - Seção do tipo "T" adotada para as nervuras principais das lajes com 17 cm de altura (BRC130 - cotas em cm)**



Seção real:	$A = 400,06 \text{ cm}^2$	$I = 21043,8 \text{ cm}^4$
Seção adotada:	$A = 378 \text{ cm}^2$	$I = 22531,59 \text{ cm}^4$

**Figura 3.17 - Seção do tipo "T" adotada para as nervuras principais das lajes com 26 cm de altura (BRC210 - cotas em cm)**

Assim como para as lajes com 13 e 17 cm de altura, a seção transversal das nervuras secundárias das lajes com 26 cm de altura têm formas retas, dispensando, desta maneira, a aproximação para uma seção equivalente. Sua nervura tem 16 cm de largura.

As características físicas e geométricas das lajes nervuradas com 17 cm de altura (aquelas feitas com o molde BRC130), assim como as ações atuantes, são expostas nos itens subseqüentes.

Posteriormente, são apresentadas no Item 3.7, as lajes REDUZCON com 17 cm de altura (forma BRC130) com a variação do número de nervuras secundárias analisadas e, bem como, as respectivas seções transversais das faixas da grelha no sentido das nervuras principais e secundárias.

### 3.5. Propriedades Físicas e Geométricas

As barras da grelha na análise de uma laje nervurada representam uma nervura conjuntamente com uma faixa da mesa da laje à ela conectada. Sendo assim, as propriedades destas barras são as de uma viga "T", como é descrito a seguir.

Em todas as análises, o concreto é considerado com resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ), aos 28 dias, de 20 MPa e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0.2, adotado de acordo com a NBR 6118 [1].

Para o módulo de elasticidade longitudinal secante ( $E_{cs}$ ), referente a este concreto, tem-se um valor igual a  $2,129 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , já que:

$$E_{cs} = 0,85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad ( 3.1 )$$

#### 3.5.1.1. Inércia à Flexão das Barras da Grelha

Considera-se a seção integral de concreto em um cálculo elástico. Sua inércia à flexão é calculada como demonstrado na Equação 2.31.

#### 3.5.1.2. Inércia à Flexão das Vigas de Bordo

São consideradas no estudo três seções transversais de vigas de bordo, 15 x 40 cm, 15 x 70 cm, e 15 x 100 cm, sendo a inércia à flexão calculada com a utilização da mesma equação empregada no cálculo para as barras da grelha, evidentemente considerando na Equação 2.31 a distância “d<sub>i</sub>” nula, o que resulta na expressão clássica da mecânica técnica, mostrada abaixo.

$$I = \frac{b_i h_i^3}{12} \quad ( 3.2 )$$

#### 3.5.1.3. Inércia à Torção das Barras da Grelha

Os níveis de torção que ocorrem na maioria das grelhas são esforços advindos da compatibilidade de deformações, haja visto que, à medida que se reduz a rigidez à torção da barra de grelha, os momentos de torção também são reduzidos até que, para um limite teórico de rigidez nula à torção, tem-se também momentos de torção nulos. Dessa forma, geralmente, nos pisos de edifícios em grelha surgem esforços de torção meramente oriundos da compatibilidade das deformações. Verifica-se também ser possível a ocorrência de uma situação em que há equilíbrio com torção nula, no caso de baixa rigidez à torção ou no caso de tolerar-se plastificações, conforme SUSSEKIND [35].

Neste sentido, faz-se, primeiramente, a análise considerando a inércia à torção de uma seção T, de acordo com a Equação 2.43. Uma outra análise é feita considerando apenas 1% do valor anteriormente calculado, ou seja, praticamente se desprezando o valor da inércia à torção.

#### 3.5.1.4. Inércia à Torção das Vigas de Bordo

Geralmente, a rigidez à torção das vigas do contorno das lajes é desprezada, considerando-se nula a sua inércia à torção. Isto se faz devido ao inconveniente relacionado

à necessidade de verificação da viga no que tange à sua resistência aos esforços oriundos da torção, além de ter que armá-la para suportar tais esforços.

São feitas análises desconsiderando sua inércia à torção, acima justificado. Porém, afim de se avaliar a influência deste parâmetro, também são feitas análises considerando a inércia à torção da seção bruta e da seção fissurada.

Para a inércia da viga no estágio I (não fissurado), desconsidera-se o segundo termo de  $\beta$ , da Equação 2.44, considerando a viga como retangular sem levar em conta a contribuição da laje adjacente. Desta forma, obtém-se:

$$J = \frac{hb^3}{3} \quad ( 3.3 )$$

Assim como indica CARVALHO [33], no estágio II (fissurado), pode-se considerar o valor da inércia à torção do elemento de viga como sendo 10% daquele dado pela equação anterior.

### 3.6. Carregamentos Adotados

Nesta investigação, as cargas são consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha, de acordo com a Figura 3.18. Pois, como mencionado em DIAS [23], assim representa-se melhor a forma dos diagramas de momentos fletores das nervuras.

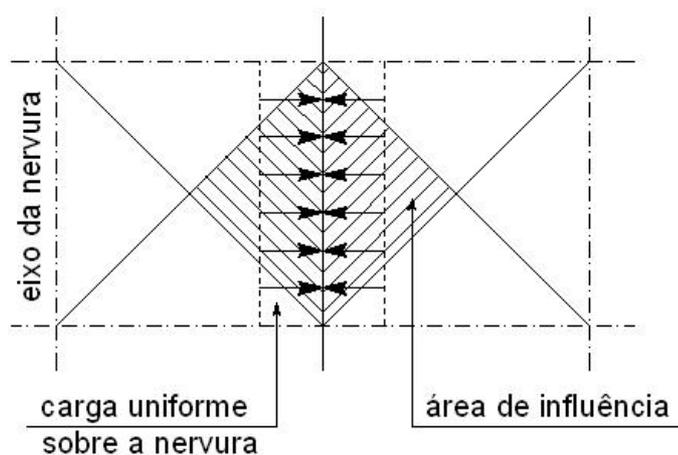


Figura 3.18 – Carga uniformemente distribuída sobre as nervuras [23]

Os modelos estruturais analisados neste trabalho estão submetidos aos seguintes carregamentos: peso próprio (calculado com  $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$ ), peso de alvenaria igual a  $1,5 \text{ kN/m}^2$ , de revestimento igual a  $1 \text{ kN/m}^2$  e de sobrecarga igual a  $1,5 \text{ kN/m}^2$ .

Para o cálculo do peso próprio das nervuras, considera-se a área formada pelo cruzamento de uma faixa de seção “T” relativa à nervura principal e uma relativa à nervura secundária, conforme Figura 3.19. Assim sendo, o peso próprio das nervuras principais e secundárias inscrito nesta área ( $\text{kN/m}^2$ ) é somado ao peso próprio da mesa ( $\text{kN/m}^2$ ).

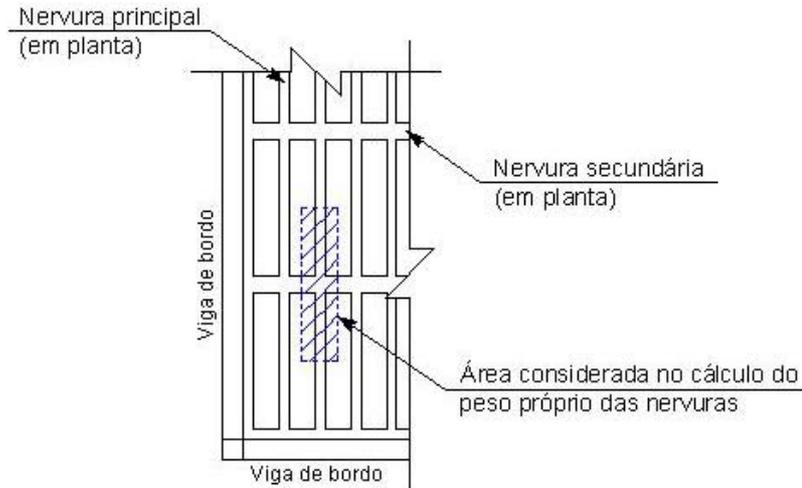


Figura 3.19 – Área considerada no cálculo do peso próprio das nervuras

### 3.7. Modelos Estruturais Analisados

#### 3.7.1. Modelo I

Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 2 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.20. Na Figura 3.21, tem-se as seções transversais que representam as nervuras principais e secundárias adotadas no processo de analogia de grelha para este modelo.

A distância livre entre nervuras secundárias é de 1 m e entre as principais, 0,19 m, porém se o estudo fosse realizado com a seção real ao invés da equivalente para as nervuras principais, esta distância seria de 0,2 m, já que a seção equivalente da nervura principal é 1 cm menor que a seção real.

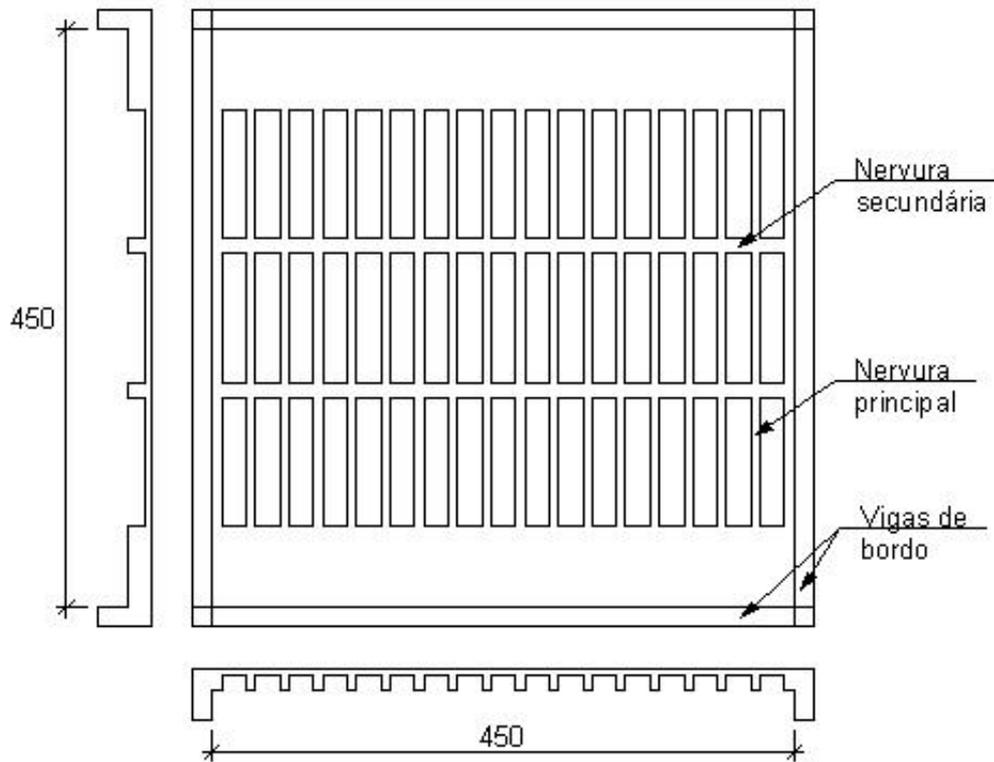
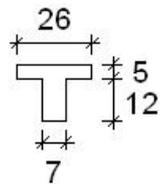


Figura 3.20 – Laje do tipo REDUZCON [21] com 2 nervuras secundárias (cotas em cm)

Nervura principal:



Nervura secundária:

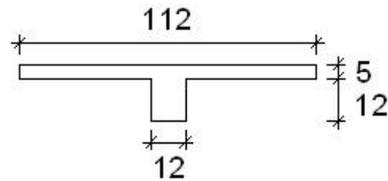


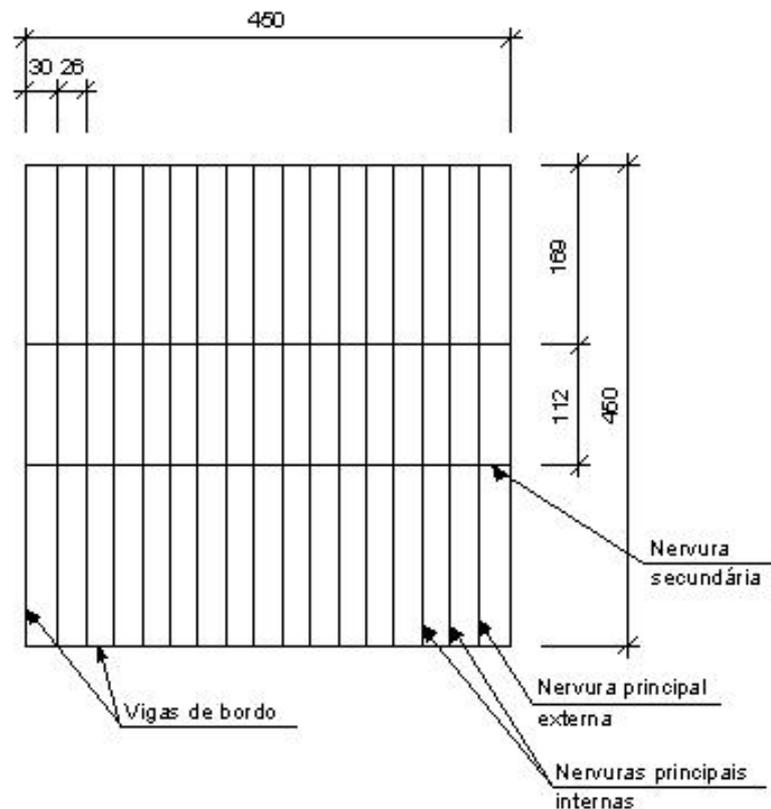
Figura 3.21 – Seções transversais (cotas em cm)

Na seqüência, a Tabela 3.4 apresenta os valores dos momentos de inércia associados à flexão ( $I$ ) e à torção ( $J$ ) no que tange às nervuras principais e secundárias. Ressalta-se que para os demais modelos estruturais analisados nesta seção (Item 3.7), a geometria (seção transversal) das nervuras principais não é modificada, portanto, não é mais apresentada. Todavia, a seção transversal das nervuras secundárias dos diversos modelos é variada de acordo com cada modelo estudado.

**Tabela 3.4 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 2 nervuras secundárias**

Nervuras principais		Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
$7,67 \times 10^{-5}$	$1,82 \times 10^{-5}$	$5,87 \times 10^{-3}$	$7,46 \times 10^{-5}$

Como a distância do eixo da viga de bordo ao eixo da primeira nervura da laje é um pouco maior do que as distâncias entre eixos das demais nervuras, de acordo com a Figura 3.22, as ações atuantes nas barras da grelha que representam a laje nervurada são diferentes para aquelas mais externas e internas.



**Figura 3.22 – Representação da grelha com 2 nervuras secundárias (cotas em cm).**

Considerando-se a estratégia do Item 3.6, têm-se as seguintes ações atuantes:

Peso próprio da mesa:  $0,5 \times 25 = 1,25 \text{ kN/m}^2$

Peso próprio das nervuras:  $\frac{25 \times [0,07 \times 1,12 \times 0,12 + 0,12(0,26 - 0,07) \times 0,12]}{1,12 \times 0,26} = 1,043 \text{ kN/m}^2$

Alvenaria: 1,5 kN/m<sup>2</sup>

Revestimento: 1 kN/m<sup>2</sup>

Sobrecarga de utilização: 1,5 kN/m<sup>2</sup>

Total das ações atuantes: 6,293 kN/m<sup>2</sup>

Este carregamento distribuído por m<sup>2</sup> tem que ser transformado em um carregamento linear, para que possa ser aplicado sobre os elementos do modelo estrutural mostrado na Figura 3.22, ou seja, as barras que representam as faixas da grelha. O valor numérico destas cargas foi determinado a partir da área de influência das barras, conforme ilustrado na Figura 3.18, como indicado a seguir:

Para as barras correspondentes às nervuras principais externas:

$$6,293 \times \left( \frac{1,12 \times 0,3}{2 \times 1,12} + \frac{1,12 \times \frac{0,26}{2}}{2 \times 1,12} \right) = 1,353 \text{ kN/m}$$

Para as barras correspondentes às nervuras principais internas:

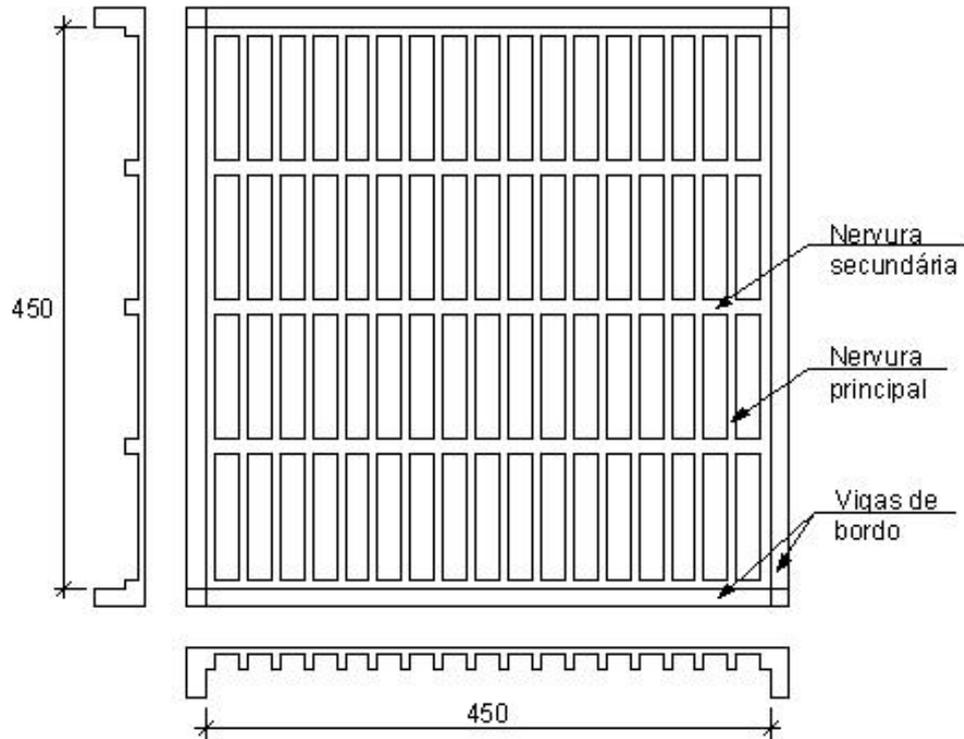
$$6,293 \times 2 \times \left( \frac{1,12 \times \frac{0,26}{2}}{2 \times 1,12} \right) = 0,818 \text{ kN/m}$$

Para as barras correspondentes às nervuras secundárias:

$$6,293 \times \left( \frac{0,26 \times 1,69}{2 \times 0,26} + \frac{0,26 \times \frac{1,12}{2}}{2 \times 0,26} \right) = 7,079 \text{ kN/m}$$

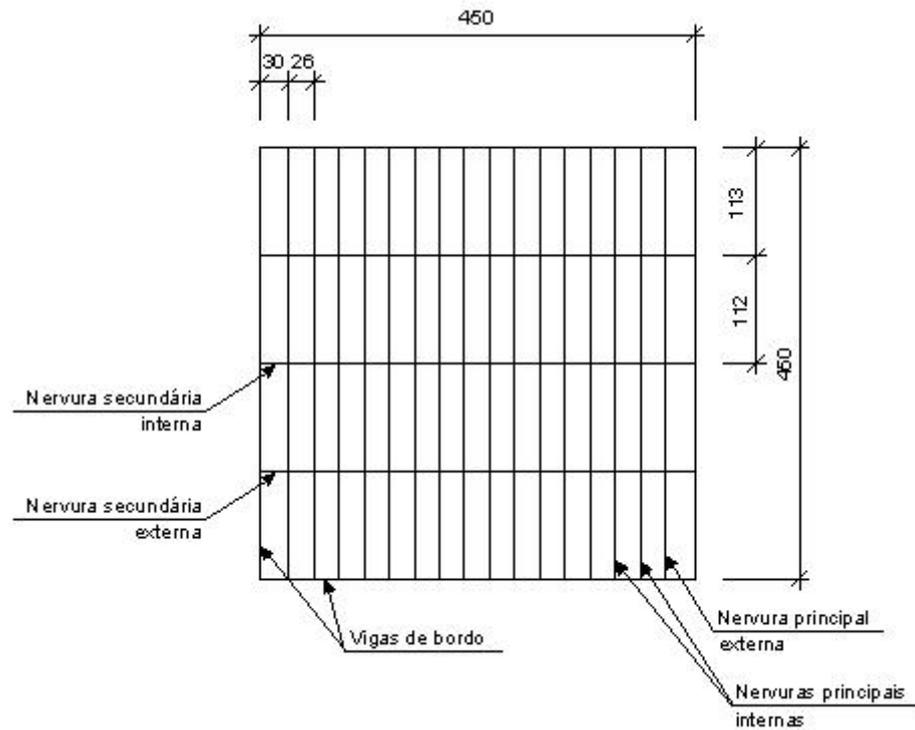
### 3.7.2. Modelo II

Este modelo estrutural consiste em laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 3 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.23. A distância livre entre nervuras secundárias é de 1 m e entre as principais, 0,19 m.



**Figura 3.23 - Laje do tipo REDUZCON [21] com 3 nervuras secundárias (cotas em cm).**

Como as seções transversais das barras da grelha são as mesmas que as do exemplo anterior, os momentos de inércias também serão. Porém, os carregamentos mudam, já que a área de influência de cada barra da grelha é diferente daquela do exemplo 1, pois as distâncias entre as barras mudam, como pode ser visto na Figura 3.24.



**Figura 3.24 – Representação da grelha com 3 nervuras secundárias (cotas em cm).**

Da mesma forma como no modelo anterior, tem-se:

Peso próprio da mesa:  $0,5 \times 25 = 1,25 \text{ kN/m}^2$

Peso próprio das nervuras:  $\frac{25 \times [0,07 \times 1,12 \times 0,12 + 0,12(0,26 - 0,07) \times 0,12]}{1,12 \times 0,26} = 1,043 \text{ kN/m}^2$

Alvenaria:  $1,5 \text{ kN/m}^2$

Revestimento:  $1 \text{ kN/m}^2$

Sobrecarga de utilização:  $1,5 \text{ kN/m}^2$

Total das ações atuantes:  $6,293 \text{ kN/m}^2$

Sendo assim, têm-se os seguintes carregamentos lineares distribuídos aplicados nas barras da grelha:

Para as barras correspondentes às nervuras principais externas:

$$6,293 \times \left( \frac{1,12 \times 0,3}{2 \times 1,12} + \frac{1,12 \times \frac{0,26}{2}}{2 \times 1,12} \right) = 1,353 \text{ kN/m}$$

Para as barras correspondentes às nervuras principais internas:

$$6,293 \times 2 \times \left( \frac{1,12 \times \frac{0,26}{2}}{2 \times 1,12} \right) = 0,818 \text{ kN/m}$$

Para as barras correspondentes às nervuras secundárias externas:

$$6,293 \times \left( \frac{0,26 \times 1,13}{2 \times 0,26} + \frac{0,26 \times \frac{1,12}{2}}{2 \times 0,26} \right) = 5,318 \text{ kN/m}$$

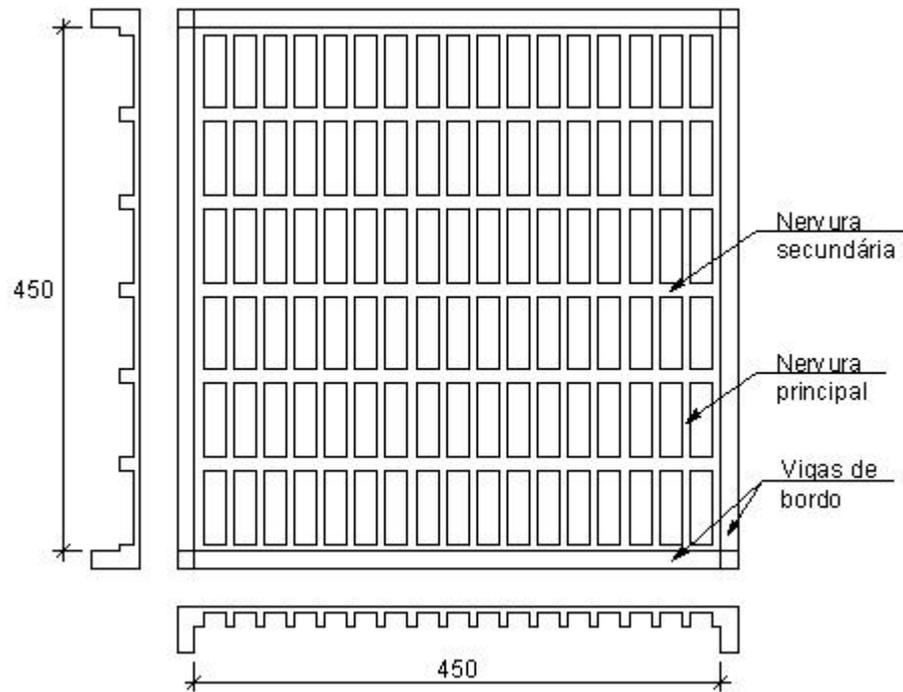
Para as barras correspondentes às nervuras secundárias internas:

$$6,293 \times 2 \times \left( \frac{0,26 \times \frac{1,12}{2}}{2 \times 0,26} \right) = 3,524 \text{ kN/m}$$

### 3.7.3. Modelo III

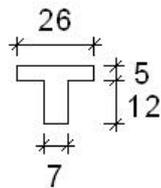
Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 5 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.25. A distância livre entre nervuras secundárias é de 0,63 m e entre as principais, 0,19 m.

Na Figura 3.26, tem-se as seções transversais que representam as nervuras secundárias e principais adotadas no processo de analogia de grelha para este modelo.

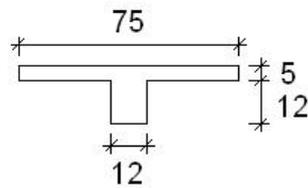


**Figura 3.25 – Modelo estrutural com 5 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm)**

Nervura principal:



Nervura secundária:



**Figura 3.26 - Seções transversais (cotas em cm)**

Na Tabela 3.5, têm-se os momentos de inércia da seção transversal das barras da grelha que representam as nervuras secundárias para este modelo.

**Tabela 3.5 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 5 nervuras secundárias**

Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
1,775x10 <sup>-3</sup>	5,914x10 <sup>-5</sup>

De acordo com a Figura 3.27, têm-se, na Tabela 3.6, as seguintes cargas aplicadas nas barras da grelha:

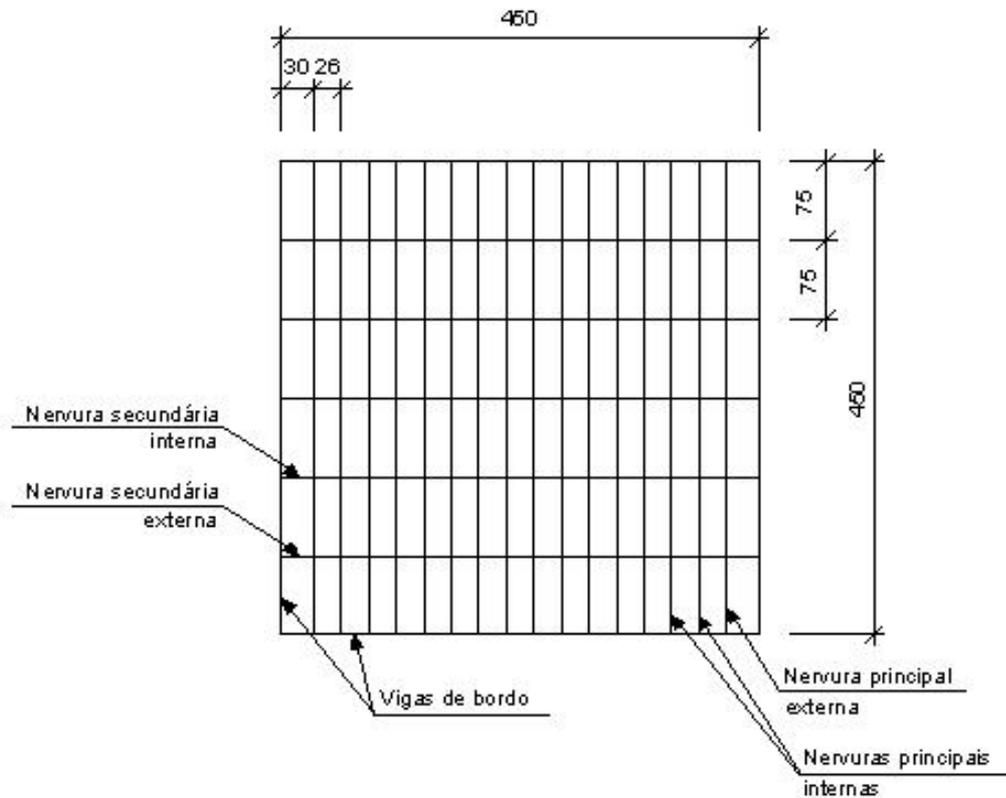


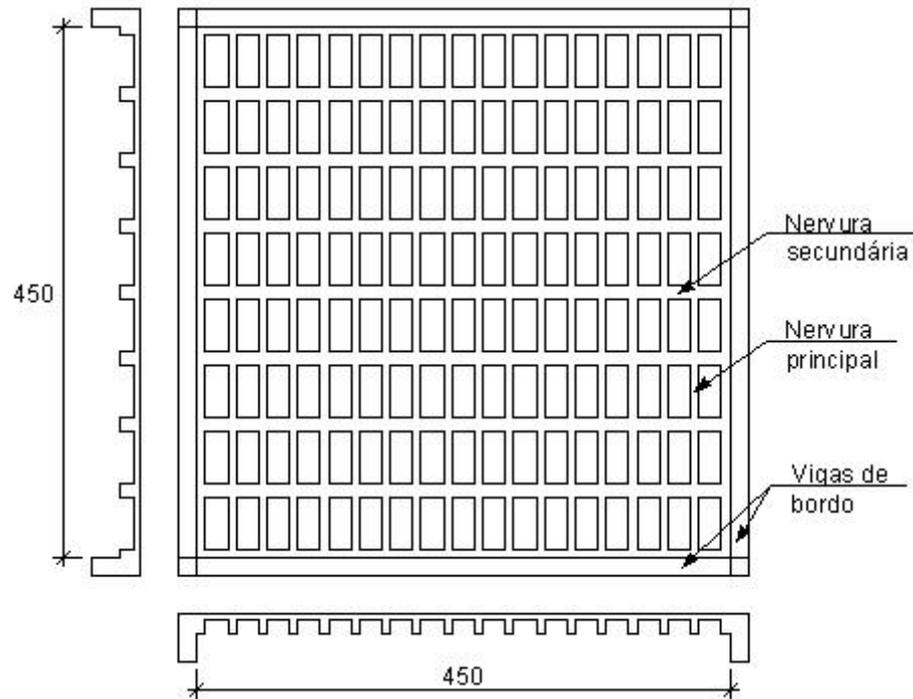
Figura 3.27 – Representação da grelha com 5 nervuras secundárias (cotas em cm).

Tabela 3.6 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente

Carregamento distribuído na laje nervurada deste exemplo (kN/m <sup>2</sup> )					
Peso próprio da mesa	Peso próprio das nervuras	Alvenaria	Revestimento	Sobrecarga	Total
1,25	1,158	1,5	1	1,5	6,408
Carregamento distribuído nas barras da grelha equivalente (kN/m)					
Nervuras principais externas	Nervuras principais internas	Nervuras secundárias externas	Nervuras secundárias internas		
1,378	0,833	3,605	2,403		

### 3.7.4. Modelo IV

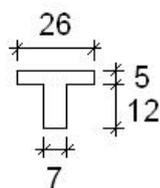
Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 7 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.28. A distância livre entre nervuras secundárias é de 0,442 m e entre as principais, 0,19 m.



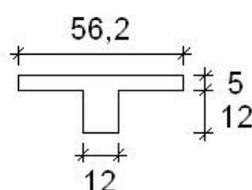
**Figura 3.28 - Modelo estrutural com 7 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm)**

Na Figura 3.29, estão representadas as seções transversais das nervuras principais e secundárias adotadas no processo de analogia de grelha para este modelo.

Nervura principal:



Nervura secundária:



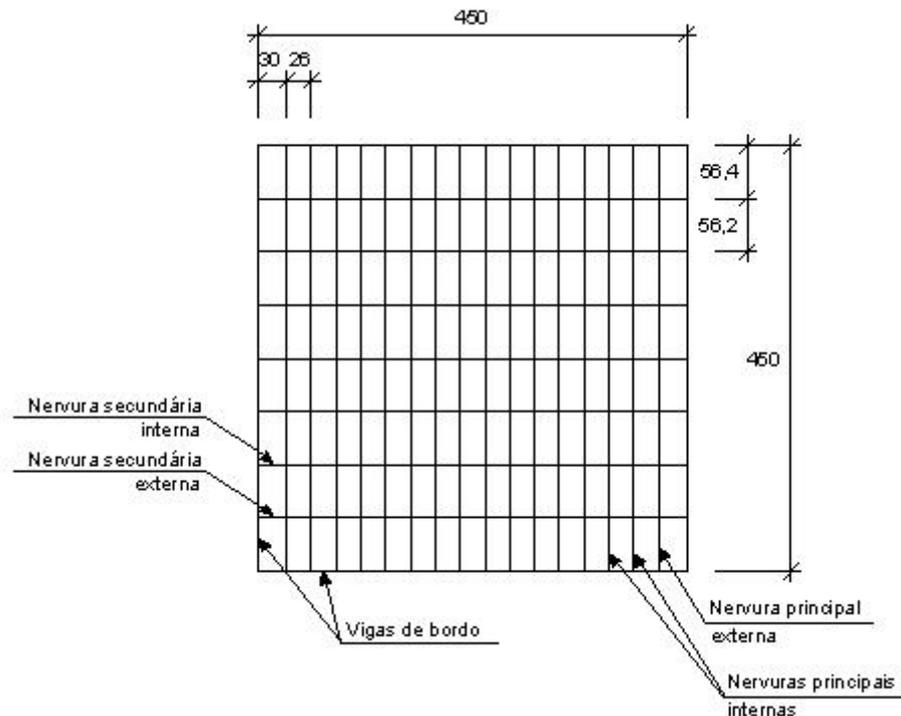
**Figura 3.29 - Seções transversais (cotas em cm)**

Na Tabela 3.7, têm-se os momentos de inércia da seção transversal das barras da grelha que representam as nervuras secundárias para este modelo.

**Tabela 3.7 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 7 nervuras secundárias**

Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
$7,57 \times 10^{-4}$	$5,131 \times 10^{-5}$

Baseando-se na disposição das barras da grelha da Figura 3.30, têm-se, na Tabela 3.8, as seguintes cargas aplicadas nestas barras:



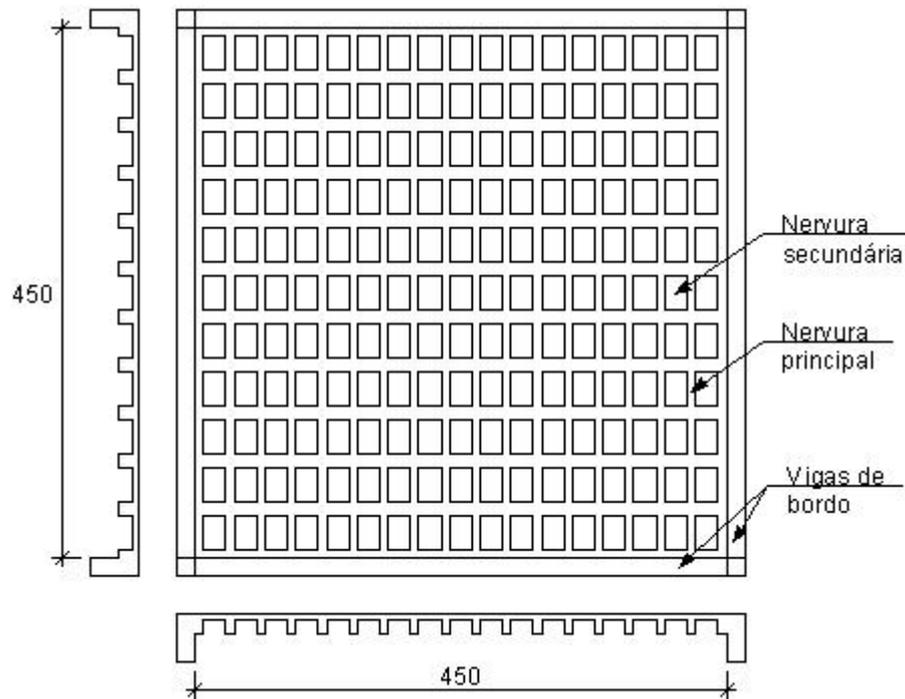
**Figura 3.30 – Representação da grelha com 7 nervuras secundárias (cotas em cm).**

**Tabela 3.8 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente**

Carregamento distribuído na laje nervurada deste exemplo (kN/m <sup>2</sup> )					
Peso próprio da mesa	Peso próprio das nervuras	Alvenaria	Revestimento	Sobrecarga	Total
1,25	1,276	1,5	1	1,5	6,526
Carregamento distribuído nas barras da grelha equivalente (kN/m)					
Nervuras principais externas	Nervuras principais internas	Nervuras secundárias externas	Nervuras secundárias internas		
1,403	0,848	2,751	1,834		

### 3.7.5. Modelo V

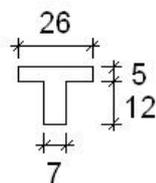
Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 10 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.31. A distância livre entre nervuras secundárias é de 0,289 m e entre as principais, 0,19 m.



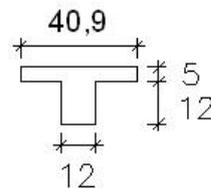
**Figura 3.31 - Modelo estrutural com 10 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm)**

A seguir, estão representadas, na Figura 3.32, as seções transversais das nervuras principais e secundárias adotadas na analogia de grelha para este modelo.

Nervura principal:



Nervura secundária:



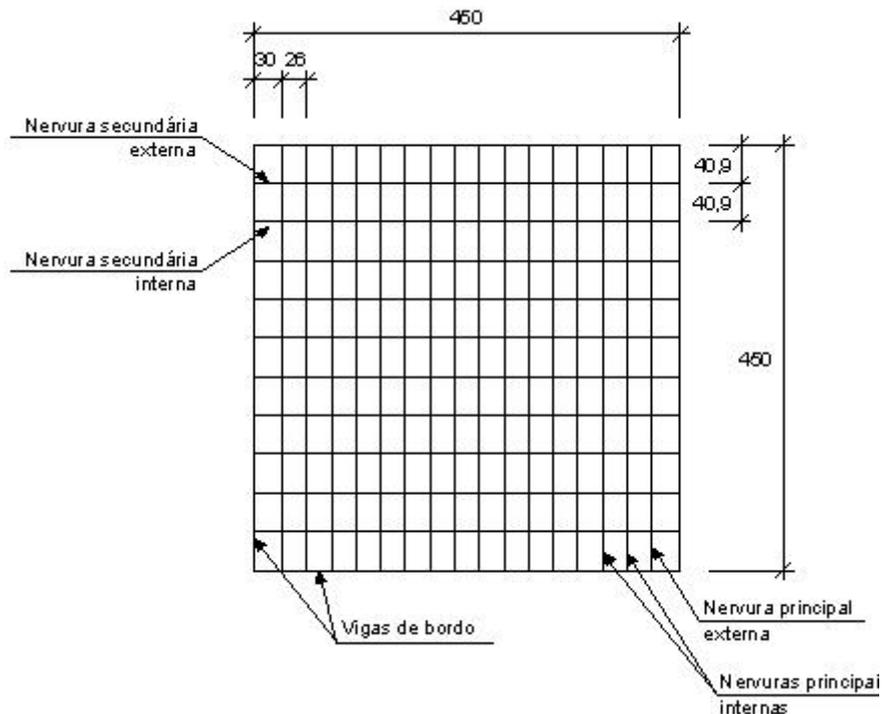
**Figura 3.32 - Seções transversais (cotas em cm)**

Na Tabela 3.9, têm-se os momentos de inércia da seção transversal das barras da grelha que representam as nervuras secundárias para este modelo.

**Tabela 3.9 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 10 nervuras secundárias**

Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
$3,02 \times 10^{-4}$	$4,493 \times 10^{-5}$

Baseando-se na disposição das barras da grelha da Figura 3.33, têm-se, na Tabela 3.10, as seguintes cargas aplicadas nestas barras:



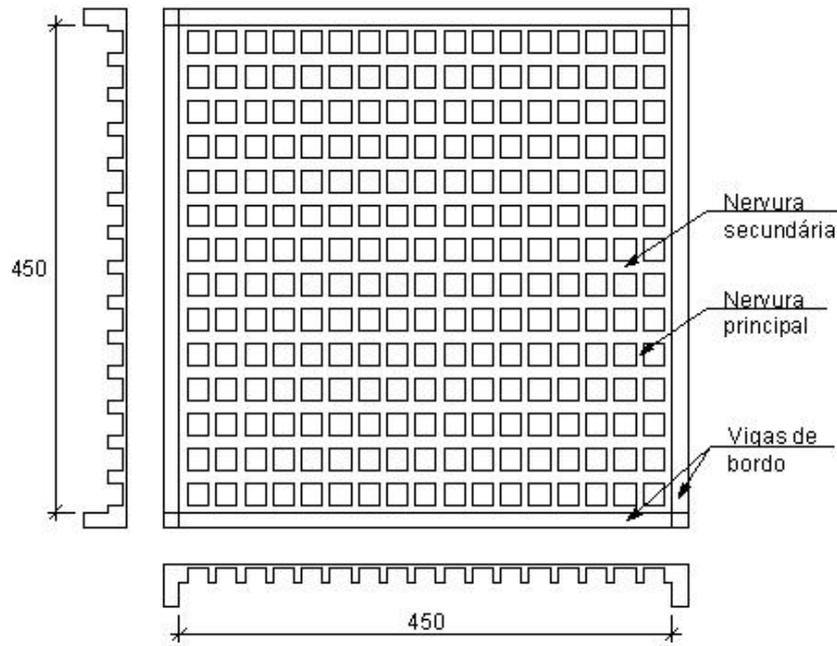
**Figura 3.33 – Representação da grelha com 10 nervuras secundárias (cotas em cm).**

**Tabela 3.10 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente**

Carregamento distribuído na laje nervurada deste exemplo (kN/m <sup>2</sup> )					
Peso próprio da mesa	Peso próprio das nervuras	Alvenaria	Revestimento	Sobrecarga	Total
1,25	1,451	1,5	1	1,5	6,701
Carregamento distribuído nas barras da grelha equivalente (kN/m)					
Nervuras principais externas	Nervuras principais internas	Nervuras secundárias externas	Nervuras secundárias internas		
1,441	0,871	2,056	1,37		

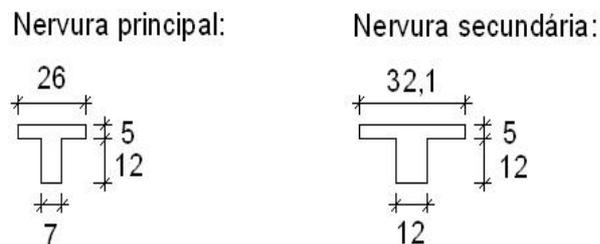
### 3.7.6. Modelo VI

Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 13 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.34. A distância livre entre nervuras secundárias é de 0,201 m e entre as principais, 0,19 m.



**Figura 3.34 - Modelo estrutural com 13 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm)**

A seguir, estão representadas, na Figura 3.35, as seções transversais das nervuras principais e secundárias adotadas na analogia de grelha para este modelo.



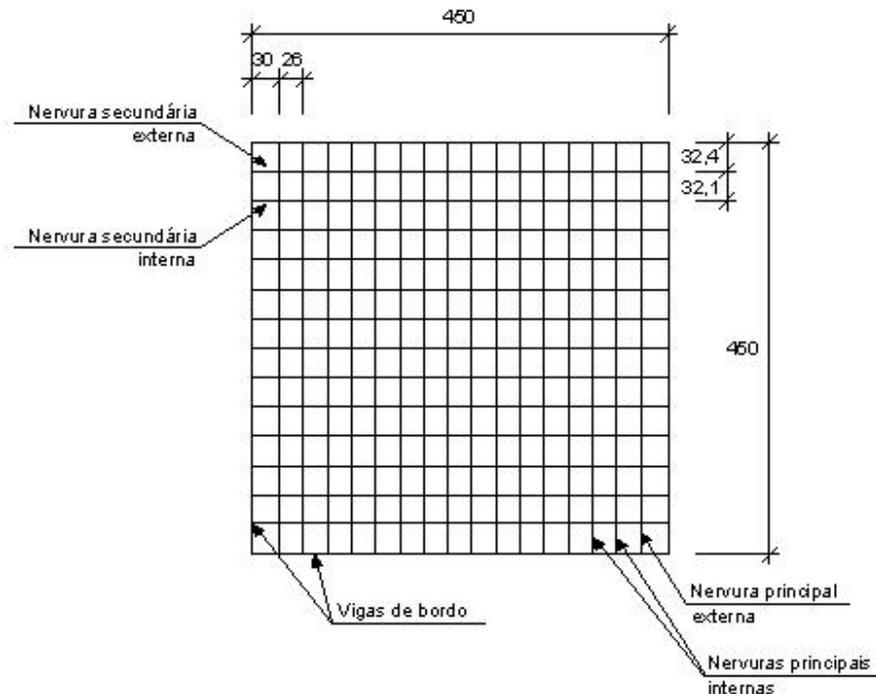
**Figura 3.35 - Seções transversais (cotas em cm)**

Na Tabela 3.11, têm-se os momentos de inércia da seção transversal das barras da grelha que representam as nervuras secundárias para este modelo.

**Tabela 3.11 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 13 nervuras secundárias**

Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
1,55x10 <sup>-4</sup>	4,127x10 <sup>-5</sup>

Baseando-se na disposição das barras da grelha da Figura 3.36, têm-se, na Tabela 3.12, as seguintes cargas aplicadas nestas barras:



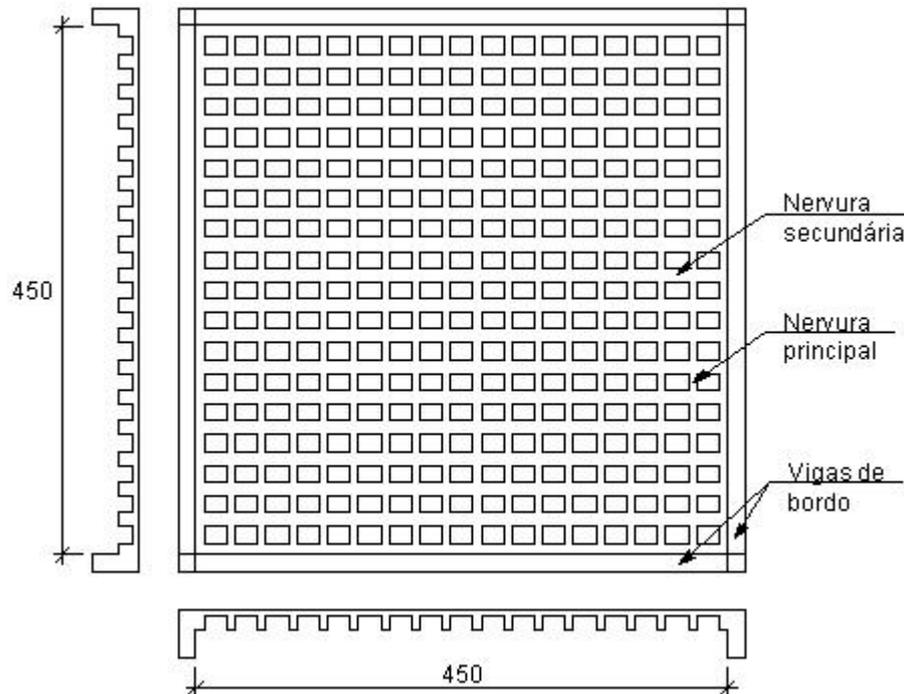
**Figura 3.36 – Representação da grelha com 13 nervuras secundárias - distância entre os eixos dos elementos (cotas em cm).**

**Tabela 3.12 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente**

Carregamento distribuído na laje nervurada deste exemplo (kN/m <sup>2</sup> )							
Peso próprio da mesa	Peso próprio das nervuras	Alvenaria	Revestimento	Sobrecarga	Total		
1,25	1,627	1,5	1	1,5	6,877		
Carregamento distribuído nas barras da grelha equivalente (kN/m)							
Nervuras principais externas		Nervuras principais internas		Nervuras secundárias externas		Nervuras secundárias internas	
1,479		0,894		1,666		1,104	

### 3.7.7. Modelo VII

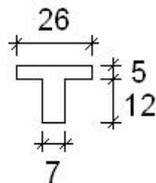
Este modelo estrutural consiste em uma laje quadrada de 4,5 por 4,5 m de vão livre com 16 nervuras secundárias e 16 nervuras principais, conforme Figura 3.37. A distância livre entre nervuras secundárias é de 0,14 m e entre as principais, 0,19 m.



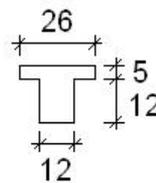
**Figura 3.37 - Modelo estrutural com 16 nervuras secundárias baseado nas lajes do tipo REDUZCON [21] (cotas em cm)**

A seguir, estão representadas, na Figura 3.38, as seções transversais das nervuras principais e secundárias adotadas na analogia de grelha para este modelo.

Nervura principal:



Nervura secundária:



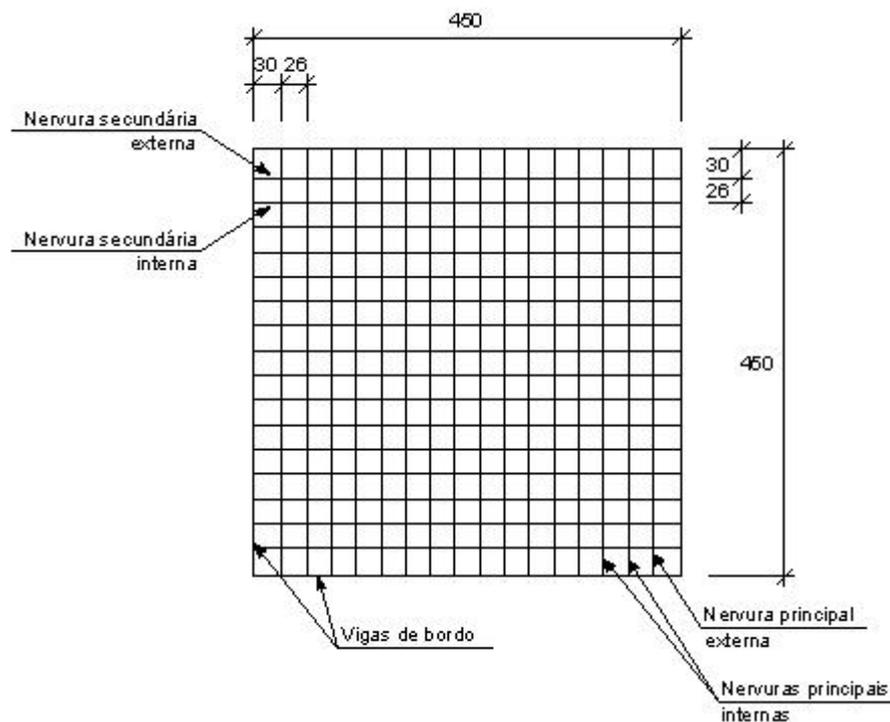
**Figura 3.38 - Seções transversais (cotas em cm)**

Na Tabela 3.13, têm-se os momentos de inércia da seção transversal das barras da grelha que representam as nervuras secundárias para este modelo.

**Tabela 3.13 – Características das barras da grelha que representam a laje nervurada com 16 nervuras secundárias**

Nervuras secundárias	
I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
9,05x10 <sup>-5</sup>	3,872x10 <sup>-5</sup>

Baseando-se na disposição das barras da grelha da Figura 3.39, têm-se, na Tabela 3.14, as seguintes cargas aplicadas nestas barras:



**Figura 3.39 – Representação da grelha com 16 nervuras secundárias (cotas em cm).**

**Tabela 3.14 – Carregamentos atuantes na laje nervurada e nas barras da grelha equivalente**

Carregamento distribuído na laje nervurada deste exemplo (kN/m <sup>2</sup> )					
Peso próprio da mesa	Peso próprio das nervuras	Alvenaria	Revestimento	Sobrecarga	Total
1,25	1,82	1,5	1	1,5	7,07
Carregamento distribuído nas barras da grelha equivalente (kN/m)					
Nervuras principais externas	Nervuras principais internas	Nervuras secundárias externas	Nervuras secundárias internas		
1,52	0,919	1,52	0,919		

Para as vigas de bordo das lajes nervuradas analisadas, têm-se a Tabela 3.15 com os momentos de inércia à flexão (I) e à torção (J) das seções transversais.

**Tabela 3.15 – Características físicas e geométricas das vigas de bordo**

Viga de Bordo (m)	I (m <sup>4</sup> )	J (m <sup>4</sup> )
0,15 x 0,4	$8 \times 10^{-4}$	$4,5 \times 10^{-4}$
0,15 x 0,7	$4,288 \times 10^{-3}$	$7,875 \times 10^{-4}$
0,15 x 1	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,125 \times 10^{-3}$