



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

**Análise Dinâmica de Placas Considerando Efeito de Membrana  
Submetidas a Carregamentos Explosivos**

Rio de Janeiro

2019

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

**Análise Dinâmica de Placas Considerando Efeito de Membrana Submetidas a Carregamentos Explosivos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Prof. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

R375 Reis, Ana Waldila de Queiroz Ramiro.  
Análise dinâmica de placas considerando efeito de membrana submetidas a carregamentos explosivos / Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis. – 2019.  
164f.

Orientadores: Rodrigo Bird Burgos e Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira.

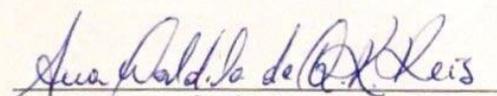
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

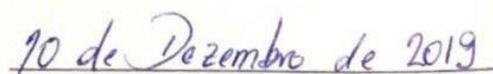
1. Engenharia civil - Teses. 2. Análise estrutural (Engenharia) - Teses. 3. Explosivos - Teses. 4. Deformações e tensões - Teses. 5. Deslizamentos (Geologia) - Teses. 6. Runge-Kutta, Fórmulas de. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.04

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

  
Assinatura

  
Data

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

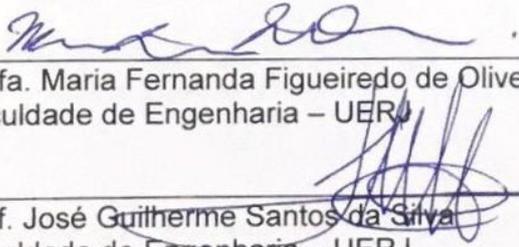
Análise dinâmica de placas considerando efeito de membrana submetidas a carregamentos explosivos

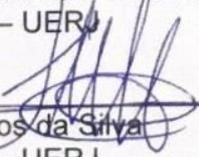
Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 30 de julho de 2019.

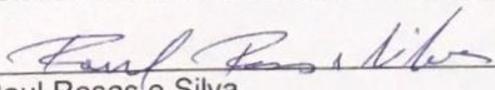
Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Rodrigo Bird Burgos – Presidente/ Orientador  
Faculdade de Engenharia – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira – Orientadora  
Faculdade de Engenharia – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Guilherme Santos da Silva  
Faculdade de Engenharia – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Gilvan Lunz Debona  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Raul Rosas e Silva  
Pontifícia Universidade Católica – PUC-Rio

Rio de Janeiro

2019

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Senhor Deus por me conceder inteligência e sabedoria para prosseguir a cada dia nessa estrada que chamamos de vida, passando e ultrapassando pelas dificuldades.

Aos meus pais, Nilson e Márcia por estarem sempre ao meu lado, me amparando e me auxiliando em todos os momentos, com palavras de carinho e conforto.

Ao meu padrinho, José Luiz, pelo apoio nessa jornada e pela colaboração em material didático para meu aprendizado.

Ao meu noivo, Fabrizio Santoro, que sempre me apoiou, em todas as circunstâncias, me abraçava e me dizia palavras de fé, incentivo e esperança quando eu precisava.

Aos meus amigos do PGECIV, Augusto Cezar, Karina Mota, Keila Letícia, Mateus Moreira e Tatiana Correia. Sempre presentes e dispostos a sentarem comigo para conversas e esclarecimentos de vida e da faculdade. Por todo o incentivo concedido, apoio em todos os momentos que estive precisando, pelos sorrisos que abriram para mim e que me fizeram abrir. Eu não apenas fiz companheiros durante o mestrado, eu fiz amigos.

Ao Samuel E. Rigby, que com bastante paciência respondia aos meus e-mails, enviando-me material com relação ao fenômeno da explosão, auxiliando de forma com que esta dissertação pudesse ser concebida.

Aos meus orientadores, Rodrigo Burgos e Maria Fernanda, pela paciência e ensinamentos, por estarem sempre dispostos a ouvirem o que tenho a dizer, pelas orientações, pelos conhecimentos que me passaram e pelas oportunidades que me concederam quanto ao meu desenvolvimento profissional.

Ao Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil, por ter me recebido, passado o conhecimento e ter permitido com que eu desenvolvesse esta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido que viabilizaram a confecção deste trabalho

À UERJ, por todo conhecimento e maturidade para eu me tornar uma pessoa melhor e uma profissional capacitada.

Elevo os meus olhos para os montes. Onde há de vir o meu socorro?

O meu socorro vem do Senhor, que fez o céu e a terra.

*Salmos 121.1-2*

## RESUMO

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Análise dinâmica de estruturas de placa submetidas a carregamentos explosivos*. 2019. 164f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O comportamento de estruturas de engenharia civil submetidas a cargas explosivas tem sido estudado com bastante frequência nos últimos anos e muito esforço está sendo aplicado para idealizar curvas e prever as correspondentes respostas estruturais e dos elementos protetivos. O fenômeno de explosão resulta em uma abrupta onda de sobrepressão seguida por uma onda de sobpressão, sendo esta última normalmente desconsiderada na maioria das análises estruturais. Contudo, recentes estudos alegam que a fase de sucção é primordial, de forma que pode levar a deslocamentos e tensões substancialmente maiores. No caso de ondas de explosão de alta intensidade, elementos estruturais experimentam grandes deslocamentos, de forma que efeitos de segunda ordem devem ser incluídos nas análises. Este trabalho investiga a influência da não linearidade na análise dinâmica de placas submetidas a cargas explosivas. O problema foi modelado considerando um sistema não linear de um grau de liberdade com a aplicação da teoria de von Karman para grandes deflexões, considerando as configurações de apoio simples e engastado. Uma carga de pressão uniforme é simulada para os casos de ondas sobrepressão e sobpressão com a implementação da equação de Friedlander e a aproximação cúbica, respectivamente. O método de Runge-Kutta é usado para solucionar as equações de movimento para deslocamentos. Soluções numéricas para deslocamentos e tensões foram obtidas para placas com variadas configurações geométricas e ondas de explosão, tornando possível mensurar a influência da pressão de sucção e do efeito de membrana na resposta.

Palavras-chave: Placas; Análise Dinâmica; Análise Não Linear; von Karman; Carregamento Explosivo; Runge-Kutta.

## ABSTRACT

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Dynamic analysis of plates submitted to blast load*. 2019. 164f. Master's thesis (Master of Science in Civil Engineering) - Engineering Faculty, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2019.

The behavior of civil engineering structures under blast loads has been studied quite frequently in the last years and much effort has been made to create idealized blast wave curves and predict the corresponding response of structural and protective elements. The blast phenomenon results in an abrupt overpressure wave followed by an underpressure wave, the last being usually disregarded in most structural analyses. However, recent studies show that this suction phase is of paramount importance since it may lead to substantially higher displacements and stresses. In the case of high-intensity pressure waves, structural elements may experience large displacements, thus requiring second-order effects to be included in the analysis. This work investigates the nonlinear dynamic behavior of thin rectangular plates subjected to explosive charges. The problem was modeled as a nonlinear single degree of freedom system by applying von Karman's theory for large deflections to simply supported and clamped plate configurations. A uniform pressure load simulates the overpressure and underpressure waves by employing the Friedlander equation and a cubic approximation, respectively. Runge-Kutta method was used to solve the equation of motion for displacement amplitude. Numerical solutions for displacements and stresses were derived for several plate geometry configurations and blast loads, making it possible to measure the influence of the suction pressure and the membrane effect on the plate response.

Keywords: Plates; Dynamic Analysis; Nonlinear Analysis; von Karman; Blast loads; Runge-Kutta.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Plano médio e dimensões da placa .....	24
Figura 2 – Forças e momentos atuantes em um elemento de placa infinitesimal .....	29
Figura 3 – (a) Efeito de Membrana na estrutura; (b) Elemento infinitesimal submetido a esforços normais com efeito de membrana.....	31
Figura 4 - Comportamento da onda de explosão durante sua propagação. ....	37
Figura 5 - Gráfico de carga de pressão de uma onda de choque. ....	37
Figura 6 - Influência da taxa de decaimento .....	38
Figura 7 - Comportamento da reflexão de onda sobre uma superfície à 90° .....	39
Figura 8 - Relação das pressões de ondas com o tempo .....	40
Figura 9 - Relação das pressões de incidência e reflexão .....	40
Figura 10 – Parâmetros da carga explosiva hemisférica.....	42
Figura 11 – Parâmetros da carga explosiva esférica .....	42
Figura 12 – Fases positiva e negativa normalizadas, comparação entre métodos ...	45
Figura 13 - Erro relativo: Métodos da energia e Galerkin – Simplesmente apoiado, caso Livre de tensões .....	62
Figura 14 – Variação adimensional do comportamento do parâmetro $K_3$ : Comparação entre os métodos da energia e Galerkin – Simplesmente apoiado, caso Livre de tensões.....	62
Figura 15 - Comparação entre parâmetros $K_1$ e $K_3$ – Simplesmente Apoiado .....	66
Figura 16 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso livre de tensões.....	69
Figura 17 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso indeslocável.....	69
Figura 18 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso deslocável.....	69

Figura 19 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado (a) $\beta = 1$ ; (b) $\beta = 2$ .....	70
Figura 20 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Simplesmente apoiado: Caso Livre de tensões; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	733
Figura 21 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Simplesmente apoiado: Caso Indeslocável; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	76
Figura 22 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Simplesmente apoiado: Caso Deslocável; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	]79
Figura 23 - Relação entre $\sigma^{m_{ii}} / \sigma_{ii}$ x $w_{max} / h$ - Simplesmente apoiado: $\beta = 1$ .....	80
Figura 24 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Simplesmente apoiado: $\beta = 2$ ; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	81
Figura 25 - Comparação entre parâmetros $K_1$ e $K_3$ – Engastado.....	91
Figura 26 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso livre de tensões.....	94
Figura 27 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso indeslocável.....	95
Figura 28 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso deslocável.....	95
Figura 29 - Relação $w_{max} / h$ x Relação adimensional de carregamento estático - Engastado (a) $\beta = 1$ ; (b) $\beta = 2$ .....	96
Figura 30 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Engastado: Livre de tensões; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	99
Figura 31 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Engastado: Livre de tensões; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	102
Figura 32 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Engastado: Deslocável; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	104
Figura 33 - Relação entre $\sigma^{m_{ii}} / \sigma_{ii}$ x $w_{max} / h$ - Engastado: $\beta = 1$ .....	106
Figura 34 - Relação entre $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij}$ x $w_{max} / h$ - Engastado: $\beta = 2$ ; (a) $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b) $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ .....	106

Figura 35 – Características geométricas da placa .....	111
Figura 36 – Malha de 50 mm com elemento S4R .....	112
Figura 37 – Distribuição das tensões. (a) $\sigma_{xx}$ e (b) $\sigma_{yy}$ .....	112
Figura 38 - Relação impulso negativo com o impulso total .....	113
Figura 39 – Comportamento oscilatório para o caso simplesmente apoiado .....	114
Figura 40 – Comportamento oscilatório do sistema, $\beta = 1$ . (a) Comparação entre a utilização da Equação Cúbica com a sua não consideração; (b) Apresentação das fases para a consideração da fase negativa .....	116
Figura 41 – Relação $T_{NL} / T_L \times w_{max} / h$ .....	117
Figura 42 - Variação $w_L / w_{max}$ por $W_{TNT}$ (kg) e de $Z$ ( $m/kg^{1/3}$ ), caso livre de tensões e $\beta = 1$ .....	118
Figura 43 - Variação $w_L / w_{max}$ por $W_{TNT}$ (kg) e de $Z$ ( $m/kg^{1/3}$ ), caso indeslocável $\beta = 1$ .....	119
Figura 44 - Variação $w_L / w_{max}$ por $W_{TNT}$ (kg) e de $Z$ ( $m/kg^{1/3}$ ), caso deslocável e $\beta = 1$ .....	119
Figura 45 - Variação $w_{max} / h \times Z$ conforme $W_{TNT}$ , $\beta = 1$ .....	122
Figura 46 - Variação $w_{max} / h \times Z$ conforme $W_{TNT}$ , $\beta = 2$ .....	122
Figura 47 – Relação FAD e $t_d / T_L$ , $\beta = 1$ .....	123
Figura 48 – Relação FAD e $t_d / T_L$ , $\beta = 2$ .....	123
Figura 1 – Relação $T_{carga}$ e FFT da carga - indeslocável, $Z = 5 m/kg^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	125
Figura 50 – Relação $T_{carga}$ e FFT da carga - deslocável, $Z = 5 m/kg^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	126
Figura 51 – Relação $T_{carga}$ e FFT da carga - livre de tensões, $Z = 5 m/kg^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	127
Figura 52 – Relação $T_{carga}$ e FFT da carga - indeslocável, $Z = 34 m/kg^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	127

Figura 53 – Relação $T_{\text{carga}}$ e FFT da carga - deslocável, $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	127
Figura 54 – Relação $T_{\text{carga}}$ e FFT da carga – livre de tensões, $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$ e $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale.....	128
Figura 55 – Relação $w_L / w_{\text{max}} \times W_{\text{TNT}}$ , $Z = 5 \text{ m / kg}^{1/3}$ , $\beta = 1$ .....	128
Figura 56 – Relação $w_L / w_{\text{max}} \times W_{\text{TNT}}$ , $Z = 5 \text{ m / kg}^{1/3}$ , $\beta = 2$ .....	128
Figura 57 – Relação $w_L / w_{\text{max}} \times W_{\text{TNT}}$ , $Z = 34 \text{ m / kg}^{1/3}$ , $\beta = 1$ .....	129
Figura 58 – Relação $w_L / w_{\text{max}} \times W_{\text{TNT}}$ , $Z = 34 \text{ m / kg}^{1/3}$ , $\beta = 2$ .....	129
Figura B.1 - Par de forças concentradas no plano médio da placa .....	144

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Elementos químicos com capacidade explosiva .....	36
Tabela 2 - Características de explosão esférica.....	47
Tabela 3 - Especificações das condições de tensões da membrana .....	52
Tabela 4 - Coeficientes dos casos de condições de tensão da membrana.....	58
Tabela 5 - Parâmetros $K_1$ e $K_3$ .....	65
Tabela 6 - Coeficientes dos casos de condições de contorno engastado .....	86
Tabela 7 - Parâmetros $K_1$ e $K_3$ – Apoio Engastado .....	89
Tabela 8 - Relação parâmetros para análise dinâmica .....	111
Tabela 9 - Resultados de deslocamentos e tensões obtidos analiticamente e numericamente.....	112

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

### Simbologia Minúscula

$a$	Comprimento da placa na direção do eixo $x$
$a_n, a_n^*, a_0, b_n$	Constantes da série de Fourier
$a'$	Coefficiente que descreve a taxa de decaimento do comportamento pressão-tempo
$b$	Comprimento da placa na direção do eixo $y$
$b_i$	Força de corpo por unidade de volume atuando na direção do eixo $i$
$f_n(y)$	Equação função de $y$
$g_n(x)$	Equação função de $x$
$h$	Espessura da placa
$i_d$	Impulso da pressão de fase positiva
$i_d^-$	Impulso da pressão de fase negativa
$k$	Função de condições iniciais da integral elíptica de Jacob
$k^+$	Relação adimensional entre impulso, pressão e tempo positivos
$k^-$	Relação adimensional entre impulso, pressão e tempo negativos
$m$	Massa por unidade de área da estrutura
$p_i$	Carregamento distribuído sobre a estrutura na direção do eixo $i$
$p_{\max}$	Pico de sobrepressão positiva
$p_{\min}$	Pico de sobrepressão negativa
$p_{mn}$	Constante dependente da série de Fourier
$p^m$	Resultante das forças referentes aos esforços de membrana na placa
$p'_x, p'_y$	Coefficientes adimensionais da solução homogênea da função de Airy
$r_i$	Razão entre as parcelas de tensões provenientes do esforço da membrana com relação às tensões totais no centro da placa
$t$	Tempo
$t_d$	Tempo de duração da fase positiva da carga dinâmica

$t_d^-$	Tempo de duração da fase negativa da carga dinâmica
$u_i$	Deslocamento na direção do eixo $i$
$w$	Função deslocamento vertical da placa
$w_{est}$	Deslocamento vertical estático da placa
$w_L$	Deslocamento vertical dinâmico proveniente do efeito de flexão da placa
$w_{max}$	Deslocamento vertical dinâmico máximo da placa

### Simbologia Maiúscula

$A_{iv}$	Amplitude de reação da estrutura livre de carregamento
$A_n, B_n$	Coefficientes da solução homogênea da função de Airy
$A_{neg}$	Amplitude da estrutura proveniente da fase negativa da explosão
$A_{pos}$	Amplitude da estrutura proveniente da fase positiva da explosão
$A_0$	Coefficiente integrais elípticas de Jacob
$A(t)$	Amplitude da estrutura proveniente da carga dinâmica
$C_i$	Constante auxiliar de cálculo ( $i \in \mathbb{N}$ )
$Cn$	Cosseno elíptico de Jacob
$\text{CH}_3\text{NO}_2$	Nitrometano
$\text{C}_3\text{H}_5\text{N}_3\text{O}_9$	Trinitrato de glicerina
$\text{C}_8\text{H}_7\text{N}_3\text{O}_6$	2, 4, 6 – Trinitro-m-Xylene
$\text{C}_{10}\text{H}_{16}\text{N}_6\text{O}_{19}$	Hexanittrato de Dipentaerythriol
$D$	Rigidez à flexão da placa
$Dn$	Delta elíptico de Jacob
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$F$	Carga pontual
FFT	Função transformada de Fourier
$F(t)$	Carregamento dinâmico
$H(t)$	Função auxiliar de cálculo para resolução do método de <i>Runge-Kutta</i>
$K$	Energia cinética da estrutura
$K_1$	Coefficiente linear relacionado ao esforço de flexão
$K_3$	Coefficiente não linear relacionado ao esforço da membrana

$L$	Operador diferencial
$M_{ij}$	Momento fletor da estrutura no plano perpendicular ao eixo $j$ na direção do eixo $i$
$N_{ij}$	Força normal da estrutura no plano perpendicular ao eixo $i$ na direção do eixo $j$
$N_6Pb$	Bleiazida
$P_i$	Resultante das forças atuantes na direção do eixo $i$
$P(t)$	Equação do carregamento dinâmico de explosão
$Q_i$	Força cisalhante na placa por unidade de comprimento com relação ao eixo perpendicular a $i$ , pertencente ao plano $iz$
$R$	Distância do alvo com relação à fonte explosiva
$Sn$	Seno elíptico de Jacob
TNT	Trinitrotolueno
$U$	Energia de deformação da estrutura
$U_b$	Energia de deformação à flexão
$U_m$	Energia de deformação da membrana
$W$	Trabalho externo aplicado na estrutura
$W_{TNT}$	Massa de TNT
$Z$	Distância em escala de Hopkinson

### Simbologia Grega

$\alpha, \delta, \gamma$	Constantes auxiliar de cálculo
$\Omega, \Psi, \Theta$	Constantes auxiliar de cálculo
$\beta$	Relação entre as dimensões no plano da placa
$\varepsilon_{ij}$	Deformação no plano perpendicular ao eixo $i$ na direção do eixo $j$
$\varepsilon_{ij}^b$	Parcela de deformações devido à flexão da placa
$\varepsilon_{ij}^m$	Parcela de deformações devido ao efeito de membrana da placa, incluindo o acoplamento dos deslocamentos transversais e axiais.
$\varepsilon_p, \varepsilon_q$	Constante referente à solução homogênea da função de Airy

$\phi$	Função de Airy
$\phi_0$	Solução homogênea da função de Airy
$\phi_1$	Solução particular da função de Airy
$\eta, \xi, \bar{\xi}$	Funções auxiliares de cálculo
$\Phi_{p,q}$	Coefficiente da série de Fourier para a solução da função de Airy
$\varphi_{p,q}$	Coefficiente da série de Fourier para a solução particular da função de Airy
$\varphi'_{p,q}$	Coefficiente da série de Fourier para a solução homogênea da função de Airy
$\lambda, \lambda_i, \mu$	Coefficientes participante da integral elíptica de Jacob
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Massa específica do material
$\sigma_{ij}$	Tensões no plano perpendicular ao eixo $i$ na direção do eixo $j$
$\sigma_{ij}^b$	Parcela de tensões devido à flexão da placa
$\sigma_{ij}^m$	Parcela de tensões devido ao efeito da membrana
$\omega$	Frequência
$\psi$	Coefficiente trigonométrico do deslocamento da placa
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\nabla^4$	Operador bi-harmônico

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>1. TEORIA DE PLACAS DE VON KARMAN</b> .....	24
1.1. Relação Deformação - Deslocamento .....	25
1.2. Relação Tensão - Deformação .....	27
1.3. Equação Diferencial da Placa .....	28
1.3.1. <i>Efeito das forças de membrana</i> .....	31
<b>2. CARGA EXPLOSIVA</b> .....	35
2.1. Definição de Explosão .....	35
2.2. Formação das Ondas de Choque .....	36
2.3. Reflexão das Ondas de Choque .....	39
2.4. Equação da Carga Dinâmica .....	45
<b>3. ANÁLISE DINÂMICA DAS PLACAS</b> .....	48
3.1. Condição de Contorno: Simplesmente apoiado em todas as arestas .....	48
3.1.1. <i>Funções de Airy</i> .....	48
3.1.2. <i>Parâmetros <math>K_1</math> e <math>K_3</math></i> .....	58
3.1.4. <i>Deslocamentos Estáticos</i> .....	67
3.1.3. <i>Tensões de Airy</i> .....	70
3.2. Condição de Contorno: Engastado em todas as arestas .....	81
3.2.1. <i>Funções de Airy</i> .....	81
3.2.2. <i>Parâmetros <math>K_1</math> e <math>K_3</math></i> .....	86
3.2.3. <i>Deslocamentos Estáticos</i> .....	92
3.2.4. <i>Tensões de Airy</i> .....	96
3.3. Solução das Equações Diferenciais .....	107
<b>4. RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	110
<b>CONCLUSÕES</b> .....	131
Sugestões para trabalhos futuros .....	132
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	134
<b>APÊNDICE A</b> .....	137
<b>APÊNDICE B</b> .....	144
<b>APÊNDICE C</b> .....	150
<b>APÊNDICE D</b> .....	162

## INTRODUÇÃO

A busca por critérios e métodos para avaliar o comportamento do fenômeno explosivo vêm sendo intensificada após inúmeros eventos provenientes de explosões intencionais em diversas localidades do mundo. Estes acontecimentos podem acarretar grandes perdas em estruturas de Engenharia Civil, quando estas não estão dimensionadas para tal ocorrência. Desta forma, torna-se necessário conhecer as características e mecanismos de dano das ondas de choque para que, finalmente, possa apresentar o melhor projeto e planejamento construtivo para desastres como tais (KINNEY e GRAHAM, 1985).

O fenômeno da explosão corresponde a uma liberação de energia brusca proveniente do processo de reações ligadas aos componentes presentes em um dado corpo. Este mecanismo pode ser caracterizado como explosões acidentais como por exemplo pólvora, gases pressurizados, vapor presente em uma caldeira, reações nucleares descontroladas, ou intencionais, como lançamento de míssil ou de veículo espacial (KINNEY e GRAHAM, 1985).

Os primeiros estudos realizados com relação às explosões são contemplados por Friedlander (1940), onde o mesmo demonstrou a formulação que corresponde à fase positiva de tal fenômeno. Conhecida como Equação de Friedlander, esta é utilizada até os dias atuais para descrever o comportamento pressão x tempo de uma onda de choque.

Uma grande contribuição ao estudo de cargas explosivas foi dada por Granström (1956), onde foi observado que dois tipos de explosões podem ocorrer: esféricas e semiesféricas. Em seu trabalho, são apresentados resultados quanto às análises realizadas para explosões esféricas. Contudo, o destaque maior é dado para a formulação da fase negativa de uma onda de choque, onde foi concebida a equação cúbica. Observa-se a preocupação com a definição das condições e características da carga de explosão, calibrando ábacos que correlacionam propriedades da carga (massa e distância ao anteparo indicado), com relação às pressões máximas e mínimas geradas, impulso, duração da carga e velocidade da onda de choque. Além disso, o referido autor apresenta a variação da força compressiva com o tempo, a qual corresponde a um coeficiente que correlaciona a pressão, tempo transcorrido e

impulso da onda. Este processo torna-se importante para determinar os limites dentro dos quais a expressão cúbica é válida.

Visto que o estudo do fenômeno de explosões tornou-se um tema de suma importância para a Engenharia Civil, KINNEY & GRAHAM (1985) e NEEDHAM (2010) contemplam em suas publicações um estudo aprofundado com relação ao fenômeno, tornando ambas as referências bastante conhecidas como referencial teórico no que é respeito ao referido tema. É possível observar informações a respeito do comportamento de onda gerado, suas características físicas e químicas e as do ambiente em que se encontra, tipos de choque na frente de onda, interação onda-estrutura, dinâmica das ondas explosivas e respostas das estruturas, sendo contempladas as fases positiva e negativa.

Paralelamente, com base nos estudos realizados por Granström (1956) e avaliando que as fases negativas das ondas de choque tornam-se de grande importância para o comportamento da estrutura, entre os anos da década de 1950 até 2010, outras formulações a respeito da região negativa da explosão foram surgindo. Os mais conhecidos são a Fase Cúbica Negativa, desenvolvida por Granström (1956), LS – DYNA (1997), Gantes (2004) e Wei & Dharani (2004) com suas contribuições para o método Friedlander Estendido, Krauthmmer & Atenberg (2000) para o método da Aproximação Linear e Theich & Gebberken (2010) para o método Friedlander Estendido com Teich.

*US Department of Defense* (2008) apresenta uma nova versão do referido documento, onde aborda todas as características relacionadas ao comportamento das explosões, bem como as consequências das ondas de choque geradas. Apresenta-se como um manual bastante completo a respeito do comportamento do fenômeno de explosão, abordando as características quantitativas e qualitativas dos parâmetros necessários para as equações explosivas, notando-se uma ênfase na fase negativa. Verificam-se, ainda, ábacos que apresentam a relação entre as pressões, impulso, tempo de execução da onda com relação às características do objeto explosivo (massa e distância ao anteparo). Somado a isto, são contempladas ainda nas formulações estruturas de concreto e metálico submetido ao carregamento explosivo.

RIGBY (2014) reapresenta os ábacos anteriormente contemplados pelo *US Department of Defense* (2008) com as unidades transformadas para o sistema internacional. Além disso, para as análises referentes ao fenômeno, o autor apresenta

o equacionamento das curvas presentes nos ábacos, facilitando assim a determinação dos parâmetros para as equações de explosão. Ainda o mesmo autor, em outra publicação, RIGBY (2013), realiza estudos a respeito do comportamento das várias formulações realizadas a respeito da fase negativa de uma onda explosiva, conforme abordadas acima. As equações são reunidas e comparadas com um comportamento real de explosão. Com isso, o autor aponta qual das formulações é a que melhor descreve uma onda de choque, com base em seus ensaios experimentais e ainda ressaltando a importância de sua consideração para o estudo em dinâmica estrutural.

Para um estudo relacionado à estrutura, algumas definições com relação à mesma para resistirem ao efeito explosivo são abordadas. De forma que os estragos causados por explosivos sejam catastróficos, estes podem ser estocados em estruturas de proteção, que podem ser classificadas como abrigos, barreiras ou estruturas de contenção. Os abrigos são característicos por fornecerem proteção envolvendo o corpo explosivo totalmente, evitando com que agentes externos (pressão ou fragmentos gerados de outra explosão) o atinjam (*US Department of Defense, 2008*).

Estruturas de contenção correspondem a edificações que confinam o elemento explosivo. Por outro lado, estruturas de barreiras funcionam como um anteparo que impede a propagação das ondas de choque do corpo explosivo a um determinado alvo, atenuando a pressão para um nível tolerável. São normalmente aplicáveis a operações que possuem alto risco, envolvendo materiais tóxicos. As paredes e a laje de cobertura são os principais elementos estruturais de proteção. Estes componentes são considerados enrijecidos quando são projetados para resistirem a todos os efeitos consequentes de uma explosão, como a pressão de choque, fragmentos e comportamento dinâmico que a estrutura venha a ter (*US Department of Defense, 2008*).

As barreiras podem ser barricadas, paredes simples ou estruturas semelhantes que são compostas de materiais mais frágeis, apenas com o intuito de retardar a propagação das ondas de choque. Vale ressaltar que muitas vezes os explosivos são postos próximos às barreiras, sendo estas submetidas a pressões de alta intensidade (*US Department of Defense, 2008*).

Desta forma, avaliando-se que algumas estruturas de proteção podem ser consideradas como placas, um estudo referente a este elemento deve ser realizado. Observa-se que um elemento de placa submetido a uma carga explosiva pode ser solicitado à grandes pressões, resultando em grandes deslocamentos. Desta forma, a não linearidade geométrica torna-se imprescindível para a formulação da dinâmica da estrutura.

Com relação à formulação da estrutura, segundo (SZILARD, 2004), Euler foi o primeiro matemático a estudar o efeito de membrana nas placas, solucionando problemas diversos a partir dos conceitos de sistemas de cordas esticadas e perpendiculares entre si. Seguidamente, E. F. F. Chaladni apresentou em seus livros de acústica diversos experimentos que retratassem os modos de vibração desse mesmo tipo de estrutura, sendo realizadas com polvilho sobre placas e aplicando determinada frequência nas mesmas. Para cada uma destas, era observado que o material granular se redistribuía sobre a superfície, apresentando um modo de vibração (SZILARD, 2004).

VON KARMAN (1910) escreveu as equações relacionadas aos grandes deslocamentos em seu livro. Nas equações relacionadas às placas, o autor consegue associar os deslocamentos referentes ao efeito da placa com os da membrana, resultando em equações mais adequadas para tratar o comportamento de grandes deslocamentos.

Galerkin apresenta o método desenvolvido juntamente com I. G. Bubnov, porém conhecido somente como método de Galerkin. Este método é mundialmente conhecido pelas suas aplicações em equações diferenciais, mecânica, termodinâmica, hidrodinâmica e dentre outros. Porém, deve-se dar uma ênfase com relação à teoria das placas (objetivo desta dissertação) pelo fato de que, com base nas equações de von Karman e numa aproximação trigonométrica para o comportamento de uma estrutura desse tipo, a partir do método de Galerkin é possível obter a equação do movimento dinâmico das placas.

DUFFING (1918) apresenta a equação não linear de vibrações forçadas, onde a solicitação é representada por uma função senóide. Essas equações diferenciais foram concebidas para casos de amortecimento de pêndulos, sendo posteriormente expandida e aplicada em soluções estruturais e circuitos elétricos. Além disso, a

equação de Duffing subsequentemente foi desenvolvida e adaptada para casos de vibração livre, sendo sua solução obtida com a utilização de funções elípticas.

YAMAKI (1957) propõe uma formulação analítica que contemple a solução homogênea da expressão de Airy para placas submetidas a um par de forças concentradas no plano da mesma. Posteriormente, em 1961, o mesmo apresenta a dedução das equações de dinâmica das placas esbeltas (com base nas Equações de Duffing), contemplando o comportamento de membrana, considerando-se 6 tipos de condições de apoio (indeslocável, deslocável e livre de tensões para os casos simplesmente apoiado e engastado). Tais equações tem por base os métodos da série de Fourier e de Galerkin, além de apresentar as deduções de comportamento da membrana com base na equação diferencial de tensão de Airy, observando que este tipo de comportamento se torna mais complexo do que o esperado. Ainda assim, são demonstrados o comportamento dos períodos lineares e não lineares referentes à vibração livre da estrutura, utilizando-se por base o conceito de funções elípticas de Jacob.

GUPTA (1987) apresentou o tema de cargas explosivas em estruturas de placas esbeltas. O problema analítico é contemplado de acordo com as solicitações da carga dinâmica, considerando somente a fase positiva do carregamento explosivo. Com relação à formulação da placa, esta é considerada com base nos esforços de flexão da estrutura, constituindo assim um sistema com linearidade geométrica. O autor observou o comportamento dinâmico da placa considerando o sistema como um grau de liberdade e comparou os resultados de deslocamentos com um modelo de elementos finitos.

FELDGUN *et al* (2016), baseado no conceito de grandes deslocamentos em placas e ondas de choque provenientes da explosão como esforço solicitante, apresenta em sua publicação a formulação analítica de uma estrutura de placa retangular com efeito de membrana submetida à carga de explosão de pressão positiva. Em sua pesquisa, são obtidos deslocamentos e tensões do centro da estrutura, além da comparação das respostas analíticas com modelos de elementos finitos e um ensaio experimental executado por um outro autor de sua referência.

Observando o desenvolvimento nos estudos realizados pelos autores supracitados, o objetivo deste trabalho consta em apresentar a formulação analítica de placas submetidas ao carregamento explosivo, contemplado pelas expressões de

pressões positivas e negativas. A estrutura de placa considerada possui características físicas homogêneas lineares (aço linear elástico) e duas condições de apoios principais: simplesmente apoiado e engastado, em todas as faces. Nestas considerações de condição de contorno, analisa-se para cada uma as especificações de não linearidade geométrica (efeito de membrana), caracterizada por condições de tensão livre de tensões, indeslocáveis e deslocável. Para isso, é utilizada a formulação dinâmica de placas, apresentada por YAMAKI (1961). Neste processo, considera-se a teoria de membrana abordada, que tem por base as caracterizações de cada tipo de condição de contorno (livre de tensões, indeslocável e deslocável para apoio simples e engaste), utilizando-se do conceito de tensões de Airy. Finalmente, caracterizando a não linearidade geométrica da estrutura, utiliza-se do conceito de grandes deslocamentos desenvolvido por von Karman (1910), onde aborda-se a teoria da membrana. Para a solução das equações diferenciais, é utilizado o método numérico de Runge-Kutta.

Contudo, é válido ressaltar que, apesar das expressões terem sido desenvolvidas para as condições de apoio simples e engaste, os resultados apresentados neste trabalho é de apenas simplesmente apoiado, visto que o processo de análise para o engaste seria o mesmo e tornaria o trabalho extenso.

## **Motivação**

Verificando que as ocorrências de explosões, tanto intencionais quanto acidentais, vêm aumentando nos últimos anos, torna-se a motivação deste trabalho auxiliar aos profissionais de engenharia estrutural a verificar e avaliar o comportamento de sistemas estruturais de lajes (elementos de placa) submetidas a esse tipo de carregamento.

## **Objetivos Gerais**

Este trabalho tem por objetivo apresentar o comportamento dinâmico de estruturas de placas, considerando o efeito de membrana, quando submetidas a

cargas explosivas, avaliando o desempenho da mesma em relação a deslocamentos totais, examinados no centro da estrutura.

Os elementos utilizados para este trabalho são considerados como placas finas, com base no comportamento de placas de Kirchhoff. Além disso, verificando que o fenômeno da explosão ocorre em um determinado período de tempo, o sistema é embasado na teoria dinâmica de placas. Ainda, avaliando que a substância ainda pode ser de alta ordem explosiva, a placa fica submetida a uma grande pressão. Desta forma, a teoria de von Karman, considerada para grandes deslocamentos, é de suma importância para determinar a relação da amplitude gerada com relação à espessura da placa.

### **Objetivos Específicos**

Este trabalho tem por objetivos específicos:

- Desenvolvimento de expressões para o carregamento explosivo, com base nos ábacos apresentados por Rigby (2013), utilizando um *software* digitalizador;
- Desenvolvimento e verificação das expressões de placa quanto ao comportamento de flexão e quanto à flexão com o efeito de membrana;
- Solução das equações diferenciais resultantes pela implementação do método de Runge-Kutta;
- Apresentação e análise do comportamento da estrutura com a variação dos seguintes parâmetros: razão entre a maior e menor dimensão ( $\beta$ ), espessura da placa ( $h$ ), massa de TNT ( $W_{TNT}$ ) e distância escalar ( $Z$ ).

### **Estrutura do Trabalho**

Neste capítulo introdutório, foram apresentadas as considerações sobre os tipos de explosivos, suas consequências e os 3 tipos estruturais que são comumente usados para minimizar os efeitos das ondas de choque provenientes da explosão. Estes processos são abordados detalhadamente em *US Department of Defense* (2008). É apresentada também a evolução dos estudos de placas, com efeitos

lineares e não lineares, paralelamente ao estudo de cargas explosivas, até chegar aos dias atuais.

O Capítulo 1 apresenta a formulação para as placas de Kirchhoff com base na teoria de von Karman, ou seja, para grandes deslocamentos.

O Capítulo 2 retrata, de forma mais detalhada, as características de explosões, efeitos na estrutura e o equacionamento da mesma, de forma a considerar este fenômeno analiticamente.

O Capítulo 3 aborda a respeito do comportamento dinâmico das placas, ou seja, apresentação das equações diferenciais com efeito não linear com base nas equações de pressão encontradas para as cargas explosivas.

O Capítulo 4 expõe os resultados encontrados com base no comportamento dinâmico das placas e com base nas equações de pressão de explosivos, para o caso simplesmente apoiado. A avaliação tem por base o deslocamento no centro da estrutura. Além disso, é de importância verificar que todo o processo de geração de resultados, bem como o desenvolvimento dos mesmos, é concebido com base no *software* algébrico wxMaxima.

O último capítulo apresenta as conclusões obtidas, avaliadas com base no comportamento da estrutura quanto ao seu deslocamento e quanto às características físicas do explosivo.

## 1. TEORIA DE PLACAS DE VON KARMAN

A formulação apresentada a seguir aplica-se a placas finas ou delgadas, que são estruturas caracterizadas por um plano de superfície com espessura  $h$ , sendo a dimensão da espessura muito menor que as outras duas dimensões. Neste trabalho, considera-se uma placa fina de material homogêneo, isotrópico e linear elástico, com espessura  $h$  constante, dimensões  $a$  e  $b$  (nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente) e com um plano médio definido em  $z = 0$  (Figura 1).

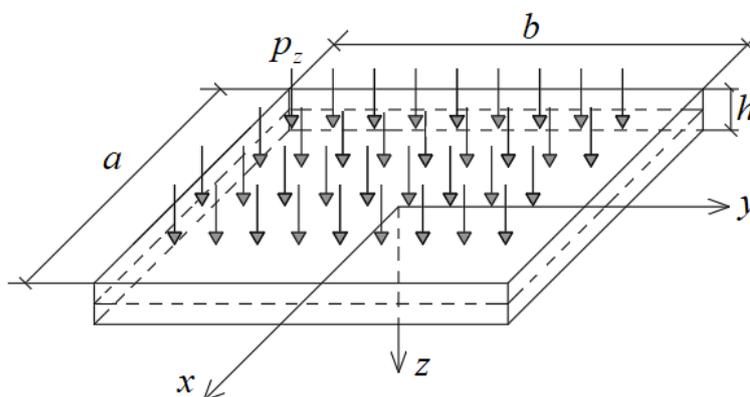


Figura 2 - Plano médio e dimensões da placa

As solicitações usuais atuantes na superfície de uma placa correspondem a cargas perpendiculares ao plano  $xy$ , distribuídas e concentradas. Com relação aos bordos, a placa pode estar submetida a forças normais de tração ou compressão, momentos de flexão e forças cortantes. O desenvolvimento das equações neste trabalho considera um carregamento uniformemente distribuído  $p_z$  (Figura 1), gerando esforços de flexão que provocam a curvatura e o deslocamento  $u_i(x, y, z)$  do plano médio, onde  $i$  representa as direções coordenadas (JAREK, 2007).

A depender do carregamento aplicado, os deslocamentos resultantes são pequenos (da ordem de  $u_z < 0,1h$ ) e, portanto, a não linearidade geométrica do problema pode ser desprezada, ou seja, pode-se empregar a teoria linear de placas (NISHAWALA, 2011). Contudo, há situações em que os deslocamentos resultantes podem ser relativamente grandes ( $u_z > 0,1h$ ), deformando significativamente a superfície média da placa. Nesses casos, a não linearidade geométrica não pode ser ignorada, sendo então utilizadas formulações que incorporam esse comportamento não-linear, em particular, a teoria de placas de von Karman (NISHAWALA, 2011).

A teoria de placas de von Karman é formulada em termos dos deslocamentos  $u_i(x, y)$  da superfície média da placa. O método de solução é muito similar ao da teoria linear de placas, em que o campo de deslocamentos é obtido conforme as condições de contorno. Contudo, a particularidade da não linearidade é inserida nas relações deformação-deslocamento por conta do efeito de membrana e o procedimento de cálculo de tensões pela lei de Hooke, visto que é mantido as características de material elástico linear (NISHAWALA, 2011).

### 1.1. Relação Deformação - Deslocamento

Para o caso de pequenos deslocamentos e rotações, os gradientes dos deslocamentos são considerados muito pequenos e, portanto, os termos não lineares podem ser desprezados, ou seja:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \ll \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad \text{onde } i, j, k, l = x, y \quad (1)$$

Já para situações em que grandes deslocamentos e rotações moderadas devem ser analisados, os gradientes dos deslocamentos são significativos, resultando em termos não lineares de ordem de grandeza similar aos dos próprios gradientes de deformação:

$$\frac{\partial u_z}{\partial x_i} \frac{\partial u_z}{\partial x_j} \approx O\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{onde } i, j = x, y \quad (2)$$

Assim, as relações deformação-deslocamento a serem consideradas para grandes deslocamentos contemplam os termos lineares, comuns ao caso de pequenos deslocamentos, e adicionam termos quadráticos, inerentes à formulação não linear geométrica do problema (NISHAWALA, 2011), resultando nas seguintes equações quando aplicadas ao problema de placa fina:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

Onde:

$\varepsilon_{ij}$  Deformação no plano perpendicular ao eixo  $i$  na direção do eixo  $j$

As demais componentes de deformação não mencionadas são consideradas nulas.

Observa-se que nas Equações (3) à (5) constam as parcelas de deformações devido ao comportamento de flexão, ao comportamento de membrana e ao acoplamento dos deslocamentos transversais e axiais do plano médio da placa. Sendo assim, as Equações (3) à (5) podem ser reescritas como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^b + \varepsilon_{ij}^m \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx}^b = -z \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{yy}^b = -z \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{xy}^b = -z \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xx}^m = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

$$\varepsilon_{yy}^m = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xy}^m = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (12)$$

Onde:

$\varepsilon_{ij}^b$  Parcela de deformações devido à flexão da placa

$\varepsilon_{ij}^m$  Parcela de deformações devido ao efeito de membrana da placa, incluindo o acoplamento dos deslocamentos transversais e axiais

## 1.2. Relação Tensão - Deformação

Considerando-se a relação tensão-deformação aplicada para o problema de placas finas, resulta nas seguintes componentes de tensões:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \quad (14)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \quad (15)$$

Onde:

$\sigma_{ij}$  Tensões no plano perpendicular ao eixo  $i$  na direção do eixo  $j$

$E$  Módulo de elasticidade longitudinal

$\nu$  Coeficiente de Poisson

Aplicando as Equações (3) à (5) nas Equações (13) à (15), tem-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^m \quad (16)$$

$$\sigma_{xx}^b = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

$$\sigma_{yy}^b = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (18)$$

$$\sigma_{xy}^b = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

$$\sigma_{xx}^m = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \quad (20)$$

$$\sigma_{yy}^m = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \quad (21)$$

$$\sigma_{xy}^m = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \quad (22)$$

Onde:

$\sigma_{ij}^b$  Parcela de tensões devido à flexão da placa

$\sigma_{ij}^m$  Parcela de tensões devido ao efeito da membrana

Nessas equações, as parcelas de tensões  $\sigma_{ij}^b$  e  $\sigma_{ij}^m$  são obtidas aplicando as expressões de deformação  $\varepsilon_{ij}^b$  e  $\varepsilon_{ij}^m$  separadamente nas relações constitutivas apresentadas nas Equações (12) à (15).

### 1.3. Equação Diferencial da Placa

A equação diferencial da placa é derivada do equilíbrio das forças e dos momentos atuantes num elemento infinitesimal de placa de comprimentos  $dx$  e  $dy$ , conforme apresenta a Figura 3, submetido a um carregamento transversal uniformemente distribuído  $p_z$ .

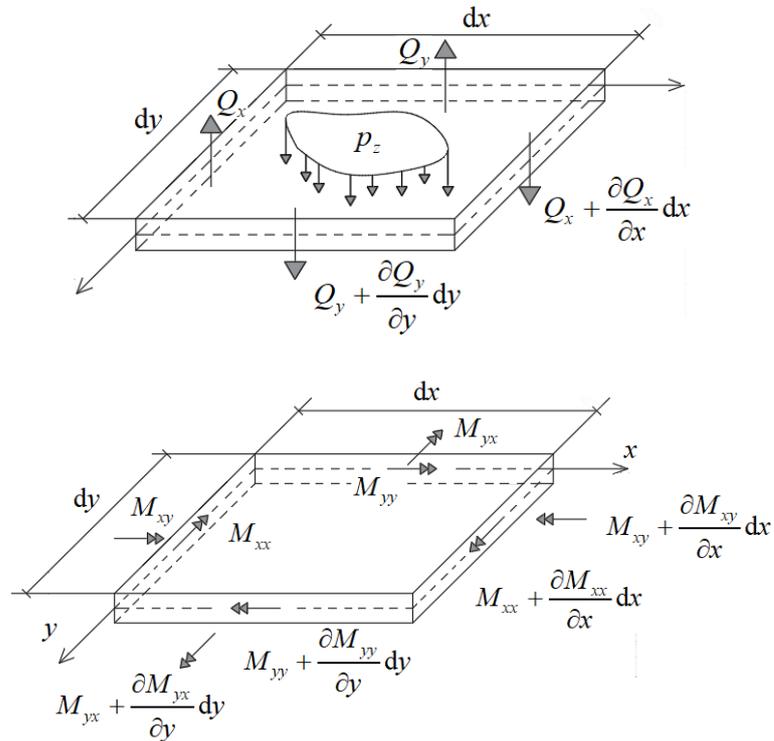


Figura 3 – Forças e momentos atuantes em um elemento de placa infinitesimal

Fonte: NISHAWALA (2011), adaptado

A Figura 2 ilustra as forças cortantes ( $Q_x$  e  $Q_y$ ) e os momentos fletores ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ ) atuantes no elemento infinitesimal da placa. Nessa etapa, por simplicidade, as forças de membrana ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  e  $N_{yx}$ ) não são incluídas explicitamente na dedução, mas são consideradas por meio de uma carga distribuída  $p^m$ , resultante das forças de membrana geradas pela deflexão da placa, que será deduzida posteriormente neste trabalho.

Aplicando o equilíbrio de forças na direção  $z$  e equilíbrio de momentos nas direções  $x$  e  $y$  chega-se a:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z(x, y, t) + p^m(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (25)$$

Onde:

$\rho$  Massa específica do material

$t$  Tempo

Substituindo as Equações (24) e (25) na Equação (23) e considerando que

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \text{ tem-se:}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + p_z(x, y, t) + p^m(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (26)$$

Os momentos fletores ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  e  $M_{xy}$ ) podem ser determinados por:

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (28)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (29)$$

Em que o parâmetro  $D$  refere-se à rigidez de flexão da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (30)$$

Aplicando as equações apresentadas acima na Equação (26) obtém-se:

$$D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) + p^m(x, y, t) \quad (31)$$

Essa equação pode ser reescrita utilizando o operador bi harmônico:

$$D \nabla^4 u_z + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) + p^m(x, y, t) \quad (32)$$

### 1.3.1. Efeito das forças de membrana

Nessa etapa, deduz-se uma expressão para a carga distribuída  $p^m$  a partir do equilíbrio da projeção das forças de membrana ( $N_{xx}$ ,  $N_{yx}$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{yy}$ ) atuantes na placa, como ilustra a Figura 4 (a). Para cada força de membrana, calcula-se sua projeção na direção z, que somadas totalizam a carga distribuída  $p^m$ .

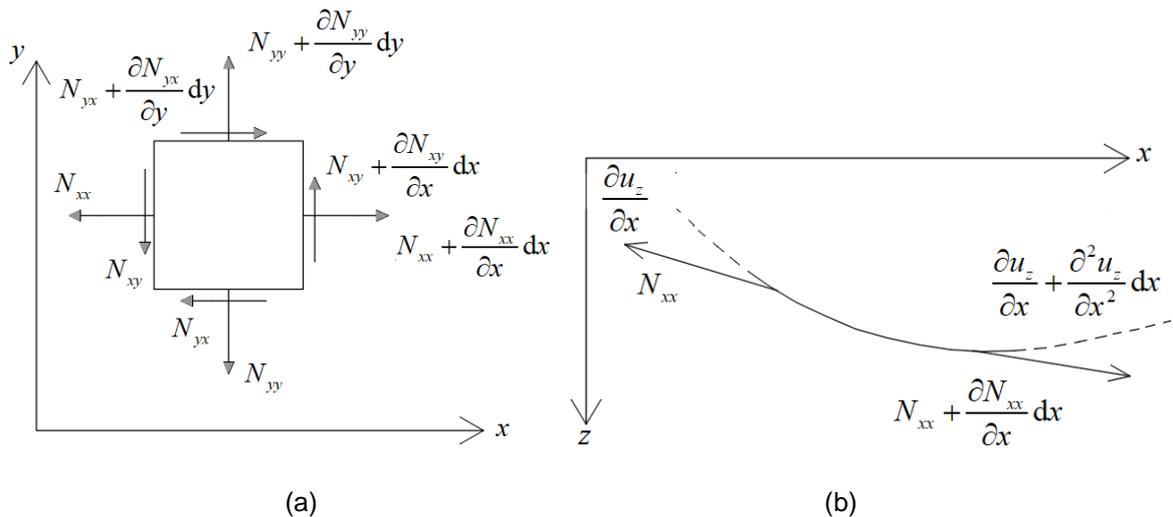


Figura 4 – (a) Efeito de Membrana na estrutura; (b) Elemento infinitesimal submetido a esforços normais com efeito de membrana.

Fonte: NISHAWALA (2011), adaptado

Para a força de membrana  $N_{xx}$ , projeção na direção z, ilustrada na Figura 3 (b), pode ser obtida por:

$$-N_{xx} \frac{\partial u_z}{\partial x} dy + \left( N_{xx} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx \right) dy = 0 \quad (33)$$

Desprezando os termos de ordem  $(dx^2dy)$ , simplifica-se a expressão acima:

$$N_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} dx dy = 0 \quad (34)$$

O mesmo procedimento é realizado para as forças  $N_{yy}$  e  $N_{xy}=N_{yx}$ , resultando nas seguintes projeções na direção z:

$$N_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} dx dy = 0 \quad (35)$$

$$N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial y} dx dy = 0 \quad (36)$$

Soma-se todas as projeções em z dadas pelas Equações (34) à (36):

$$p^m(x, y, t) dx dy = dx dy \left[ \begin{aligned} & 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \left( \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial u_z}{\partial x} \left( \frac{\partial N_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \left( N_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right] \quad (37)$$

No entanto, a partir do equilíbrio das forças de membrana atuantes nas direções x e y, ilustradas na Figura 4 (b), obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

Aplicando as equações acima, pode-se reescrever a expressão da carga distribuída  $p^m$  obtida na Equação (37) como:

$$p^m(x, y, t) dx dy = 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy + \left( N_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (40)$$

Empregando a Equação (40) na Equação (31), chega-se a:

$$D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) + 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (41)$$

As forças de membrana são formuladas em termos de tensões por:

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \sigma_{xx} h \quad (42)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = \sigma_{yy} h \quad (43)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \sigma_{xy} h \quad (44)$$

Considerando as Equações (42) à (44), a Equação (41) é reescrita como:

$$D\nabla^4 u_z + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) + 2h\sigma_{xy}^m \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + h\sigma_{xx}^m \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + h\sigma_{yy}^m \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (45)$$

Observa-se que na Equação (45) são utilizadas as tensões provenientes do esforço da membrana, visto que as tensões de flexão são já calculadas com base nas Equações (17) à (19). Considere que as tensões podem ser expressas com base na função de Airy, dada por  $\phi$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (46)$$

Então, aplicando essas relações na Equação (45), obtém-se a primeira equação de von Karman:

$$L(u_z, \phi) \Rightarrow D\nabla^4 u_z + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - h \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right) = p_z(x, y, t) \quad (47)$$

Onde:

$L$  Operador diferencial

A Equação (47) corresponde à teoria de placa com não linearidade geométrica derivada por von Karman. No entanto, para situações de grandes deslocamentos, os deslocamentos transversais podem gerar forças de membrana significativas, sendo então necessário relacionar a amplitude da deflexão transversal com as forças de membrana (NISHAWALA, 2011). Para esse fim, considera-se a equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (48)$$

Substituindo as Equações (3) à (5) na Equação (48) tem-se:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (49)$$

Considerando que o material é linear elástico, substituindo os termos de deformações e aplicando as relações da tensão de Airy presentes na Equação (46) na Equação (49), chega-se à segunda equação de von Karman:

$$\nabla^4 \phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right] \quad (50)$$

As Equações (47) e (50) constituem um sistema de equação diferenciais não lineares e correspondem às equações governantes de placas submetidas a um carregamento  $p_z(t)$  considerando grandes deslocamentos.

## 2. CARGA EXPLOSIVA

### 2.1. Definição de Explosão

O fenômeno da explosão é caracterizado por uma brusca liberação de energia, a partir de uma fonte explosiva, que modifica repentinamente o ambiente. Normalmente, as velocidades da frente de onda da explosão são supersônicas, acarretando uma abrupta variação de pressão do ambiente, seguindo-se pelo efeito de esmagamento da sobrepressão da explosão (KINNEY & GRAHAM, 1985; NEEDHAM, 2010; RIGBY, 2014).

Durante o instante que ocorre a combustão dos componentes, a explosão pode ser caracterizada por dois tipos, conforme a sua localização no ambiente: esférica e hemisférica. Na explosão do tipo esférica, um elemento é detonado quando suspenso no ar, sendo sua energia espalhada uniformemente por todo o ambiente. Já na explosão hemisférica, um elemento é detonado sobre uma superfície. Vale ressaltar que para a explosão esférica, apesar desta ocorrer suspensa no ambiente, a pressão proveniente pode entrar em contato com um determinado anteparo (RIGBY, 2014).

A dissipação da energia de explosão se dá normalmente por ondas de choque, ocasionadas pela variação de pressão do ambiente gerando frentes de ondas. Outras formas de dissipação podem ser ocasionadas, dependendo dos componentes químicos compostos pela fonte explosiva (NEEDHAM, 2010).

A magnitude da explosão está diretamente associada com a energia liberada e é geralmente relacionada com a medida padrão corresponde ao TNT (simétrica 2, 4, 6 - trinitrotolueno), por ser este um explosivo quimicamente puro e relativamente seguro para calibração. A energia proveniente de 1 TNT corresponde à 4610 Joules/grama, também conhecido como grama padrão TNT (KINNEY e GRAHAM, 1985).

É importante ressaltar que nem todas as explosões têm como origem química o TNT, mas sim correspondem a outros elementos químicos e/ou misturas que acarretam detonação. Desta forma, a energia liberada por estes outros elementos é convertida em TNT. A seguir, a Tabela 1 apresenta alguns dos elementos de alta

capacidade explosiva dos vários apresentados por KINNEY e GRAHAM (1985), com suas características químicas e sua força explosiva em unidades de TNT.

Tabela 1 - Elementos químicos com capacidade explosiva

Fórmula	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Explosão (%TNT)
CH <sub>3</sub> NO <sub>2</sub>	1,13	101 ton
C <sub>3</sub> H <sub>5</sub> N <sub>3</sub> O <sub>9</sub>	1,59	186 ton
C <sub>8</sub> H <sub>7</sub> N <sub>3</sub> O <sub>6</sub>	1,60	93 ton
C <sub>10</sub> H <sub>16</sub> N <sub>6</sub> O <sub>19</sub>	1,63	128 ton
N <sub>6</sub> Pb	4,80	40 ton

Fonte: KINNEY e GRAHAM (1985), adaptado

As propriedades químicas do explosivo estabelecem a magnitude da intensidade de explosão. A partir da Tabela 1, pode-se observar que muitos componentes químicos, devido a particularidades da estrutura molecular, possuem capacidade destrutiva maior que o TNT, a energia explosiva de outros elementos químicos pode ser medida como unidades de toneladas de TNT, conforme a terceira coluna da referida tabela. Porém, as características de distribuição das ondas de pressão é uma função da localização do explosivo com relação ao anteparo. Ou seja, independentemente do tipo de explosivo, sua dissipação de energia no ambiente terá o mesmo comportamento (*US Department of Defense, 2008*).

## 2.2. Formação das Ondas de Choque

O processo de liberação da energia gera uma formação de onda de explosão. Tal onda é gerada quando a atmosfera que circunda a explosão é forçosamente empurrada. Cada porção individual do pulso de explosão move-se conforme sua velocidade, visto que são dependentes do gás do entorno (densidade) e da pressão correspondente de cada pulso. A Figura 5 apresenta o comportamento da onda de explosão durante sua propagação. A porção de alta pressão move-se mais rapidamente, como mostra a Figura 5 (a). À medida que a pressão diminui, a frente de onda torna-se mais inclinada, conforme apresentado na Figura 5 (b). Finalmente, quando a maior parte da energia é dissipada, é desenvolvida uma descontinuidade de choque explosivo, ilustrada na Figura 5 (c). Assim, observa-se que a configuração

inicial da onda não é mantida durante sua propagação (KINNEY & GRAHAM, 1985; NETO, 2015).

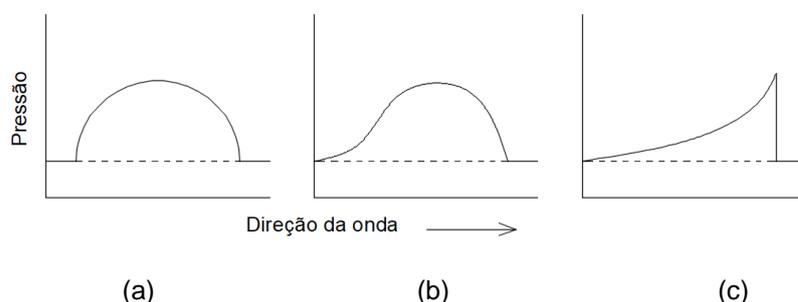


Figura 5 - Comportamento da onda de explosão durante sua propagação.

Fonte: KINNY & GRAHAM (1985), adaptado

Durante a propagação da onda de explosão, os gases se expandem e a pressão no epicentro decai rapidamente em comparação com a atmosfera não perturbada. Desta forma, após os efeitos inerciais da expansão, ocorre uma superexpansão e em seguida uma rarefação no centro da explosão, com geração de vácuo. Ou seja, a onda de choque é caracterizada por um aumento descontínuo na frente de choque, chegando à uma pressão de pico positiva seguida de um decaimento imediato para uma fase negativa (KINNEY & GRAHAM, 1985; NEEDHAM, 2010). A Figura 6 ilustra uma carga de pressão de uma onda, em que  $p_{max}$  corresponde ao valor máximo de pressão da fase de sobrepressão (ou pressão de pico),  $p_{min}$  é o valor máximo (em módulo) da fase de sobressão,  $t_d$  é o tempo de duração da fase positiva,  $t_d^-$  é o tempo de duração da fase negativa,  $i_d$  é o impulso referente à fase positiva e  $i_d^-$  é o impulso da fase negativa.

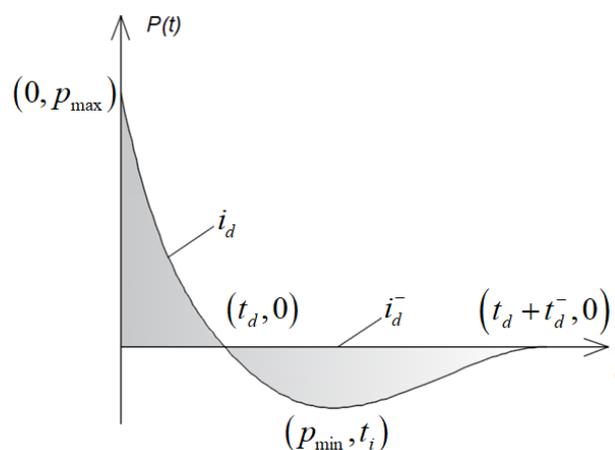


Figura 6 - Gráfico de carga de pressão de uma onda de choque.

Fonte: RIGBY (2014), adaptado

Na fase positiva dessa curva, ocorre a propagação da onda de sobrepressão, no intervalo de tempo ( $t_d$ ) que se inicia com a chegada da onda de choque. No início desse intervalo, ocorre a pressão de pico ( $p_{max}$ ), definida como um salto de pressão positiva proveniente do acionamento da combustão dos materiais químicos presentes na fonte. A área da curva com relação ao tempo corresponde ao impulso positivo  $i_d$  (KINNEY & GRAHAM, 1985; NEEDHAM, 2010).

A fase negativa, apesar de apresentar uma pressão  $p_{min} < p_{max}$ , possui duração  $t_d < t < t_d^-$  e este  $p_{min}$  ocorre em um determinado tempo  $t_i$ , que será explicado posteriormente. A área da curva com relação ao tempo da fase negativa corresponde ao impulso negativo  $i_d^-$ , que em muitos casos se apresenta maior que o impulso positivo  $i_d$ .

A capacidade de causar danos na estrutura também está relacionada com o impulso da carga de pressão. A Figura 7 ilustra duas cargas de pressão positivas, com mesma duração  $t_d$  e mesmo valor de pico  $p_{max}$ , mas com taxas de decaimento distintas. Como o impulso positivo  $i_d$  da carga B é maior que o da carga A, seu impacto é mais significativo em uma estrutura (KINNEY & GRAHAM, 1985). Paralelamente, a análise do impulso da carga negativa está correlacionada com a duração da carga, pressão mínima imposta e a taxa de decaimento apresentada pela carga positiva, de forma que o comportamento da carga possa ser contínuo no tempo  $t_d$ .

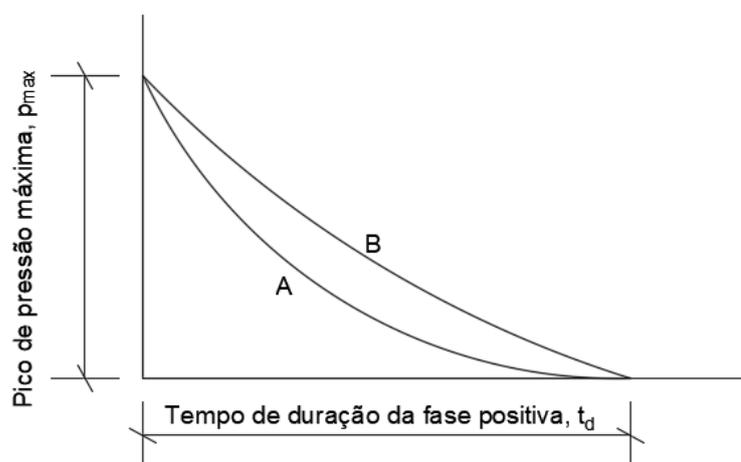


Figura 7 - Influência da taxa de decaimento

Fonte: KINNEY & GRAHAM (1985), adaptado

### 2.3. Reflexão das Ondas de Choque

Na seção anterior ressaltou-se sobre a importância da frente de onda durante uma detonação. Contudo, é importante observar que a pressão gerada pelo explosivo é diferente da pressão de reação em uma estrutura. Neste caso, a pressão a ser adotada para o comportamento estrutural corresponde às características de carga refletida, que dependem das características de onda incidente e das condições ambientais.

Neste trabalho, considera-se uma explosão com reflexão normal ao plano, conforme apresentado na Figura 8, visto que existem outros tipos de reflexões das ondas, onde podem ser verificadas com maiores detalhes em KINNEY & GRAHAM (1985). A reflexão normal ocorre quando o choque da explosão colide normalmente sobre um anteparo inflexível, de forma que a movimentação das partículas presentes na onda de pressão seja interrompida abruptamente. Como consequência, cria-se uma velocidade relativa entre as partículas em movimento e as já colididas com o plano, mesma direção, porém em sentido oposto, dando o efeito de uma nova frente de choque no anteparo. Esta nova frente de choque corresponde à onda de reflexão (KINNEY & GRAHAM, 1985).

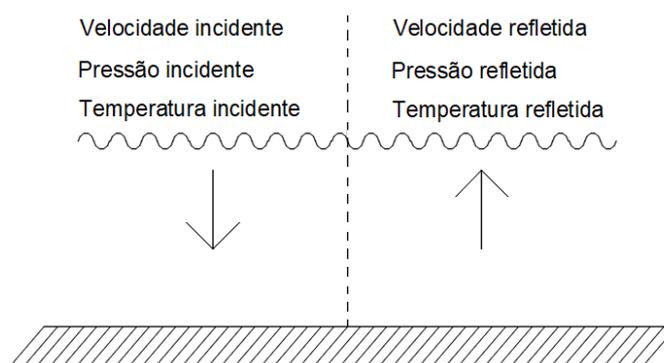


Figura 8 - Comportamento da reflexão de onda sobre uma superfície à 90°

Fonte: KINNEY & GRAHAM (1985), adaptado

A Figura 9 apresenta esquematicamente as diversas curvas de sobrepressão geradas por uma onda explosiva incidente que atinge um anteparo: refletida, lateral, de estagnação (que combina os efeitos da lateral e do vento da explosão) e de arrasto. Os valores de sobrepressão da onda refletida podem ser calculados a partir da onda

de incidência pela relação de Rankine–Hugoint e os procedimentos de cálculo encontram-se descritos em Kinney e Graham (1985).

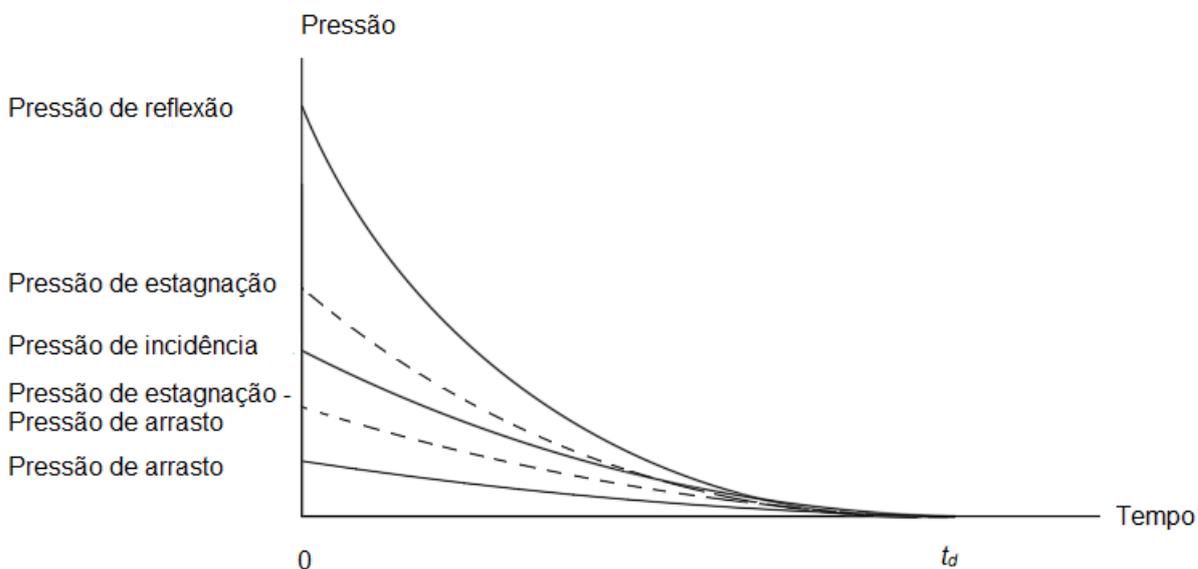


Figura 9 - Relação das pressões de ondas com o tempo

Fonte: KINNEY & GRAHAM (1985), adaptado

Como apresentado na Figura 9, os valores utilizados em estruturas correspondem a pressões de reflexão, que podem ser calculadas com base nas pressões de incidência. Considera-se que o formato da pressão de reflexão é o mesmo da pressão de incidência, como apresenta a Figura 10.

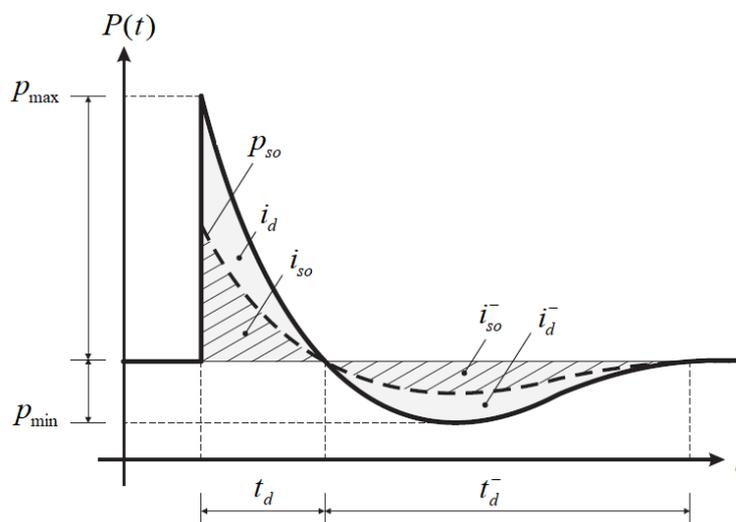


Figura 10 - Relação das pressões de incidência e reflexão

Fonte: RIGBY (2014), adaptado

Assim, os parâmetros necessários para completa caracterização das curvas de pressão refletida nas fases positiva e negativa são os valores máximos de pressão ( $p_{max}$ ,  $p_{min}$ ), os tempos de duração ( $t_d$  e  $t_d^-$ ) e os impulsos ( $i_d$  e  $i_d^-$ ), onde estes são obtidos com base nos parâmetros de onda incidente, em que são todos aqueles presentes na Figura 10 com subíndice 'so', que corresponde à 'side-on', como  $p_{so}$ ,  $i_{so}$  e  $i_{so}^-$ , que são as pressões, impulso positivo e impulso negativo de incidência, respectivamente. Esses valores dependem (parâmetros de reflexão) do tipo de explosão (esférica ou hemisférica), da quantidade de massa do explosivo equivalente em TNT ( $W_{TNT}$ ) e da distância em escala Z (RIGBY, 2014):

$$Z = \frac{R}{W_{TNT}^{1/3}} \quad (51)$$

Onde:

- $Z$  Distância escalar de Hopkinson
- $R$  Distância do alvo com relação à fonte explosiva
- $W_{TNT}$  Massa efetiva de TNT

Neste trabalho, empregou-se os dados experimentais de ábacos apresentados pela *US Department of Defense* (2008) para cargas esféricas e hemisféricas caracterizando as fases positiva e negativa apresentados nas Figura 11 e Figura 12.

De forma a facilitar o uso desses ábacos nas análises realizadas nesse trabalho, equacionou-se as curvas referentes às ondas refletidas por meio de um *software* digitalizador (*WebPlotDigitalizer*) e de ajuste de curvas com a ferramenta Excel. Além disso, observa-se que apenas trechos dos ábacos originais foram retirados para estudo, com isso, trabalhou-se nos mesmos intervalos de Rigby (2014).

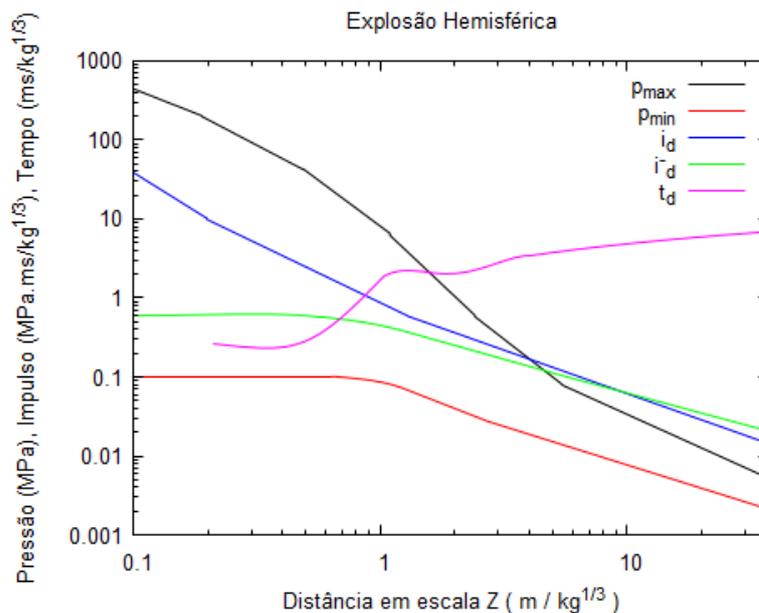


Figura 11 – Parâmetros da carga explosiva hemisférica

Fonte: RIGBY (2014), adaptado

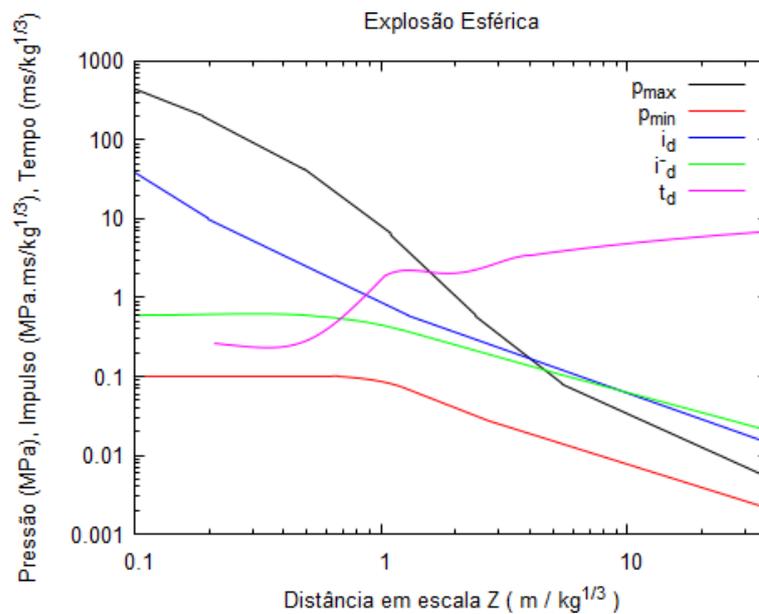


Figura 12 – Parâmetros da carga explosiva esférica

Fonte: RIGBY (2014), adaptado

As Equações (52) à (56) apresentam as expressões obtidas para os parâmetros da explosão hemisférica, enquanto as Equações (57) à (61) apresentam os parâmetros da explosão esférica. Do primeiro conjunto, as Equações (55) e (56) são referentes à pressão mínima e ao impulso negativo, propostas por Rigby (2013) a partir dos ábacos apresentados pelas Figura 11 e Figura 12. Em todas as equações

apresentadas, o coeficiente de regressão linear obtido foi superior a 0.99, indicando uma boa qualidade da linha de tendência escolhida.

$$p_{\max}(Z) = \begin{cases} 26.303Z^{-1.226} & , 0.07071 < Z \leq 0.1895 \\ 13.015Z^{-1.637} & , 0.1895 < Z \leq 0.48735 \\ 8.1Z^{-2.322} & , 0.48735 < Z \leq 1.096 \\ 8.0956Z^{-2.943} & , 1.096 < Z \leq 2.418 \\ 4.9419Z^{-2.427} & , 2.418 < Z \leq 5.442 \\ 0.8645Z^{-1.411} & , 5.442 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (52)$$

$$t_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \begin{pmatrix} 2.2064Z^3 - 0.3363Z^2 \\ -0.5644Z + 0.3756 \end{pmatrix} & , 0.20993 < Z \leq 1.0355 \\ \begin{pmatrix} 8.2395Z^3 - 34.896Z^2 \\ +48.909Z - 20.496 \end{pmatrix} & , 1.0355 < Z \leq 1.49339 \\ \begin{pmatrix} -0.2695Z^3 + 2.3907Z^2 \\ -6.1005Z + 6.8329 \end{pmatrix} & , 1.49339 < Z \leq 4.001 \\ 1.5602 \log(Z) + 1.2416 & , Z > 4.001 \end{cases} \quad \left( \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (53)$$

$$i_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} 0.4352Z^{-1.949} & , 0.0717 < Z \leq 0.1985 \\ 0.8709Z^{-1.501} & , 0.1985 < Z \leq 1.2895 \\ 0.7805Z^{-1.104} & , Z > 1.2895 \end{cases} \quad \left( MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (54)$$

$$p_{\min}(Z) = \begin{cases} 101 & , 0.071 < Z \leq 0.668 \\ -32.9Z^2 + 13Z + 106 & , 0.668 < Z \leq 1.27 \\ 93Z^{-1.22} & , 1.27 < Z \leq 2.78 \\ 73Z^{-0.978} & , 2.78 < Z \leq 37.6 \end{cases} \quad (kPa) \quad (55)$$

$$i_d^-(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} -724Z^2 + 445Z + 553 & , 0.071 < Z \leq 0.580 \\ 11.4Z^2 - 315Z + 752 & , 0.580 < Z \leq 1.19 \\ 462Z^{-0.88} & , 1.19 < Z \leq 5.25 \\ 434Z^{-0.848} & , 5.25 < Z \leq 37.6 \end{cases} \quad (kPa.ms) \quad (56)$$

$$p_{\max}(Z) = \begin{cases} 24.974Z^{-1.154} & , 0.07457 < Z \leq 0.22794 \\ 7.6735Z^{-1.951} & , 0.22794 < Z \leq 0.62306 \\ 4.8029Z^{-2.885} & , 0.62306 < Z \leq 3.0697 \\ 1.9941Z^{-2.054} & , 3.0697 < Z \leq 6.06257 \\ 0.6288Z^{-1.436} & , 0.62306 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (57)$$

$$t_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \left( \begin{array}{l} -4.2668Z^3 - 1.9736Z^2 \\ +0.132Z + 0.2145 \end{array} \right) & , 0.2210 < Z \leq 0.7790 \\ \left( \begin{array}{l} 7.5882Z^3 - 29.13Z^2 \\ +36.646Z - 13.319 \end{array} \right) & , 0.7790 < Z \leq 1.5069 \\ \left( \begin{array}{l} -0.205Z^3 + 1.5627Z^2 \\ -3.1864Z + 3.6534 \end{array} \right) & , 1.50769 < Z \leq 3.7612 \\ -0.0029Z^2 + 0.2159Z + 2.1382 & , 3.7612 < Z \end{cases} \quad \left( \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (58)$$

$$i_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} 0.3108Z^{-1.876} & , 0.07073 < Z \leq 0.2953 \\ 0.5802Z^{-1.356} & , 0.2953 < Z \leq 2.1275 \\ 0.4716Z^{-1.084} & , Z > 2.1275 \end{cases} \quad \left( MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (59)$$

$$p_{\min}(Z) = \begin{cases} \left( \begin{array}{l} -0.0703Z^3 - 0.0698Z^2 \\ +0.0528Z + 0.2846 \end{array} \right) & , 0.09014 < Z \leq 1.04853 \\ 0.1944Z^{-1.45} & , 1.04853 < Z \leq 2.8610 \\ 0.1553Z^{-1.208} & , 2.8610 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (60)$$

$$i_d^-(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \left( \begin{array}{l} -2.931Z^3 - 3.5747Z^2 \\ +1.1692Z + 0.5213 \end{array} \right) & , 0.08484 < Z \leq 0.4742 \\ 0.8315e^{-0.746Z} & , 0.4742 < Z \leq 1.602 \\ 0.3782Z^{-0.854} & , 1.602 < Z \end{cases} \quad \left( MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (61)$$

## 2.4. Equação da Carga Dinâmica

Vários estudos foram realizados apresentando diversas formulações e calibrações do comportamento das fases positiva e negativa da curva de pressão a partir de métodos empíricos e semi-empíricos. A Figura 13 apresenta algumas dessas propostas: aproximação linear, Friedlander estendido, Friedlander & Teich estendido, cúbica negativa.

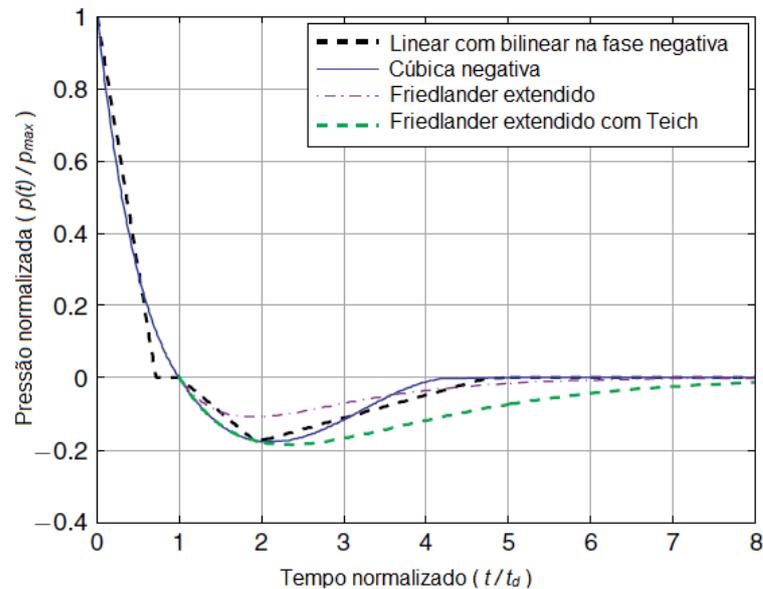


Figura 13 – Fases positiva e negativa normalizadas, comparação entre métodos

Fonte: Adaptado (RIGBY, 2014)

No presente trabalho, em consenso com a literatura, adotou-se a equação de Friedlander para a fase positiva ( $t \leq t_d$ ). Para a fase negativa ( $t_d \leq t \leq t_d + t_d^-$ ), adotou-se a curva cúbica, em consonância com os estudos de validação experimental realizados por Rigby (2013) que concluiu que a curva cúbica é a mais apropriada. Assim, a carga de explosão  $P(t)$  é dada por:

$$P(t) = \begin{cases} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{a't}{t_d}} & , t \leq t_d \\ -p_{\min} \left(\frac{6.75(t-t_d)}{t_d^-}\right) \left(1 - \frac{(t-t_d)}{t_d^-}\right)^2 & , t_d \leq t \leq t_d + t_d^- \\ 0 & , t \geq t_d + t_d^- \end{cases} \quad (62)$$

Onde:

$P(t)$  Equação do carregamento dinâmico de explosão

A equação de carregamento da fase positiva é um decaimento exponencial dependente explicitamente de três variáveis: pressão máxima positiva ( $p_{max}$ ), tempo de duração da fase positiva ( $t_d$ ) e taxa de decaimento da explosão ( $a'$ ). Esse coeficiente pode ser relacionado com o impulso positivo ( $i_d$ ), conforme a equação:

$$i_d = \int_0^{t_d} p_{max} \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{a't}{t_d}} dt = \frac{P_{max} t_d}{(a')^2} (a' - 1 + e^{-a'}) \quad (63)$$

Desse modo, conhecidos os parâmetros do carregamento, o coeficiente  $a'$  pode ser determinado pela resolução da equação não linear. No presente trabalho, empregou-se o método de Newton-Raphson.

A equação de carregamento cúbica da fase negativa foi proposta por Granström (1956) e foi construída impondo as condições de início em  $t = t_d$ , término em  $t = t_d + t_d^-$  e valor máximo em  $t = t_d + (t_d^-/3)$ , como expresso na Equação (64):

$$\begin{aligned} P(t_d) &= 0 \\ P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) &= -P_{min} \\ P(t_d + t_d^-) &= 0 \\ \frac{d}{dt} P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

O impulso negativo pode então ser expresso por

$$i_d^- = \frac{9P_{min} t_d^-}{16} \quad (65)$$

Levando a uma relação adimensional  $k^-$  constante:

$$k^- = \frac{i_d^-}{P_{min} t_d^-} = 0.5625 \quad (66)$$

Assim, a equação cúbica depende de apenas dois parâmetros característicos da fase negativa, sendo que nesse trabalho adotou-se a pressão máxima negativa ( $p_{min}$ ) e o impulso negativo ( $i_d^-$ ) como valores de entrada. Portanto, o tempo de duração da fase negativa é calculado a partir da Equação (66).

Segundo GRANSTRÖM (1956), a equação cúbica pode ser considerada válida para  $Z > 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  já que, para esse caso, os valores do parâmetro  $k$  se aproximam a 0.5625, como pode ser visto na Tabela 2.

De acordo com GRANSTRÖM (1956), é importante lembrar que as curvas de pressão da fase positiva e negativa (Friendlander e cúbica, respectivamente) foram concebidas separadamente e devem ser calibradas com parâmetros inerentes de cada fase do carregamento. Além disso, a equação do carregamento na Equação (45) não impõe continuidade na derivada no tempo, apesar deste ser observado experimentalmente.

Tabela 2 - Características de explosão esférica

$Z(\text{m/kg}^{1/3})$	$t_d(\text{ms})$	$t_d^-(\text{ms})$	$k^+$	$k^-$
0.1500	0.0550	8.3500	1.1900	0.5800
0.2000	0.0600	8.5200	1.0800	0.5700
0.3000	0.0700	8.7600	0.9000	0.5300
0.5000	0.1000	9.2400	0.6900	0.4500
0.7000	0.1500	9.6800	0.5800	0.3800
1.0000	0.3900	10.1200	0.3300	0.3700
1.5000	0.9500	10.4700	0.2900	0.4200
2.0000	1.4500	10.6300	0.3500	0.4800
3.0000	2.2000	10.7900	0.4200	0.5300
5.0000	3.1000	10.9000	0.4700	0.5625
7.0000	3.5500	10.9900	0.4800	0.5625
10.0000	4.0000	11.1000	0.4800	0.5625
20.0000	4.9400	11.1000	0.4900	0.5625
50.0000	6.1200	11.1000	0.4900	0.5625
100.0000	6.8900	11.1000	0.5000	0.5625
200.0000	7.4400	11.1000	0.5000	0.5625

Fonte: GRANSTRÖM (1956), adaptado

### 3. ANÁLISE DINÂMICA DAS PLACAS

A seguir, são abordadas as soluções analíticas referentes à análise dinâmica das placas submetidas à carga de explosão. Apresenta-se o comportamento da estrutura demonstrando as formulações não lineares de dinâmica de placas (esforços de flexão e membrana) com base também na teoria de placas de Kirchhoff, conforme apresentada no Capítulo 1, e teoria dos grandes deslocamentos de von Karman.

A solução das equações de dinâmica tem por base duas séries trigonométricas de Navier, uma para cada tipo de apoio, conforme propõe YAMAKI (1961) e FELDGUN (2016). Com relação ao procedimento de solução da placa referente aos grandes deslocamentos, são utilizadas as equações de von Karman, Equações (47) e (50), onde é considerado o efeito de membrana na estrutura. Com relação à análise da dinâmica de placa somente com os esforços à flexão, como proposto por GUPTA (1987), estes estão presentes no APÊNDICE A. Contudo, é adicionado à solução de GUPTA (1987) a formulação de placas quando submetidas ao carregamento de pressão negativa e vibração livre.

Para se determinar as equações dinâmicas, tem-se por base a utilização do método de Galerkin nas equações de von Karman, expressas de acordo com as três variáveis de deslocamentos presentes, governando as duas equações de grandes deslocamentos, de forma a acompanhar o comportamento da placa em deslocamento e tensões. Estes dois métodos destacam-se por serem baseados nos conceitos das equações de Euler - Lagrange (VENDHAN *et al*, 1974).

#### 3.1. Condição de Contorno: Simplesmente apoiado em todas as arestas

##### 3.1.1. Funções de Airy

O campo de deslocamentos utilizado para determinar a amplitude da placa e suas tensões têm por base a consideração do primeiro harmônico, como sugerido por YAMAKI (1961), presente na série de Navier.

$$u_z = A(t)\psi(x, y) \quad (67)$$

$$\psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (68)$$

Onde:

$\psi$  Coeficiente trigonométrico do deslocamento da placa

Empregando a técnica de solução de Ritz-Galerkin, com base no princípio de Hamilton, para as Equações (47) e (68), a equação de movimento da placa é dada:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} L(w, \phi)\psi(x, y) dx dy = 0 \quad (69)$$

Aplicando a Equação (68) na Equação (69), reescreve-se a expressão como:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} L(w, \phi)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy = 0 \quad (70)$$

De acordo com a primeira expressão de von Karman, Equação (47), substituindo-a na Equação (70) e realizando simplificações, é possível encontrar a equação diferencial, correspondente à equação dinâmica:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + K_1 A(t) + K_3 [A(t)]^3 = F(t) \quad (71)$$

Onde:

$K_1$  Coeficiente linear relacionado ao esforço de flexão

$K_3$  Coeficiente não linear relacionado ao esforço da membrana

$F(t)$  Carga dinâmica uniformemente distribuída na placa

Os parâmetros acima contemplados,  $K_1$  e  $K_3$ , são característicos das parcelas lineares e não lineares, respectivamente, presentes na Equação (71). Para determiná-los, é necessário utilizar a função de Airy, apresentada na Equação (50). O processo

de demonstração da solução particular da equação de Airy, para condição de apoio simplesmente apoiado em todas as faces, se faz necessário do conhecimento da Equação (50). Sabendo que YAMAKI (1961) aborda a Equação (68) como equação do deslocamento vertical, aplicando-a na equação de von Karman, tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla^4 \phi &= E \left[ \left( \frac{\partial^2 (hA(t)\psi(x, y))}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (hA(t)\psi(x, y))}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (hA(t)\psi(x, y))}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^4 \phi &= [A(t)]^2 Eh^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^4 \phi &= \frac{E[A(t)]^2 \pi^4 h^2}{(ab)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi y}{b} \right) - \cos^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 \left( \frac{\pi y}{b} \right) \right]\end{aligned}\quad (72)$$

A Equação (72) pode ser reescrita como:

$$\nabla^4 \phi = -\frac{E[A(t)]^2 \pi^4 h^2}{2(ab)^2} \left[ \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right) + \cos \left( \frac{2\pi y}{b} \right) \right]\quad (73)$$

Observa-se que a Equação (73) corresponde à uma equação diferencial ordinária, onde possui uma solução homogênea e um particular. A seguir, apresenta-se a solução particular de tal equação:

$$\phi_1 = Eh^2 [A(t)]^2 \left[ \lambda_1 \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right) + \lambda_2 \cos \left( \frac{2\pi y}{b} \right) \right]\quad (74)$$

Aplicando a Equação (74) na Equação (73), encontra-se:

$$\nabla^4 \phi = \frac{E[A(t)]^2 \pi^4 h^2}{2(ab)^2} \left[ \frac{32b^2}{a^2} \lambda_1 \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right) + \frac{32a^2}{b^2} \lambda_2 \cos \left( \frac{2\pi y}{b} \right) \right]\quad (75)$$

Igualando as Equações (73) e (75), determina-se os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\lambda_1 = -\frac{a^2}{32b^2} = -\frac{\beta^2}{32}, \lambda_2 = -\frac{b^2}{32a^2} = -\frac{1}{32\beta^2}\quad (76)$$

Aplicando os coeficientes, Equação (76), na Equação (75), encontra-se a solução particular da função de Airy para o caso de apoio simples:

$$\phi_1 = -\frac{E[A(t)]^2 h^2}{32(ab)^2} \left[ a^4 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + b^4 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \quad (77)$$

Onde:

$\phi_1$  Solução particular da função de Airy

A solução homogênea da equação diferencial da função de Airy é proposta por YAMAKI (1957), onde o autor aborda a respeito do efeito de membrana:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n \left[ \Omega\left(\frac{n}{\beta}\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - \frac{2n\pi y}{a} \Psi\left(\frac{n}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right] \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + \\ B_n \left[ \Omega(n\beta) \cosh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) - \frac{2n\pi x}{b} \Psi(n\beta) \sinh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \end{array} \right\} \quad (78)$$

Em que:

$$\Omega(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi \cosh(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}, \quad \Psi(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}$$

Onde:

$\phi_0$  Solução homogênea da função de Airy

$A_n, B_n$  Coeficientes da solução homogênea da função de Airy

A demonstração da Equação (78) está contemplada no ANEXO B, visto que corresponde à uma solução extensa.

Com base nas soluções particular e homogênea da função de Airy, Equações (77) e (78), a expressão completa que representa a função de Airy pode ser reescrita:

$$\phi = \left[ \frac{A(t)}{h} \right]^2 \left( \frac{1}{2} p'_x y^2 + \frac{1}{2} p'_y x^2 + Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \Phi_{pq} X_{2p} Y_{2q} \right) \quad (79)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \Phi_{p,q} &= \varphi_{p,q} + \varphi'_{p,q} \\ X_{2p} &= \cos\left(\frac{2\pi px}{a}\right), Y_{2q} = \cos\left(\frac{2\pi qy}{b}\right) \end{aligned} \quad (80)$$

Onde:

$P'_x, P'_y$  Coeficientes adimensionais da solução homogênea da função de Airy

$\varphi_{p,q}$  Coeficiente da série de Fourier para a solução particular da função de Airy

$\varphi'_{p,q}$  Coeficiente da série de Fourier para a solução homogênea da função de Airy

De forma a determinar os parâmetros apresentados pela Equação (78), é necessário conhecer as condições de tensões referentes à membrana, conforme afirmado por YAMAKI (1961). Desta forma, o sistema pode ser classificado em deslocável (*movable*), indeslocável (*immovable*) ou livre de tensões (*stress free*). As 3 condições mencionadas podem ser escritas em função da equação de Airy:

Tabela 3 - Especificações das condições de tensões da membrana

Caso	$x = \pm a/2$	$y = \pm b/2$
Livre de tensões	$\phi_{,yy} = \phi_{,xy} = 0$	$\phi_{,xx} = \phi_{,xy} = 0$
Indeslocável	$u_x = \phi_{,xy} = 0$	$u_y = \phi_{,xy} = 0$
Deslocável	$P_x = \phi_{,xy} = 0$	$P_y = \phi_{,xy} = 0$

Onde:

$P_i$  Resultante das forças atuantes no eixo  $i$

As três condições de tensões apresentadas pela Tabela 3 são diretamente relacionadas à forma que a membrana será solicitada. A primeira delas, livre de tensões, apresenta as tensões zeradas nos bordos e os deslocamentos horizontais de cada eixo livre, isto é, cada elemento  $dx$  e  $dy$  presente nos bordos pode se movimentar de forma independente. O segundo caso, indeslocáveis, apresenta as

tensões de cisalhamento nulas e os deslocamentos nos eixos também nulos, caracterizando assim um apoio do segundo gênero. Finalmente, o terceiro caso, deslocável, pelo deslocamento ao longo da espessura ser constante. Neste caso, os bordos são mantidos alinhados através de uma distribuição normal de tensões (YAMAKI, 1961). Vale ressaltar que para todos os casos, como está sendo utilizada a teoria de placas finas de Kirchhoff, por definição o cisalhamento é nulo.

A seguir, são apresentadas as demonstrações de determinação dos parâmetros presentes na Equação (79), com base nas condições de tensões contempladas pela Tabela 3.

- Caso I: Sistema livre de tensões

É válido ressaltar que para este tipo de condições de contorno (apoio simples), o cisalhamento nos bordos é nulo, desta forma, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}\phi_{,yy} &= \phi_{0,yy} + \phi_{1,yy} = 0 \\ \phi_{0,yy} &= -\phi_{1,yy}\end{aligned}\tag{81}$$

Considerando o conceito introduzido pela Equação (81), já apresentado pela Tabela 3, determina-se o sistema de equações que determina os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  apresentados pela solução homogênea da equação de Airy, conforme a Equação (82).

$$\begin{cases} B_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \eta\left(\frac{m}{\beta}, n\right) = -\beta^2 n^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \varphi_{p,n} \\ A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m \eta(m\beta, n) = -n^2 \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \varphi_{n,q} \end{cases}\tag{82}$$

Com base no artigo de YAMAKI (1961), utilizado por FELDGUN (2016), é possível reescrever a Equação (78), com base em um somatório:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_p \sum_q \varphi'_{pq} \cos\left(\frac{2\pi px}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi qy}{b}\right)\tag{83}$$

Onde:

$$\dot{\phi}_{p,q} = \frac{4\beta}{\pi [p^2 + (q\beta)^2]^2} \left[ p(-1)^q \varepsilon_q \Theta\left(\frac{p}{\beta}\pi\right) A_p + q(-1)^p \varepsilon_p \Theta(q\beta\pi) B_q \right] \quad (84)$$

Em que:

$$\Theta(\gamma) = \frac{\sinh^2(\gamma)}{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma) + \gamma}$$

É válido ressaltar que a Equação (85) corresponde somente à parcela homogênea da expressão geral da função de Airy, conforme apresentado pela Equação (79). De forma complementar, o coeficiente da série de Fourier que corresponde à solução completa da função de Airy,  $\Phi_{p,q}$ , também contempla as parcelas homogênea e particular, como informado pela Equação (80). Desta forma, esta parcela homogênea é formulada com base na Equação (84).

Considera-se ainda que os parâmetros presentes da Equação (84) devem respeitar as seguintes condições:

$$p, q = \left\{ p \wedge q \in \mathbb{N} / (p \vee q = 0 \Rightarrow \varepsilon_p \vee \varepsilon_q = 1/2) \wedge (p \vee q \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_p \vee \varepsilon_q = 1) \right\}$$

$$m, n, p, q = \left\{ (p \wedge q \wedge n \wedge m) \in \mathbb{N} / (A_p = A_n) \wedge (B_q = B_n) \right\}$$

Ou seja, os parâmetros  $p$  e  $q$  devem pertencer ao conjunto dos números naturais, de forma que ambos não podem ser zero ao mesmo tempo. Caso  $p$  ou  $q$  seja zero, então  $\varepsilon_p = 1/2$  ou  $\varepsilon_q = 1/2$ , respectivamente. Caso contrário,  $\varepsilon_p$  ou  $\varepsilon_q$  seja diferente de zero, o valor de  $p$  ou  $q$  será 1, respectivamente.

Com relação à segunda condição, os parâmetros  $m$ ,  $n$ ,  $p$  e  $q$  devem pertencer ao conjunto dos números reais, de forma que a solução da Equação (82) deve ser aplicada nos parâmetros  $A_p$  e  $B_q$  da Equação (84).

Desta forma, para o Caso I, os coeficientes são calculados  $A_p$  e  $B_q$  com base nas derivadas da função de Airy, apresentadas pela Equação (82). Esta mesma equação corresponde à uma matriz quadrada de equações lineares, de forma que esta pode ser expandida tantas vezes necessário conforme  $m$ . Com isso, quanto

maior o número de termos, maior a precisão que será de  $A_p$  e  $B_q$ . Contudo, este processo acarreta maiores dificuldades na manipulação das equações.

Com os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  determinados, o processo de solução de  $p'_x$  e  $p'_y$  torna-se mais fácil, visto que o número de incógnitas diminui. Desta forma, verifica-se que os parâmetros  $p'_x$  e  $p'_y$  são zero.

É válido ressaltar que as demonstrações das Equações (82) e (84) são apresentadas no APÊNDICE C.

- Caso II: Sistema indeslocável

A solução do caso indeslocável utiliza a expressão completa da equação de Airy (solução homogênea mais a particular). Com base nisso, para todo e qualquer caso especificado, deve-se obedecer às condições de tensão apresentadas pela Tabela 3. Ou seja, para o caso indeslocável, as condições são dadas por:

$$\phi_{,xy} \Big|_{x=\pm a/2} = \frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=\pm a/2} \quad (85)$$

$$\phi_{,xy} \Big|_{y=\pm b/2} = \frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=\pm b/2} \quad (86)$$

Após a determinação das quatro expressões derivadas, verifica-se que aquelas avaliadas em  $x = a/2$  e  $x = -a/2$  apresentam o mesmo resultado e o mesmo é válido para  $y = b/2$  e  $y = -b/2$ . Desta forma, aponta-se duas equações com duas incógnitas,  $A_n$  e  $B_n$ . Resolvendo este sistema, é possível determinar que:

$$A_n = 0, B_n = 0 \quad (87)$$

Desta forma, conclui-se que o tipo de condição de contorno indeslocável independe da parcela homogênea da equação de Airy.

Para determinação dos coeficientes  $p'_x$  e  $p'_y$  presentes na Equação (79) utiliza-se por base o conceito também apresentado pela Tabela 3 que corresponde aos deslocamentos. YAMAKI (1961) apresenta que tais deslocamentos são pertinentes

com as tensões de Airy e podem ser aplicados diretamente na integral que relaciona deslocamentos e deformações:

$$u_x = \int_0^x \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (88)$$

$$u_y = \int_0^y \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (89)$$

Considerando as condições de tensões de membrana apresentadas pela Tabela 3, onde o cisalhamento é nulo nos bordos, verifica-se que para o caso indeslocável os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  são zero. Com isto, aplicando a solução da expressão de Airy, Equação (79), e a expressão referente a condição de contorno de apoio simples, Equação (67), nas Equações (88) e (89), é possível encontrar que:

$$p'_x = \frac{\pi^2 E h^2 (\beta^2 \nu + 1)}{8a^2 (1 - \nu^2)} \quad (90)$$

$$p'_y = \frac{\pi^2 E h^2 (\beta^2 + \nu)}{8a^2 (1 - \nu^2)} \quad (91)$$

Onde  $p'_x$  e  $p'_y$  são os parâmetros da Equação (79) para o caso indeslocável.

- Caso III: Sistema deslocável

Caso em que a resultante das forças nas direções de caixa eixo no plano da placa zero, tensões cisalhantes da membrana são nulas e o deslocamento dos apoios nas duas direções são constantes, ou seja, os apoios se deslocam uniformemente. O procedimento de cálculo é bastante parecido com o Caso II, com exceção para a aplicação da carga nas direções  $x$  e  $y$ .

Aplica-se a segunda derivada em  $x$  e depois em  $y$  na parcela homogênea da função Airy, Equação (80), conforme apresenta na Tabela 3. A partir disso, para ambos os casos, avalia-se separadamente as equações resultantes em  $x = \pm a/2$  e

em  $y = \pm b/2$ . Da mesma forma que o Caso II, encontram-se duas equações e duas incógnitas. Solucionando o sistema de equações, verifica-se que  $A_n$  e  $B_n$  são zero.

Com os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  determinados, o processo de solução de  $p_x$  e  $p_y$  torna-se mais fácil, visto que o número de incógnitas diminui. De acordo com a Tabela 3, a solução do caso deslocável é dado com base na carga aplicada, ou seja,  $P_x$  e  $P_y$ , que são expressos como:

$$P_x = h \int_{-b/2}^{b/2} \phi_{,yy} dy \quad (92)$$

$$P_y = h \int_{-a/2}^{a/2} \phi_{,xx} dx \quad (93)$$

Para as expressões encontradas a partir das Equações (92) e (93), substituindo  $A_n$  e  $B_n$  por zero e resolvendo para  $y = \pm b/2$  e em  $x = \pm a/2$ , respectivamente, encontra-se que:

$$p'_x = p'_y = 0 \quad (94)$$

Com isso, avalia-se que o caso deslocável é dependente somente da solução particular da função de Airy.

- Resumo dos Parâmetros da Função de Airy

Com todos os casos calculados e definidos, a seguir é apresentada uma tabela com um resumo dos resultados obtidos com base nas condições de tensão da membrana, conforme proposto por YAMAKI (1961).

Desta forma, é possível determinar a expressão da função de Airy para cada caso apresentado, utilizando os parâmetros da Tabela 4 na Equação (79).

Tabela 4 - Coeficientes dos casos de condições de tensão da membrana

Caso	$p'_x$	$p'_y$	$\Phi_{p,q}$
Livre de tensões	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q} + \varphi'_{p,q}$
Indeslocável	$\frac{\pi^2 E h^2 (\beta^2 \nu + 1)}{8 a^2 (1 - \nu^2)}$	$\frac{\pi^2 E h^2 (\beta^2 + \nu)}{8 a^2 (1 - \nu^2)}$	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$
Deslocável	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$

### 3.1.2. Parâmetros $K_1$ e $K_3$

Como abordado anteriormente, os parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  são aqueles presentes na equação diferencial dinâmica, Equação (71), e que são definidos como a parcela linear referente ao esforço de flexão e a parcela não linear referente ao esforço de membrana, respectivamente. Tais parâmetros podem ser determinados com base nas expressões de energia de flexão e de membrana, indicados por TIMOSHENKO (1959), e relativizados pelo coeficiente da segunda derivada de tal EDO, conforme sugerido por FELDGUN (2016). O segundo processo, como sugerido por YAMAKI (1961), corresponde em utilizar o método de Galerkin e expandir a Equação (69), conforme apresentado pelo item 3.1.1.

A seguir, são apresentadas as demonstrações e expressões dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ , conforme o método da energia e, de acordo com o caso, conforme o método de Galerkin.

- Parâmetro  $K_1$

De acordo com o método da energia, a energia de placa, como tratada por TIMOSHENKO (1959) é dada pela Equação (95).

$$U_b = \frac{D}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 u_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 u_z(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z(x, y)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_z(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (95)$$

Onde:

$U_b$  Energia de deformação à flexão

Aplicando a condição de contorno de simplesmente apoiada, Equações (67) e (68), aplicando-as na Equação (95), tem-se:

$$U_b = \frac{\pi^4 D [A(t)]^2 (\beta^2 + 1)^2}{8b^2 \beta^3 (1-\nu^2)} \quad (96)$$

Para determinar o parâmetro  $K_1$ , deve-se calcular a energia cinética da estrutura, conforme apresentado por FELDGUN (2016), ou seja:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{du_z}{dt} \right)^2 dx dy dz = \frac{abh\rho}{8} \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \quad (97)$$

Finalmente, para determinação do parâmetro  $K_1$ , basta-se dividir a expressão da Equação (96) pelo resultado presente na Equação (97). Desta forma, tem-se:

$$K_1 = \frac{\pi^4 D (\beta^2 + 1)^2}{a^4 h \rho} \quad (98)$$

A Equação (98) também é obtida a partir do método de Galerkin.

- Parâmetro  $K_3$  – Caso I: Sistema livre de tensões

O primeiro caso a ser estudado corresponde a condição de tensão referente a livre de tensões. Para este, os dois métodos são apresentados, ou seja, o processo da energia e o método de Galerkin, respectivamente.

Considerando as equações de deformação da estrutura, Equações (10) à (12), e aplicando as expressões,  $u_x$  e  $u_y$ , Equações (88) e (89), obtém-se, portanto, as três equações que correspondem às deformações da membrana. Tais expressões são aplicadas na equação de energia da membrana, conforme apresentado por TIMOSHENKO (1959):

$$U_m = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ (\varepsilon_{xx}^m)^2 + (\varepsilon_{yy}^m)^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}^m\varepsilon_{yy}^m + \frac{1}{2}(1-\nu)(\varepsilon_{xy}^m)^2 \right] dx dy \quad (99)$$

Onde:

$U_m$  Energia de deformação da membrana

Conforme observado nas expressões de deformação da membrana, Equações (10) à (12), estas são diretamente dependentes dos parâmetros  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ . Tais deslocamentos são contemplados nas Equações (88), (89) e (67), respectivamente. É importante ressaltar que as expressões dos deslocamentos são dependentes da função de Airy, contemplada pela Equação (79). Desta forma, substituindo todos os parâmetros, é possível determinar as deformações de membrana em função das características físicas e geométricas da estrutura.

Para calcular o parâmetro  $K_3$ , o processo de determinação pelo método da energia é o mesmo que o abordado para o parâmetro  $K_1$ , com a diferença que neste caso é utilizada a Equação (99). Desta forma, aplica-se esta equação e divide-a pela solução da Equação (97). Contudo, a boa convergência do resultado da energia de membrana depende diretamente do número de termos a serem inseridos na Equação (82). Quando maior for a extensão da série de Fourier, melhor a convergência da função de Airy e, conseqüentemente, da energia associada.

O processo de demonstração é complexo e extenso, o que se faz necessário de um *software* algébrico para realizá-lo. Como forma de exemplificar, para o resultado para  $K_3$  pelo método da energia, com parâmetros de  $p$  e  $q$  sendo iguais à 1, tem-se a Equação (100).

$$K_3 = \frac{\pi^4 E}{48a^4 \beta^2 (1+\nu) \rho} \left[ \begin{array}{l} 32\Phi_{0,1}\beta^6 (96\Phi_{0,1}\nu + 96\Phi_{0,1} + \pi^2 + 6) + \\ 32\Phi_{1,0}\beta^2 (96\Phi_{1,0}\nu + 96\Phi_{1,0} + \pi^2 + 6) + \\ \beta^4 (6144\Phi_{0,1}\Phi_{1,0} + \pi^2 + 6) + \\ 512\pi^2\Phi_{0,1}^2\beta^8 + 512\pi^2\Phi_{1,0}^2 \end{array} \right] \quad (100)$$

Observa-se a partir da Equação (100) apresentada que com apenas 1 termo a expressão torna-se extensa. Vale ressaltar que, de acordo com YAMAKI (1961), as expressões como  $\varphi_{0,0}$  e  $\varphi_{1,1}$  são consideradas nulas.

Mais uma ressalva deve ser dada a respeito da Equação (100). A variável  $\Phi_{p,q}$  abordada acima é a soma da solução particular com a homogênea da equação de Airy. Contudo, apesar dos coeficientes  $p$  e  $q$  serem adotados de 0 a 1, o somatório é referente à Equação (82). Ou seja, verificando esta equação, é possível observar que considerando número de termos baixos, como  $n, m = 1$  ou  $2$ , por exemplo, os valores de  $A_n$  e  $B_n$  são carregados de erros relativos. À medida que o número de termos  $n$  e  $m$  aumentam, os valores de  $A_n$  e  $B_n$  aproximam-se assintoticamente dos valores reais. Isso significa que, mesmo que o número de termos de  $n$  e  $m$  tende ao infinito, a solução particular usa apenas o primeiro termo de cada um ( $A_1$  e  $B_1$ ) com valores consistentes, contudo com maior precisão. Ao contrário do que seria para  $n, m = 1$  ou  $2$ , o resultado da solução particular de Airy carregaria erros referentes à um sistema de matriz quadrada de baixa ordem, como  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$  por exemplo.

O método de Galerkin, adotado por YAMAKI (1961), exige que se conheça a função de Airy da estrutura, Equação (79), bem como a equação de deslocamento vertical, Equação (68). Utilizando a 1ª equação de von Karman e aplicando estas três expressões na Equação (69), encontra-se o coeficiente não linear  $K_3$ :

$$K_3 = \frac{2\pi^4 E h^2 \beta^2 (\Phi_{0,1} + \Phi_{1,0})}{a^6 \rho} \quad (101)$$

O processo realizado com o método de Galerkin corresponde essencialmente na aproximação da solução por uma função conhecida, convertendo o processo em uma formulação fraca.

Como abordado acima, observou-se que a solução homogênea da função de Airy é formada a partir de um somatório, Equação (82), fazendo com que o resultado da energia da estrutura se modifique conforme o número de termos presentes para  $A_n$  e  $B_n$ , verificando-se uma diferença entre os resultados obtidos pelo método de Galerkin e pelo método da conservação da energia, conforme pode ser observado na

Figura 14.

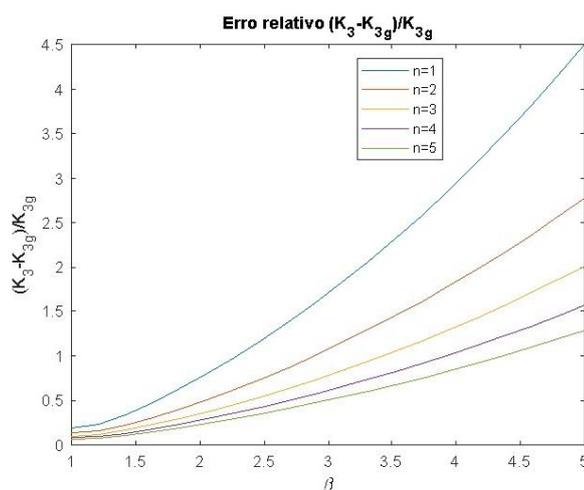


Figura 14 - Erro relativo: Métodos da energia e Galerkin – Simplesmente apoiado, caso Livre de tensões

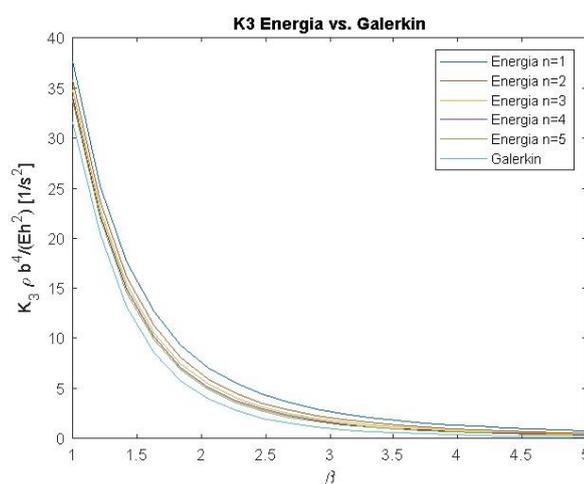


Figura 15 – Variação adimensional do comportamento do parâmetro  $K_3$ : Comparação entre os métodos da energia e Galerkin – Simplesmente apoiado, caso Livre de tensões

Contudo, o processo de Galerkin, que também é um processo aproximado, pode ser adotado para uma metodologia mais rápida e prática. Entretanto, não apresenta os termos quadráticos que são contemplados pelo método da energia. Na

Figura 15, compara-se as curvas apresentadas entre o método de energia, para quantidades variadas de termos, e o método de Galerkin.

- Parâmetro  $K_3$  – Caso II: Sistema indeslocável

O processo de demonstração do parâmetro  $K_3$  relacionado ao sistema indeslocável é exatamente o mesmo do sistema livre de tensões. A diferença se dá com relação à função de Airy, que de acordo com a Tabela 4 é dada por contemplar somente a parcela da solução particular de Airy, além dos fatores  $p'_x$  e  $p'_y$ . Desta forma, aplicando os parâmetros apresentados por esta mesma tabela na Equação (79), tem-se:

$$\phi = \frac{E[A(t)]^2}{32} \left\{ \frac{2\pi^2}{a^2(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu\beta^2)y^2 + (\beta^2 + \nu)x^2 \right] - \left[ \beta^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\beta^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \right\} \quad (102)$$

Utilizando-se o método de Galerkin, aplicando a Equação (102) na 1ª equação de von Karman e substituindo-a na Equação (69), considerando o parâmetro trigonométrico como apoio simples, reorganizando a equação diferencial, é possível determinar  $K_3$ :

$$K_3 = \frac{\pi^4 E h^2 \left[ (\beta^4 + 1)(\nu^2 - 3)\nu^2 - 4\beta^2\nu \right]}{16a^4 \rho (1-\nu^2)} \quad (103)$$

Pelo método da energia, é possível determinar o mesmo resultado expresso pela Equação (103). Para isto, aplica-se a expressão de Airy, Equação (102), nas duas equações de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ , Equações (88) e (89). Com isso, substitui-se os resultados nas expressões de deformações de membrana, Equações (10) à (12). Com base nos resultados de deformações, aplica-os na expressão da energia de membrana, Equação (99). Finalmente, o parâmetro  $K_3$  é determinado dividindo a energia da membrana pela energia cinética da estrutura, Equação (97).

- Parâmetro  $K_3$  – Caso III: Sistema deslocável

O processo de demonstração da energia  $K_3$  relacionado ao sistema deslocável é exatamente o mesmo que o sistema indeslocável. A diferença se dá com relação à função de Airy, que de acordo com a Tabela 4 é dada por contemplar somente a parcela da solução particular de Airy. Desta forma, aplicando os parâmetros apresentados por esta mesma tabela na Equação (79), tem-se:

$$\phi = -\frac{E[A(t)]^2}{32} \left[ \beta^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\beta^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \quad (104)$$

Utilizando-se o método de Galerkin, aplicando a Equação (104) na 1ª equação de von Karman e substituindo-a na Equação (69), considerando o parâmetro trigonométrico como apoio simples, reorganizando a equação diferencial, é possível determinar  $K_3$ :

$$K_3 = \frac{\pi^4 E h^2 (\beta^4 + 1)}{16 a^4 \rho} \quad (105)$$

Pelo método da energia, é possível determinar o mesmo resultado expresso pela Equação (105). O processo é exatamente igual ao abordado no caso indeslocável, contudo é válido ressaltar que para o caso deslocável é utilizada a expressão de Airy apresentada pela Equação (104).

- Resumo dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$

Conforme apresentado acima, foram demonstradas as expressões  $K_1$  e  $K_3$ , correspondentes as parcelas linear e não linear da equação diferencial dinâmica, respectivamente. Tais parâmetros foram encontrados com base nos métodos da energia e de Galerkin. Para este trabalho, é adotado as soluções fornecidas pelo método de Galerkin, com base nos estudos realizados por YAMAKI (1961). Com isso, a seguir é apresentada a tabela com os parâmetros a serem utilizados:

Tabela 5 - Parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ 

Caso	$K_3$	$K_1$
Livre de tensões	$K_3 = \frac{2\pi^4 Eh^2 \beta^2 (\Phi_{0,1} + \Phi_{1,0})}{a^6 \rho}$	
Indeslocável	$K_3 = \frac{\pi^4 Eh^2 [(\beta^4 + 1)(\nu^2 - 3)\nu^2 - 4\beta^2 \nu]}{16a^4 \rho (1 - \nu^2)}$	$K_1 = \frac{\pi^4 D (\beta^2 + 1)^2}{a^4 h \rho}$
Deslocável	$K_3 = \frac{\pi^4 Eh^2 (\beta^4 + 1)}{16a^4 \rho}$	

Conforme YAMAKI (1961), pode ser apresentada uma formulação geral dos parâmetros  $K_3$  apresentados pela Tabela 5, com base na Equação (71). Desta forma, a equação geral dinâmica da placa para o caso simplesmente apoiado é dada:

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^4 D (\beta^2 + 1)^2}{a^4 h \rho} A(t) + \left[ \begin{array}{l} \frac{\pi^2}{a^2 \rho} (\dot{p}_x + \beta^2 \dot{p}_y) - \\ \frac{2\pi^4 Eh^2}{a^2 b^2 \rho} (\Phi_{0,1} + \Phi_{1,0}) \end{array} \right] [A(t)]^3 = \frac{16}{\pi^2 h^2 \rho} P(t) \quad (106)$$

Onde, para o caso deste trabalho,  $P(t)$  corresponde ao carregamento explosivo, dado pela Equação (62). Com isso, é apresentada a comparação adimensional entre os termos  $K_1$  e  $K_3$  em função da variação de  $\beta$ , na Figura 16.

Com base na Figura 16, verifica-se a influência de cada parâmetro no comportamento estrutural da placa. Como abordado anteriormente,  $K_1$  e  $K_3$  estão relacionados aos regimes linear e não linear da equação diferencial, respectivamente. Para o caso indeslocável, apresenta-se maiores influências do regime não linear ao regime linear. Este comportamento é justificado porque maiores restrições são impostas nos bordos, ou seja, todos os deslocamentos são impedidos, à exceção a rotação. Desta forma, a influência da não linearidade geométrica torna-se evidente.

Com relação ao caso livre de tensões, por corresponder ao que possui menores restrições, é permitido com que a placa tenha maior mobilidade de movimentação lateral, sendo baixa a influência da não linearidade. Desta forma, o regime linear se sobrepõe ao não linear.

Da mesma forma, o caso deslocável possui deslocamento uniforme nos bordos, provenientes de uma distribuição de tensões normais uniformes pelos mesmos, apresentando um resultado intermediário ao indeslocável e o livre de tensões. Contudo, apresenta maior mobilidade quando comparado ao sistema indeslocável, acarretando menores influências da não linearidade geométrica.

Considerando para  $\beta = 1$ , as maiores influências dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ . De acordo com a Figura 16, obtêm-se os valores de 0,3663 para o regime linear e 0,06492, 0,4821 e 0,1250 para o regime não linear, sendo os casos livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente. Verifica-se que o regime linear se sobrepõe ao não linear em 564,23% para o caso livre de tensões. Para o sistema indeslocável, a influência do regime não linear torna-se mais evidente, sendo 31,61% maior que o regime linear. Com relação ao caso deslocável, novamente a linearidade do sistema se sobressai à não linearidade, sendo verificada em 293,04%.

O processo de variação dos valores numéricos dos regimes lineares e não lineares são importantes para dimensões de placa  $\beta < 3,5$ . A partir deste valor, ocorre uma estabilização das razões adimensionais, sendo os seguintes valores de 0,1071 para o sistema linear e 0,0001, 0,2079, 0,0629 para o sistema não linear, sendo os casos livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente. Observa-se que o regime não linear corresponde à 94,11% quando comparado ao regime linear, para o caso indeslocável.

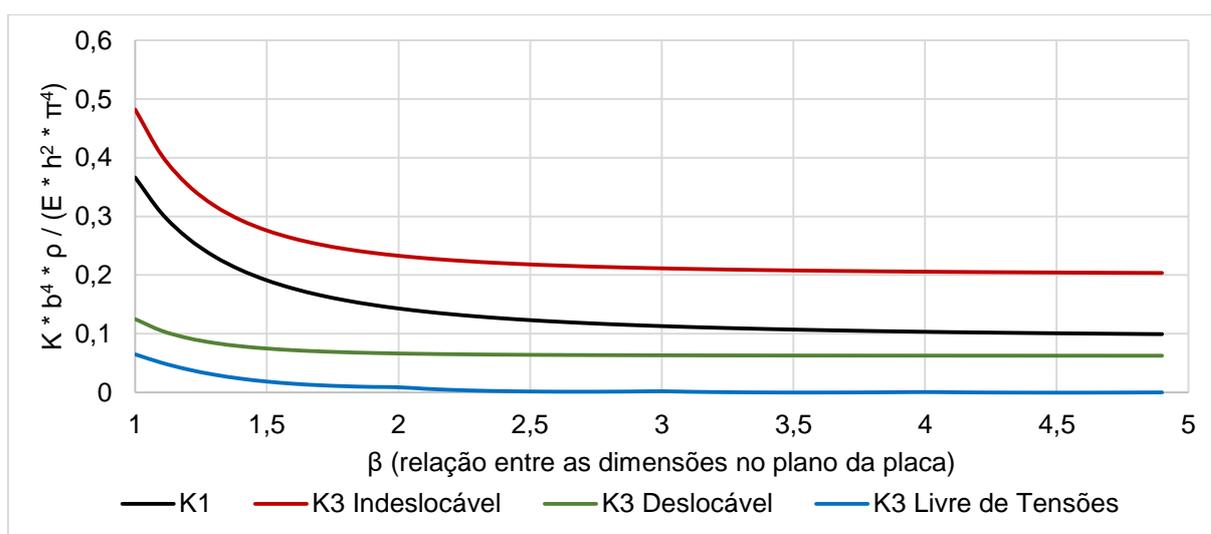


Figura 16 - Comparação entre parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  – Simplesmente Apoiado

### 3.1.4. Deslocamentos Estáticos

Com base no comportamento adimensional relacionados aos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ , conforme a Figura 16, é válido verificar a variação do comportamento do deslocamento total da estrutura com base na relação adimensional dependente de uma carga estática e das características geométricas e físicas da mesma. Desta forma, com base nas condições de contorno livre de tensões, indeslocável e deslocável, para uma placa simplesmente apoiada, observa-se a variação de comportamento conforme a variação de  $\beta$ .

Observa-se na Figura 17 um comportamento visivelmente não linear para a consideração de  $\beta = 1$ , confrontando com o exposto pela Figura 16, visto que o regime não linear ainda é considerável nas primeiras relações de dimensões da placa. Contudo, conforme o aumento de  $\beta$ , verifica-se que o comportamento do deslocamento vertical da placa,  $w_{max}$ , obedece à um regime linear. Desta forma, para o caso livre de tensões, a relação adimensional de  $K_3$  pode ser desprezada quando  $\beta$  inicia-se em 2,5, conforme Figura 16, visto que a variação do deslocamento estático da estrutura obedece à uma construção linear. Além disso, verifica-se a influência de uma placa quadrada é mais manifesta que outros valores de  $\beta$ . Para o caso analisado da Figura 17, considerando uma relação adimensional da carga estática de 500, o deslocamento associado à  $\beta = 1$  equivale à 4,6696 e este corresponde à 1,8118 e 5,2127 vezes maiores maiores do que para quando  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Ao contrário do caso livre de tensões, o sistema indeslocável (Figura 17) possui uma influência da não linearidade evidente para  $\beta$ . Da mesma forma que o caso livre de tensões, as placas quadradas representam as estruturas que ocasionam os maiores deslocamentos. Considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para o caso  $\beta = 1$ , o valor da relação  $w_{max}/h$  é de 2,4863, sendo 2,1599 e 4,3831 vezes maior quando comparado com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Finalmente, o caso deslocável (Figura 18) também apresenta um comportamento não linear evidente para qualquer  $\beta$ , contudo não tão expressivo quando a influencia do parâmetro  $K_1$ , porém não desprezível. Conforme apresentado pela Figura 16, o comportamento adimensional do parâmetro  $K_3$  encontra com resultados intermediários ao livre de tensões e ao indeslocável. Da mesma forma, é

esperado que a relação  $w_{max}/h$  também gere deslocamentos também intermediários aos outros casos. Observa-se na Figura 17, considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para o caso  $\beta = 1$ , o valor da relação  $w_{max}/h$  é de 3,8121, sendo 2,3403 e 5,3759 vezes maior quando comparado com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Com base nos resultados obtidos pelas Figuras 16 à 18, torna-se importante avaliar o comportamento de deslocamento estático da estrutura entre os três casos apresentados. Desta forma, a Figura 20 (a) e (b) contempla a comparação deste comportamento para uma placa com geometria de  $\beta=1$  e  $\beta = 2$ , respectivamente.

Verifica-se em ambas as figuras que o caso livre de tensões se sobrepõe aos outros sistemas quando o deslocamento estático da estrutura é avaliado. Isto é justificado pelo fato deste caso possuir maior mobilidade lateral, sendo, portanto, propício a gerar maiores deslocamentos em relação aos outros dois casos.

Para o sistema indeslocável, observa-se que é aquele que gera os menores deslocamentos, visto que, ao contrário do caso livre de tensões, corresponde à estrutura com restrições aos deslocamentos, exceto à rotação. Visto que a estrutura não pode se movimentar lateralmente, o efeito da rigidez da membrana é solicitado, conforme já apresentado pela Figura 16.

Esta diferença de deslocamentos entre os três casos pode também ser quantificado. Avalia-se que considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para uma placa com  $\beta = 1$ , o caso livre de tensões apresenta uma razão de 1,8781 e 1,2249 vezes maior que os casos indeslocável e deslocável, respectivamente. Da mesma forma, placa com  $\beta = 2$ , o caso livre de tensões apresenta uma razão de 1,7055 e 1,5821 vezes maior que os casos indeslocável e deslocável, respectivamente.

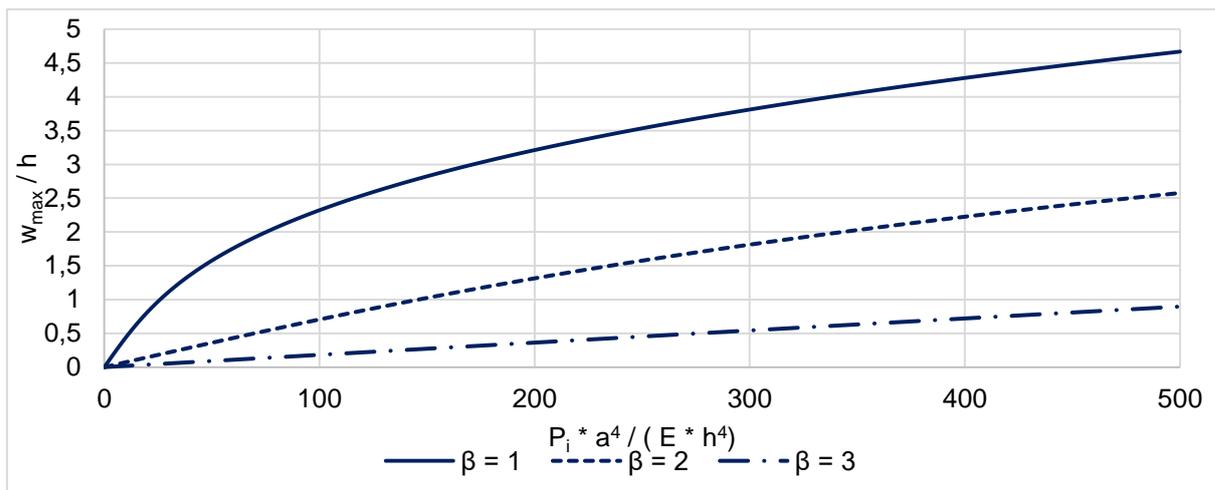


Figura 17 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso livre de tensões

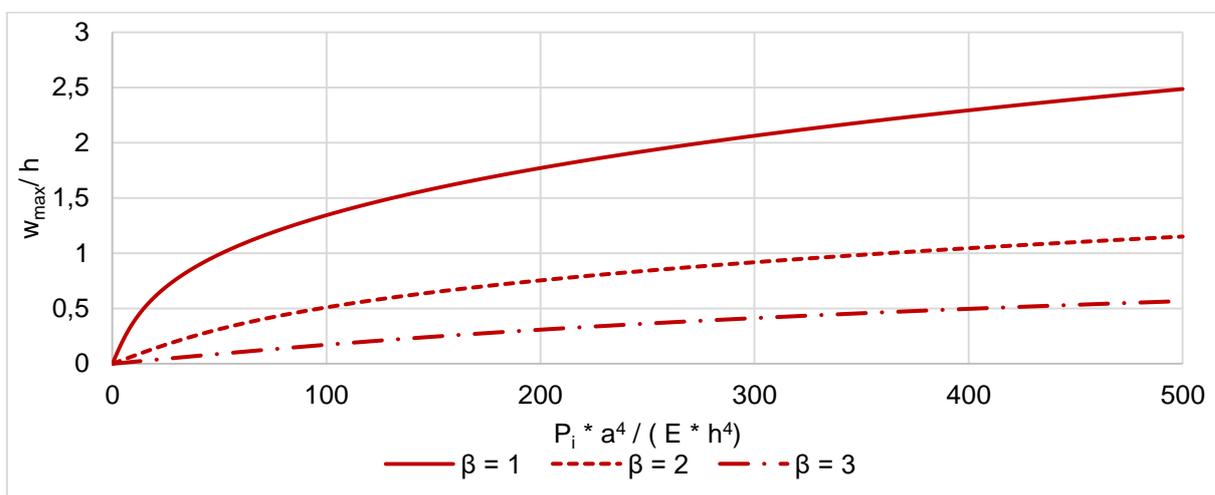


Figura 18 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso indeslocável

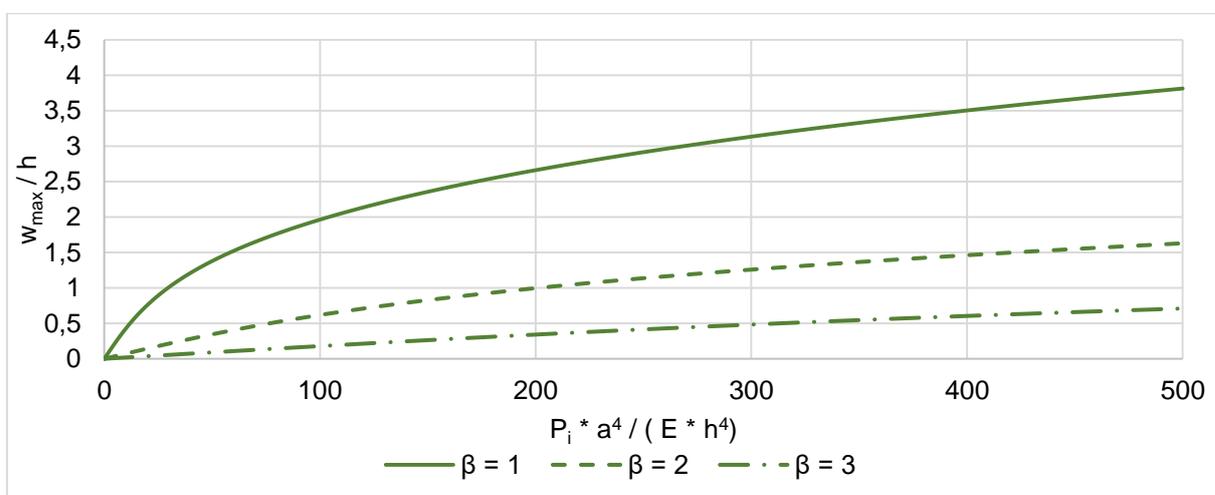
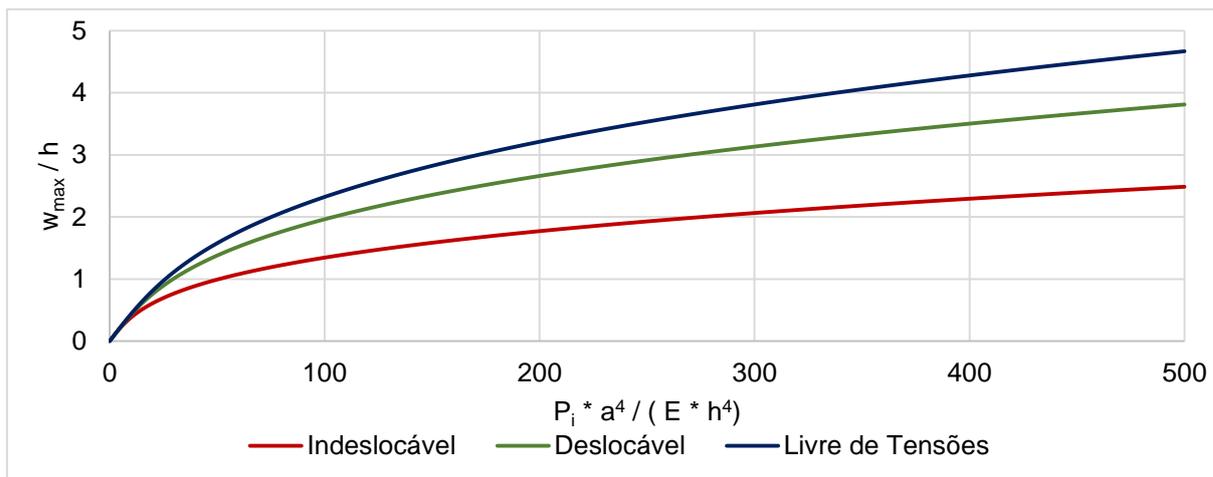
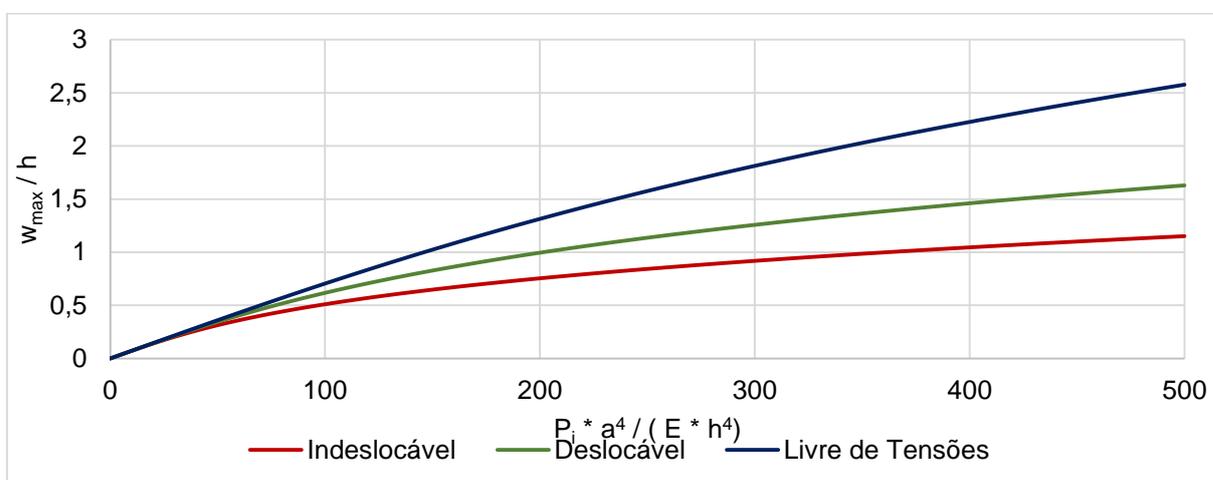


Figura 19 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado, caso deslocável



(a)



(b)

Figura 20 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Simplesmente Apoiado (a)  $\beta = 1$ ; (b)  $\beta = 2$

### 3.1.3. Tensões de Airy

Nesta etapa, é avaliada a influência das tensões provenientes do esforço da membrana com relação às tensões totais (tensões provenientes da flexão somados com as do esforço da membrana). Para cada condição de tensão de placa, conforme apresentado pela Tabela 3, são abordadas tais tensões.

- Caso I: Caso Livre de tensões

De acordo com YAMAKI (1961), a equação geral de Airy é dada pela Equação (79), em que as características de  $\Phi_{p,q}$ ,  $p'_x$  e  $p'_y$  são dadas de acordo com as condições de contorno da placa e também as condições de tensões.

Para este caso, sistema livre de tensões, os processos de cálculo tornam-se mais complexos, visto que são manipuladas duas equações que possuem somatórios duplos de Fourier (solução particular e homogênea), Equações (79) e (82). Desta forma, apenas é descrito o procedimento de como foram as etapas até a definição das relações entre tensão proveniente do esforço da membrana e tensão total (esforços de flexão e membrana somados).

Conforme Equação (46), as tensões totais são dadas pelas segundas derivadas das equações de Airy. Porém como as tensões de flexão são já determinadas, Equações (17) à (19), considera-se que as tensões provenientes do esforço da membrana sejam calculadas com base nas tensões de Airy. Nisso, é possível determinar as tensões em função das coordenadas de qualquer ponto na placa e em função da amplitude dinâmica. Desta forma, aplica-se a Equação (79) na Equação (46), encontrando então as tensões de Airy em função dos parâmetros apresentados pela Tabela 3, além das características físicas e geométricas da placa. Vale ressaltar que tal expressão torna-se extensa à medida que o valor de  $n$  aumenta conforme for a necessidade de convergência da equação. Para o caso, considerou-se que o número máximo de termos corresponde a 1.

Pelo mesmo procedimento são calculadas as tensões de flexão, aplicando a Equação (68) nas Equações (17) à (19) tem-se:

$$\sigma_{xx}^b = \frac{\pi^2 E z}{a^2 (1 - \nu^2)} A(t) (1 + \nu \beta^2) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (107)$$

$$\sigma_{yy}^b = \frac{\pi^2 E z}{a^2 (1 - \nu^2)} A(t) (\nu + \beta^2) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (108)$$

$$\sigma_{xy}^b = -\frac{\pi^2 E z}{ab(1+\nu)} A(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (109)$$

As maiores tensões da estrutura ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ). Desta forma, as tensões de flexão são:

$$\sigma_{xx}^b(0,0,t) = \frac{\pi^2 E z}{a^2(1-\nu^2)} A(t)(1+\nu\beta^2) \quad (110)$$

$$\sigma_{yy}^b(0,0,t) = \frac{\pi^2 E z}{a^2(1-\nu^2)} A(t)(\nu + \beta^2) \quad (111)$$

$$\sigma_{xy}^b(0,0,t) = 0 \quad (112)$$

Aplicando a relação entre a tensão dos esforços de membrana atuante no sistema e a tensão total (esforços de flexão somados à membrana), tem-se:

$$r_x = \frac{\sigma_{xx}^m(0,0,t)}{\sigma_{xx}^b(0,0,t) + \sigma_{xx}^m(0,0,t)} \quad (113)$$

$$r_y = \frac{\sigma_{yy}^m(0,0,t)}{\sigma_{yy}^b(0,0,t) + \sigma_{yy}^m(0,0,t)} \quad (114)$$

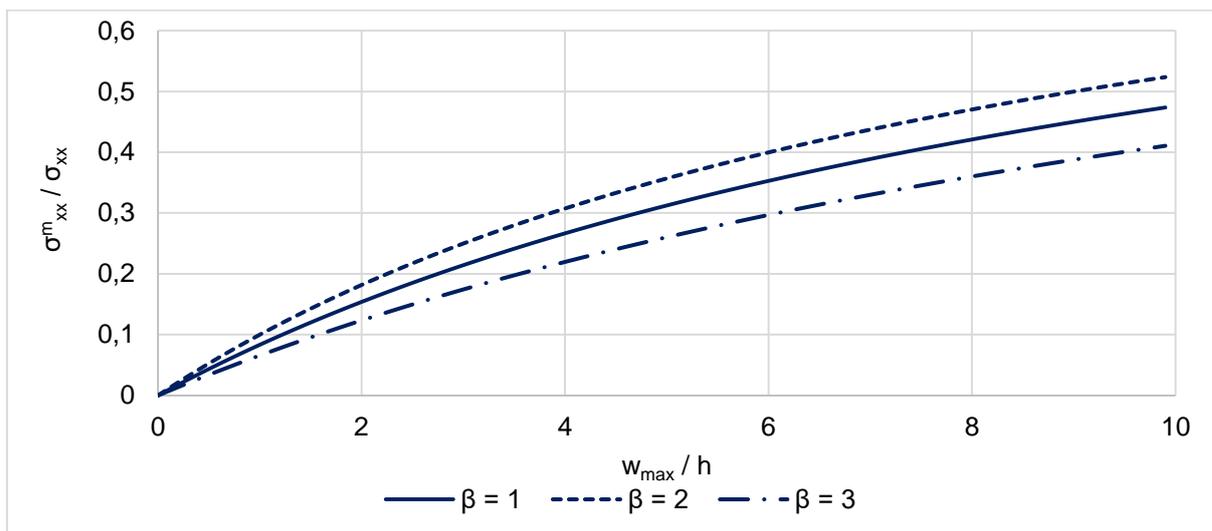
Onde:

$r_i$  Razão entre as parcelas de tensões provenientes do esforço da membrana com relação às tensões totais no centro da placa.

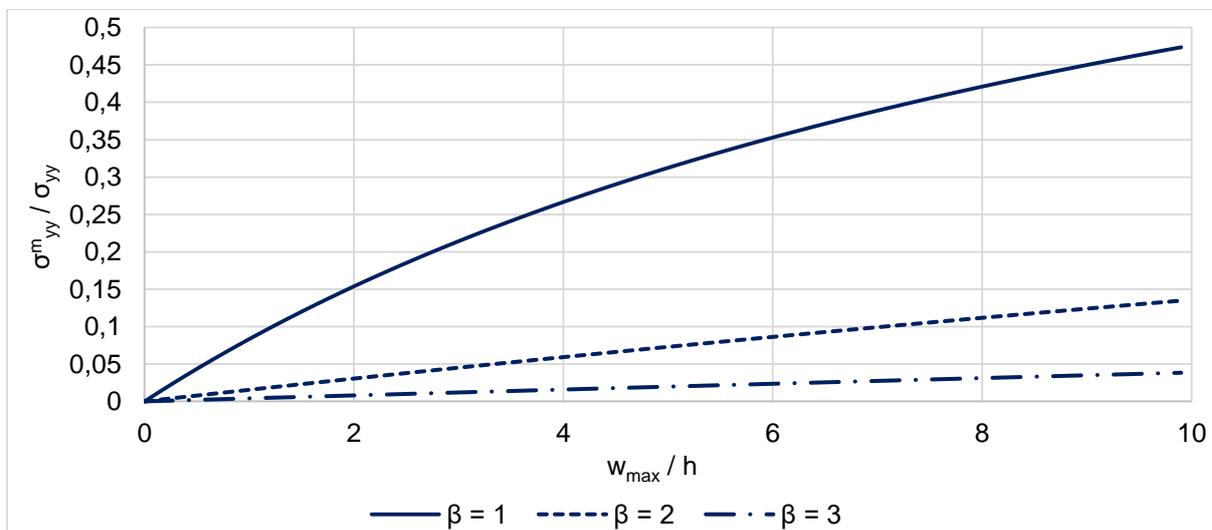
Plotando o gráfico referente às relações apresentadas pelas Equações (113) e (114), tem-se para  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  a Figura 21 (a) e para  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ , a Figura 21 (b).

Observa-se que, neste caso, houve um comportamento não esperado quando é avaliada a relação  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ , Figura 21 (a), em que a maior razão é registrada para  $\beta = 2$ , seguido de  $\beta = 1$ . Tal desempenho da estrutura em resposta à solicitação é dada como o oposto do pressuposto, sendo o conjecturado como  $\beta = 1$  a maior relação das tensões, seguidos de  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Neste caso, averigua-se que para a maior relação obtida,  $\beta = 2$ , a razão entre tensões de membrana e tensões tais são de 0,5268, enquanto para  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$  encontra-se 0,4761 e 0,4144, respectivamente, quando considerado que  $w_{\max}/h$  é igual a 10. Desta forma, é possível aferir que  $\beta = 2$  corresponde à 110,64% e 127,12% de  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.



(a)



(b)

Figura 21 - Relação entre  $\sigma^m_{ij} / \sigma_{ij} \times w_{\max} / h$  - Simplesmente apoiado: Caso Livre de tensões; (a)  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$

Com relação a  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$ , Figura 21 (b), verifica-se que as razões são maiores para  $\beta = 1$ , sucessivo de  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente. Pelo mesmo processo de análise, é observado um comportamento inverso, sendo o esperado a maior razão ser

dada por  $\beta = 3$  e a menor  $\beta = 1$ , visto que o caminho de tensões tende a ser intensificado quanto menor o lado  $b$  da placa for com relação ao lado  $a$ . Ambos os comportamentos a serem esperados são retratados com clareza nos casos indeslocável e deslocável, apresentados nos dois tópicos seguintes.

Para este, tem-se que  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  equivalem à 0,4761, 0,1352 e 0,03827, respectivamente, quando  $w_{\max}/h$  é igual a 10. Desta forma,  $\beta = 1$  é dado por ser 3,52 e 12,44 vezes maior que  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , nesta devida ordem.

- Caso II: Caso Indeslocável

Para o caso de condições de apoio indeslocável, pode-se consultar as especificações na Tabela 3. Com isso, com base na Equação (77), referente à solução particular da equação diferencial, substituindo-a nas relações apresentadas pela Equação (46) é possível determinar as tensões de membrana em função das características físicas e geométricas da estrutura:

$$\sigma_{xx}^m = \frac{\pi^2 E [A(t)]^2}{8a^2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{1 + \beta \nu^2}{1 - \nu^2} \right] \quad (115)$$

$$\sigma_{yy}^m = \frac{\pi^2 E [A(t)]^2}{8a^2} \left[ \beta^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{\nu + \beta^2}{(1 - \nu^2)} \right] \quad (116)$$

$$\sigma_{xy}^m = 0 \quad (117)$$

Como as maiores tensões ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ), as Equações (115) e (116) podem ser reescritas como:

$$\sigma_{xx}^m(0,0,t) = \frac{\pi^2 E [A(t)]^2}{8a^2} \left[ 1 + \frac{1 + \beta \nu^2}{1 - \nu^2} \right] \quad (118)$$

$$\sigma_{yy}^m(0,0,t) = \frac{\pi^2 E [A(t)]^2}{8a^2} \left[ \beta^2 + \frac{\nu + \beta^2}{(1 - \nu^2)} \right] \quad (119)$$

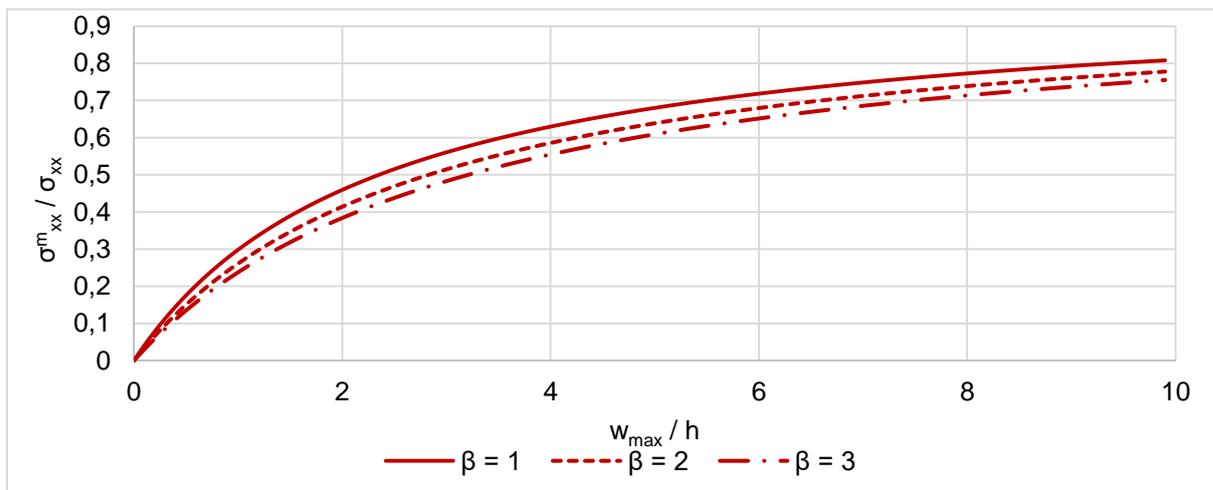
Considera-se que as tensões de flexão são as mesmas para qualquer caso de condição de tensão de membrana (visto que tais tensões são dependentes somente das condições de contorno), ou seja, Equações (110) e (111). Desta forma, tendo as expressões para as tensões de membrana do caso indeslocável, Equações (118) e (119), pode-se aplicar a formulação das Equações (113) e (114). Com isso:

$$r_x = \frac{\frac{A(t)}{h}}{\frac{4(1+\nu\beta^2)}{2+\nu\beta-\nu^2} + \frac{A(t)}{h}} \quad (120)$$

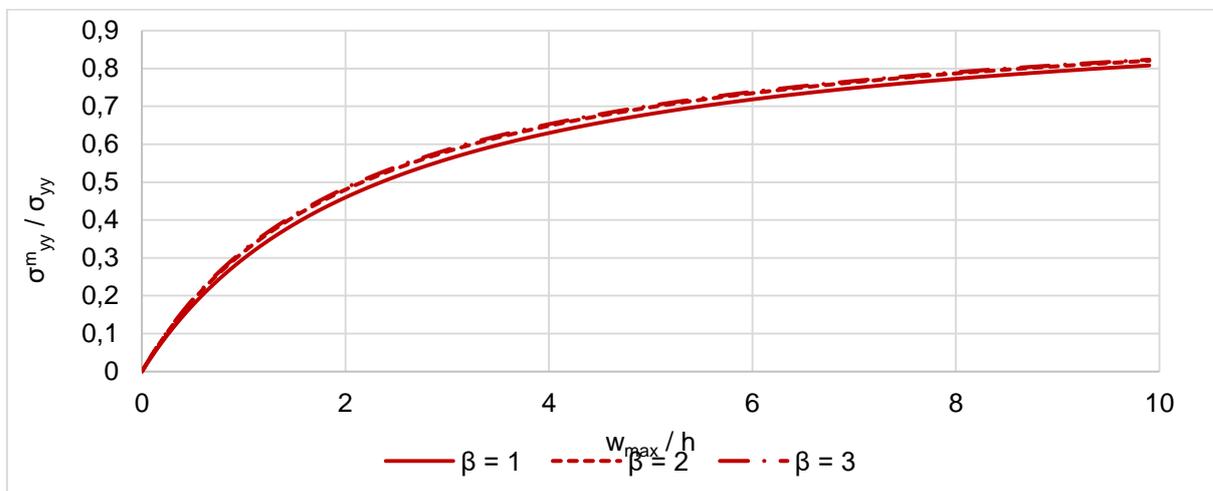
$$r_y = \frac{\frac{A(t)}{h}}{\frac{4(\nu+\beta^2)}{2\beta^2+\nu-\beta^2\nu^2} + \frac{A(t)}{h}} \quad (121)$$

Desta forma, plotando o gráfico referente às relações apresentadas pelas Equações (120) e (121), apresenta-se a Figura 22. Para  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ , Figura 22 (a), são maiores a medida que  $\beta$  aumenta. Isto é justificado pelo fato de que a dimensão  $a$  da placa torna-se muito maior que  $b$ , ocasionando um aumento da rigidez da placa no sentido da menor direção. Ou seja, quanto maior for a razão  $\beta$ , a placa tende a se aproximar de uma estrutura reticulada com uma direção preferencial, ocasionando a perda da preferência pelo menor eixo. Em acréscimo à isto, de acordo com o apresentado pela Figura 18, à medida que a razão  $\beta$  aumenta, os deslocamentos da estrutura são menores. Verificando que as tensões da placa são diretamente proporcionais às características físicas e geométricas da estrutura e, principalmente, à amplitude, isto implica uma maior rigidez no sistema. Desta forma, o efeito da membrana é evidenciado com maior intensidade na direção da menor dimensão.

Verifica-se que no processo da razão  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ , encontram-se relações de 0,8079, 0,7777 e 0,7551 para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente. Com base nisso, avalia-se que  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  para  $\beta = 1$  corresponde à um valor de 3,88% e 6,99% relacionados aos outros  $\beta$  mencionados. Contudo, para relações  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$  evidencia-se que os  $\beta$  apresentados podem ser aproximados para um único valor, como é presenciado na Figura 22 (b), que no caso corresponde à 0,8172.



(a)



(b)

Figura 22 - Relação entre  $\sigma_{ij}^m / \sigma_{ij} \times w_{\max} / h$  - Simplesmente apoiado: Caso Indeslocável; (a)  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$

- Caso III: Caso Deslocável

O procedimento de determinação das tensões neste caso é semelhante ao apresentado para o caso indeslocável. Para este sistema, a expressão da função de Airy utilizada foi provada e apresentada na Equação (104). Com isso, as tensões relacionadas à membrana, são determinadas substituindo a expressão de Airy na Equação (46):

$$\sigma_{xx}^m = \frac{E\pi^2}{8a^2} [A(t)]^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (122)$$

$$\sigma_{yy}^m = \frac{E\pi^2}{8a^2} [A(t)]^2 \beta^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad (123)$$

$$\sigma_{xy}^m = 0 \quad (124)$$

Como as maiores tensões ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ), as equações acima podem ser reescritas como:

$$\sigma_{xx}^m(0,0,t) = \frac{E\pi^2}{8a^2} [A(t)]^2 \quad (125)$$

$$\sigma_{yy}^m(0,0,t) = \frac{E\pi^2}{8a^2} [A(t)]^2 \beta^2 \quad (126)$$

Considera-se que as tensões de flexão são as mesmas para qualquer caso de condição de tensão de membrana (visto que tais tensões são dependentes somente das condições de contorno), ou seja, Equações (110) e (111). Desta forma, tendo as expressões para as tensões de membrana do caso deslocável, Equações (125) e (126), pode-se aplicar a formulação das Equações (113) e (114). Com isso:

$$r_x = \frac{\frac{A(t)}{h}}{\frac{4(1+\nu\beta^2)}{1-\nu^2} + \frac{A(t)}{h}} \quad (127)$$

$$r_y = \frac{\frac{A(t)}{h}}{\frac{4(\nu+\beta^2)}{(1-\nu^2)\beta^2} + \frac{A(t)}{h}} \quad (128)$$

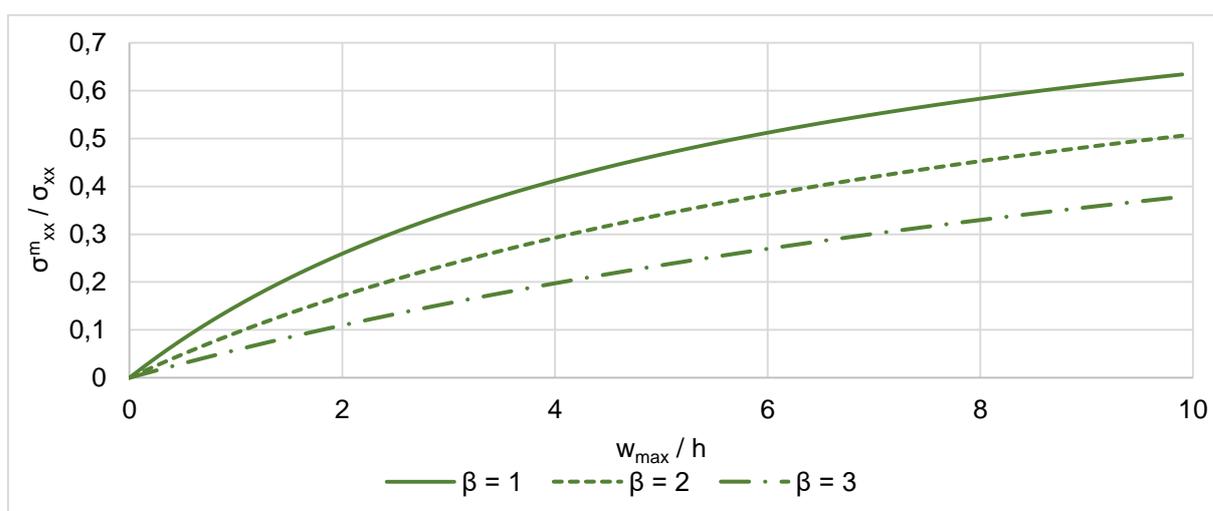
Desta forma, plotando o gráfico referente às relações apresentadas pelas Equações (127) e (128), tem-se para  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  a Figura 23 (a) e para  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ , a Figura 23 (b).

O comportamento das tensões do caso deslocável é próximo ao caso indeslocável, ou seja, para a avaliação na direção do eixo  $x$  as relações  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ , Figura 23 (a), diminuem à medida que  $\beta$  aumenta. Da mesma forma, na análise na direção do eixo  $y$ , as relações  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ , Figura 23 (b), aumentam na proporção de  $\beta$ .

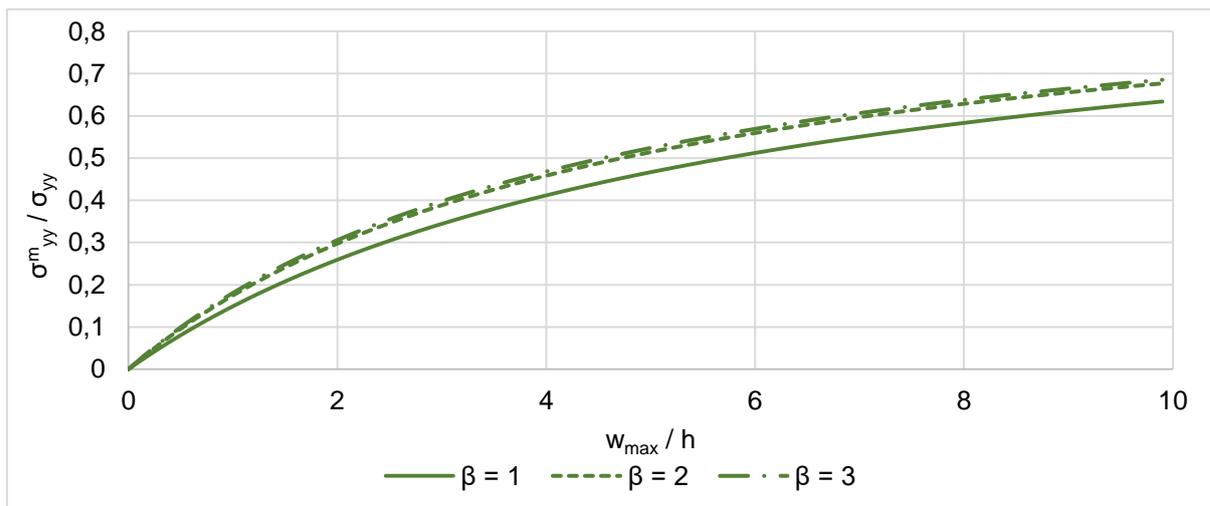
Contudo, é importante salientar que para o caso indeslocável, as relações  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  eram ainda próximas devido ao impedimento da estrutura ter livre deslocamento na direção longitudinal. Logo, no caso deslocável, proveniente à maior liberdade de deslocamento lateral, evidencia-se o maior efeito das tensões de flexão à membrana, principalmente quando se avalia na direção do menor eixo. Isto é perceptível quando se compara as relações  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  e  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ , em que a primeira atinge razões de 0,6 e a segunda, em 0,7.

De acordo com a Figura 23 (a), para valores de  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  são observados  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  iguais 0,6340, 0,5058 e 0,3783, respectivamente. Evidencia-se que o menor valor de  $\beta$  gera  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  iguais a 25,34% e 67,59% maiores em comparação com os outros dois.

Da mesma forma, relações  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$  maiores são evidenciadas quando a relação  $\beta$  aumenta. Considerando que para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  são obtidas as razões iguais a 0,6340, 0,6769 e 0,6854, respectivamente. Considerando que o menor valor atingido corresponde à  $\beta = 1$ , em comparação com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , estas relações podem atingir à 6,76% e 8,10% maior que o primeiro caso.



(a)



(b)

Figura 23 - Relação entre  $\sigma^{m_{ij}} / \sigma_{ij} \times w_{max} / h$  - Simplesmente apoiado: Caso Deslocável; (a)  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$

- Resumo das Tensões

Com base nas equações apresentadas para correlacionar a tensão de membrana e a tensão total de cada condição de tensão, é possível comparar a variação deste comportamento com relação ao apoio e ao eixo. Com isso, considerando para o caso de  $\beta = 1$ , tem-se a Figura 23 e para  $\beta = 2$ , Figura 25 (a) e (b), onde são  $\sigma^{m_{xx}} / \sigma_{xx}$  e  $\sigma^{m_{yy}} / \sigma_{yy}$ , sucessivamente.

Na Figura 23 é verifica-se que as maiores relações são dadas para o caso indeslocável, o seu oposto, livre de tensões, são as menores relações. Este processo é justificado por conta da influência da não linearidade no sistema, conforme observado na Figura 16. Para sistemas com maiores restrições de movimentação lateral, maior a influência do efeito de membrana. Da mesma forma, estruturas com menores restrições, o efeito da membrana é menos preponderante.

Considerando as relações quantitativamente, é dado que na Figura 23 a maior relação das tensões é representada pela condição indeslocável com 0,8095, seguida pelo caso deslocável e livre de tensões, com 0,6363 e 0,4761, respectivamente, para  $w_{max}/h = 10$ . Verifica-se que o caso indeslocável é 1,27 e 1,70 vezes maior que os casos deslocável e livre de tensões, respectivamente.

Para a Figura 25 (a), por conta da inversão apresentada na Figura 21 (a), para  $w_{\max}/h = 10$ , a condição livre de tensões apresenta resultado superior ao deslocável. Desta forma, o resultado apresentado pelo caso indeslocável é dado por 0,7794, seguido pelos casos deslocável e livre de tensões, com 0,5083 e 0,5268, sucessivamente. Assim, o caso indeslocável apresenta-se como sendo 1,53 e 1,4794 maior que os casos deslocável e livre de tensões, respectivamente.

Considerando a Figura 25 (b), verifica-se que o comportamento segue conforme o esperado, com o caso indeslocável possuindo as maiores relações de  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ , seguido do caso deslocável e livre de tensões. Com isto verifica-se que o caso mais restritivo atinge valores de 0,8219 para  $w_{\max}/h = 10$ , enquanto os casos deslocável e livre de tensões atingem 0,6791 e 0,1359, nesta ordem.

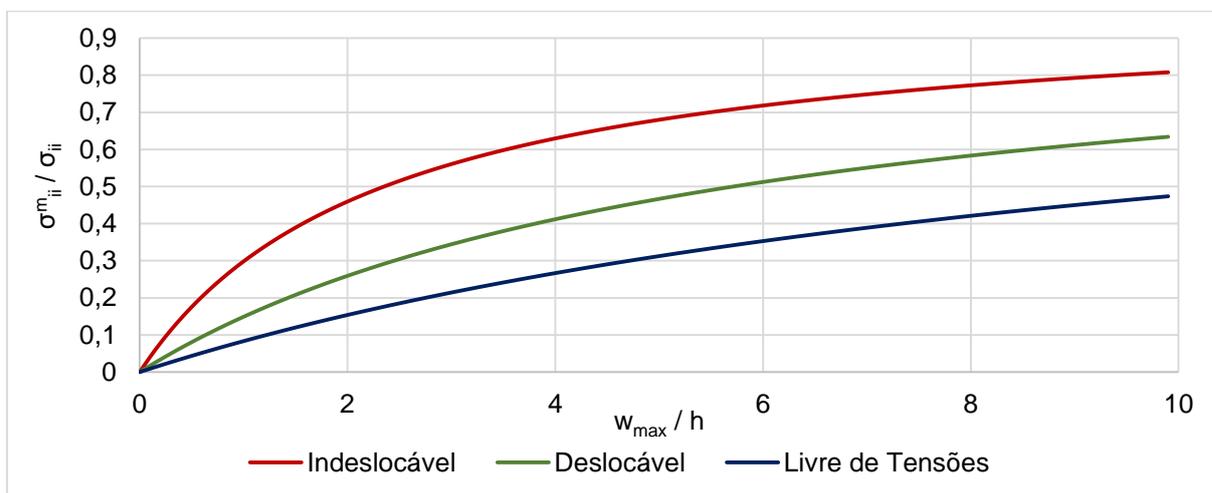
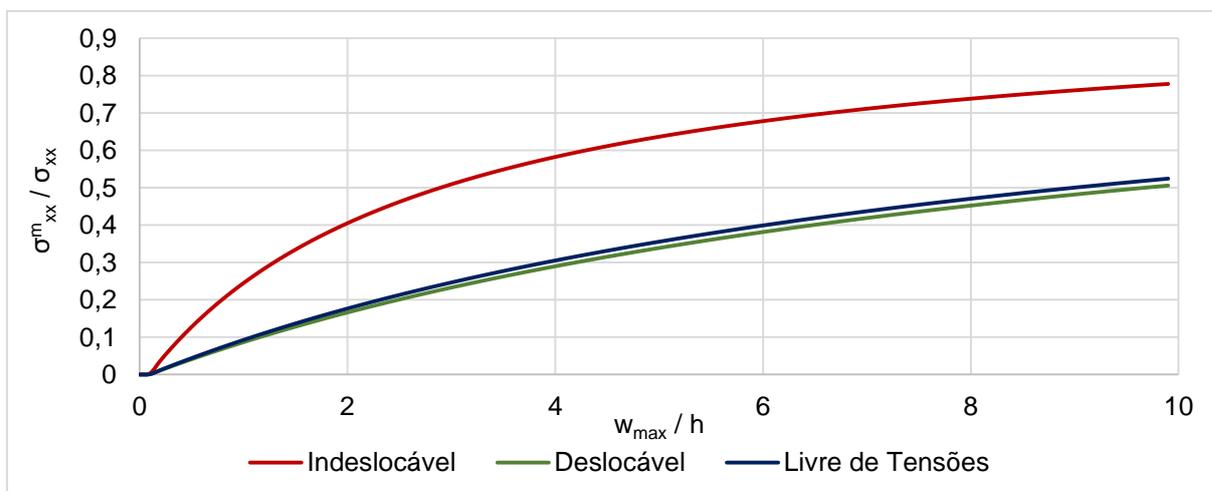
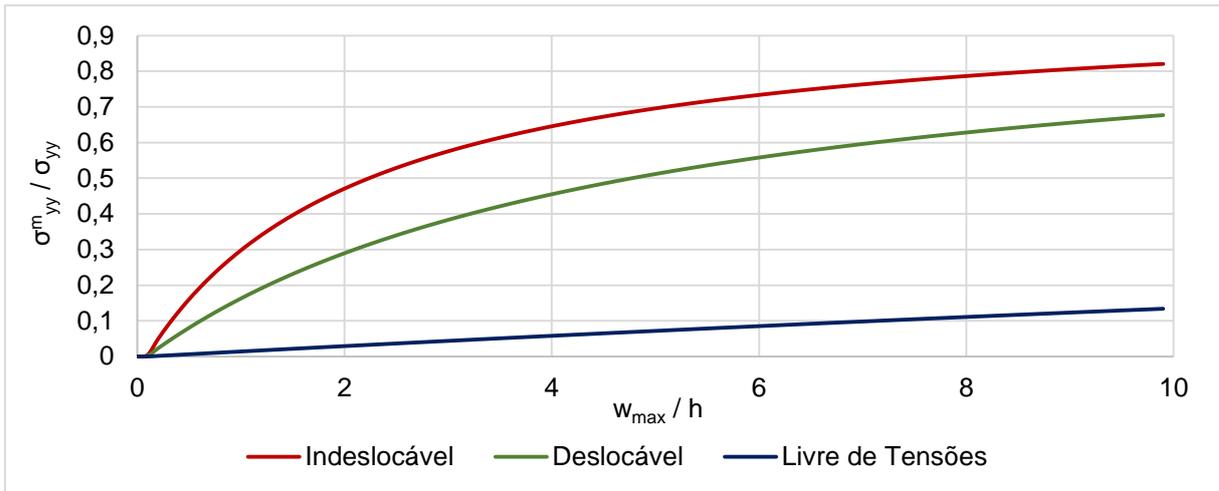


Figura 24 - Relação entre  $\sigma_{ii}^m / \sigma_{ii} \times w_{\max} / h$  - Simplesmente apoiado:  $\beta = 1$



(a)



(b)

Figura 25 - Relação entre  $\sigma_{ij}^m / \sigma_{ij} \times w_{\max} / h$  - Simplesmente apoiado:  $\beta = 2$ ; (a)  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$

### 3.2. Condição de Contorno: Engastado em todas as arestas

Todo o procedimento e as teorias utilizadas para a determinação das equações contempladas no item 3.1 são retomadas para este item. Contudo, para este caso as condições de contorno são todos os bordos engastados.

#### 3.2.1. Funções de Airy

Para o caso de engastado em todas as faces, a solução fornecida por YAMAKI (1961) é dada ainda pela Equação (67) com primeiro harmônico sendo:

$$\psi(x, y) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (129)$$

Empregando a solução de Galerkin para as Equações (47) e (129), tem-se:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} L(w, \phi) \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy = 0 \quad (130)$$

De acordo com a primeira expressão de von Karman, Equação (47), substituindo-a na Equação (130) e realizando simplificações, é possível encontrar a equação diferencial, já apresentada na Equação (71).

A equação dinâmica para placa engastada também possui parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  a serem determinados, onde são dependentes da função de Airy, apresentada na Equação (50). O processo de demonstração da solução particular da equação de Airy, para condição de apoio engastado, se faz necessário do conhecimento da Equação (50). Sabendo que YAMAKI (1961) aborda a Equação (129) como equação do deslocamento vertical, aplicando-a na equação de von Karman, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= E \left[ \left( \frac{\partial^2 (A(t)\psi(x, y))}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (A(t)\psi(x, y))}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (A(t)\psi(x, y))}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^4 \phi &= -\frac{4\pi^4 [A(t)]^2 \beta^2}{a^4} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left[ 2\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - 3 \right] \\ \nabla^4 \phi &= \frac{E [A(t)]^2 \pi^4}{2(ab)^2} \left[ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ &2\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ &\cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (131)$$

A solução particular referente à Equação (131) pode ser escrita como:

$$\phi_1 = \left[ \begin{aligned} &\lambda_1 \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \lambda_3 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \\ &\lambda_4 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \lambda_5 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \\ &\lambda_6 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \lambda_7 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{aligned} \right] \quad (132)$$

Aplicando a Equação (132) no operador bi harmônio, Equação (131), a solução particular corresponde à Equação (133).

$$\phi_1 = - \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{32\beta^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{1}{512\beta^2} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \frac{\beta^2}{32} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \\ \frac{\beta^2}{32(4\beta^2+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \frac{\beta^2}{512} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \\ \frac{\beta^2}{16(\beta^2+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{\beta^2}{32(\beta^2+4)^2} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{array} \right] \quad (133)$$

A solução particular do caso engastado pode ser reescrita de forma matricial, representando os coeficientes do parâmetro  $\varphi_{i,j}$ , apresentado pela Equação (134).

$$\varphi_{i,j} = - \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{32\beta^2} & \frac{1}{512\beta^2} \\ \frac{\beta^2}{32} & \frac{\beta^2}{16(1+\beta^2)^2} & \frac{\beta^2}{32(1+4\beta^2)^2} \\ \frac{\beta^2}{512} & \frac{\beta^2}{32(4+\beta^2)^2} & 0 \end{array} \right] \quad (134)$$

Com relação à solução homogênea, a demonstração encontra-se apresentada no APÊNDICE B.

A seguir, são apresentadas as demonstrações de determinação dos parâmetros presentes na Equação (78), com base nas condições de tensões contempladas pela Tabela 3, para o caso de apoio engastado.

- Caso I: Sistema livre de tensões

Os parâmetros  $A_n$  e  $B_n$  referentes à solução homogênea continuam sendo calculados com base na Equação (82), contudo, para o caso engastado, é implementado na expressão do somatório o número de parâmetros  $p = q = 2$ . A mesma demonstração pode ser adotada para ambos os tipos de condições de contorno (simplesmente apoiado e engastado), visto que as expressões das soluções homogênea e particular da equação diferencial de Airy podem ser escritas como série

de Fourier. Desta forma, adota-se a Equação (79) como expressão geral de Airy e a Equação (84), solução homogênea, é a mesma para o caso de apoio engastado.

Com base nas informações da Tabela 3, com os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  determinados, o processo de solução de  $p'_x$  e  $p'_y$  torna-se mais fácil, visto que o número de incógnitas diminui. Assim, verifica-se que  $p'_x$  e  $p'_y$  são zero.

- Caso II: Sistema Indeslocável

O desenvolvimento para este caso, considerando o apoio engastado, é o mesmo abordado no item 3.1.1. Com base nisso, deve-se obedecer às condições de tensão apresentadas pela Tabela 3. Ou seja, para o caso indeslocável, as condições são dadas pelas Equações (85) e (86).

Após a determinação das quatro expressões derivadas, verifica-se que aquelas avaliadas em  $x = a/2$  e  $x = -a/2$  apresentam o mesmo resultado e o mesmo é válido para  $y = b/2$  e  $y = -b/2$ . Desta forma, aponta-se duas equações com duas incógnitas,  $A_n$  e  $B_n$ . Resolvendo este sistema, é possível determinar que:

$$A_n = 0, B_n = 0 \quad (135)$$

Desta forma, conclui-se que o tipo de condição de contorno indeslocável independe da parcela homogênea da equação de Airy.

Para determinação dos coeficientes  $p'_x$  e  $p'_y$  presentes na Equação (79), utiliza-se o conceito também apresentado pela Tabela 3 que corresponde aos deslocamentos. YAMAKI (1961) apresenta que tais deslocamentos são pertinentes com as tensões de Airy e podem ser aplicados diretamente na integral que relaciona deslocamentos e deformações, apresentadas pelas Equações (88) e (89).

Com isto, aplicando a solução da expressão de Airy, Equação (79), e a expressão referente a condição de contorno de apoio engastado, Equação (129), nas Equações (88) e (89), é possível encontrar as Equações (136) e (137).

$$p'_x = \frac{3\pi^2 E h^2 (\beta^2 \nu + 1)}{32a^2 (1 - \nu^2)} \quad (136)$$

$$p'_y = \frac{3\pi^2 E h^2 (\beta^2 + \nu)}{32a^2 (1 - \nu^2)} \quad (137)$$

- Caso III: Sistema Deslocável

O processo de determinação dos parâmetros  $p'_x$  e  $p'_y$  para este caso é semelhante ao apresentado para o mesmo sistema no item 3.1.1.

Aplica-se a segunda derivada em  $x$  e depois em  $y$  na parcela homogênea da função Airy, Equação (80), conforme apresenta na Tabela 3. A partir disso, para ambos os casos, avalia-se separadamente as equações resultantes em  $x = \pm a / 2$  e em  $y = \pm b / 2$ . Com isso encontram-se duas equações e duas incógnitas. Solucionando o sistema de equações, verifica-se que  $A_n$  e  $B_n$  são zero.

Com os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  determinados, o processo de solução de  $p'_x$  e  $p'_y$  torna-se mais fácil, visto que o número de incógnitas diminui. De acordo com a Tabela 3, a solução do caso deslocável é dado com base na carga aplicada, ou seja,  $P_x$  e  $P_y$ , como apresentados nas Equações (92) e (93), respectivamente. Desta forma, é possível verificar que:

$$p'_x = p'_y = 0 \quad (138)$$

- Resumo dos Parâmetros da Função de Airy

A seguir é apresentada a Tabela 6 com um resumo dos resultados obtidos com base na avaliação da membrana.

Tabela 6 - Coeficientes dos casos de condições de contorno engastado

Caso	$p'_x$	$p'_y$	$\Phi_{p,q}$
Livre de tensões	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q} + \varphi'_{p,q}$
Indeslocável	$\frac{3\pi^2 Eh^2 (\beta^2 \nu + 1)}{32a^2 (1 - \nu^2)}$	$\frac{3\pi^2 Eh^2 (\beta^2 + \nu)}{32a^2 (1 - \nu^2)}$	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$
Deslocável	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$

### 3.2.2. Parâmetros $K_1$ e $K_3$

Os conceitos inerentes aos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  são os mesmos abordados no item 3.1.2 e apresentados pela Equação (71). Independente da condição de contorno, no geral, tais parâmetros são determinados com base nas expressões de energia de flexão e de membrana, indicados por TIMOSHENKO (1959), e relativizados pelo coeficiente da segunda derivada de tal equação diferencial dinâmica, conforme sugerido por FELDGUN (2016). O segundo processo, como sugerido por YAMAKI (1961), corresponde em utilizar o método de Galerkin e expandir a Equação (69).

São apresentadas as demonstrações e expressões dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ , conforme o método da energia e, de acordo com o caso, conforme o método de Galerkin.

- Parâmetro  $K_1$

De acordo com o método da energia, a energia de flexão, como tratada por TIMOSHENKO (1959), é dada pela Equação (95). Considerando a condição de contorno engastado, Equações (67) e (129), aplicando-as na Equação (95), tem-se a Equação (139).

$$U_b = \frac{\pi^4 D [A(t)]^2 (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{8a^2 \beta} \quad (139)$$

Para determinar o parâmetro  $K_1$ , deve-se calcular a energia cinética da estrutura, conforme apresentado na Equação (97), considerando apoio engastado:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{du_z}{dt} \right)^2 dx dy dz = \frac{9abh\rho}{128} \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \quad (140)$$

Finalmente, para determinação do parâmetro  $K_1$ , basta-se dividir a expressão da Equação (139) pelo resultado presente na Equação (140). Desta forma, tem-se:

$$K_1 = \frac{16\pi^4 D (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9a^4 h \rho} \quad (141)$$

Como mencionado no início deste tópico, a expressão dada pela Equação (141) também é obtida a partir do método de Galerkin.

- Parâmetro  $K_3$  – Caso I: Sistema livre de tensões

O processo de verificação da energia  $K_3$  referente ao caso livre de tensões se assemelha à metodologia apresentada para o mesmo caso no item 3.1.2. Para este, os métodos da energia e de Galerkin são apresentados, respectivamente.

Este processo consiste inicialmente em implementar valores suficientes de  $n$  e  $m$  para poder solucionar a Equação (82) de forma que os resultados para  $A_n$  e  $B_n$  sejam consistentes. O segundo passo corresponde em utilizar os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  para aplicar na solução particular de Airy, Equação (79).

Considerando a formulação pelo método da energia, as etapas de solução para determinação de  $K_3$  tornam-se iguais ao apresentado no item 3.1.2, Equação (79) nas duas expressões de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ , Equações (88) e (89). Seguidamente, estas expressões são implantadas nas Equações (10) à (12), para que possam ser incorporadas na equação de energia da membrana, Equação (99). Finalmente, o

parâmetro  $K_3$  é determinado dividindo a energia da membrana pela Equação (140). A expressão não é apresentada por ser extensa.

O método de Galerkin, adotado por YAMAKI (1961), exige que se conheça a função de Airy da estrutura, Equação (79), bem como a equação de deslocamento vertical, Equação (129). Utilizando a 1ª equação de von Karman e aplicando estas três expressões na Equação (69), encontra-se o coeficiente não linear  $K_3$ :

$$K_3 = -\frac{32\pi^4 Eh^2}{9a^2 b^2 \rho} \left[ \Phi_{0,1} + \Phi_{1,0} + \Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{0,2} + \Phi_{2,0} \right] \quad (142)$$

- Parâmetro  $K_3$  – Caso II: Sistema Indeslocável

O processo de demonstração da energia  $K_3$  relacionado ao sistema indeslocável é o mesmo do sistema livre de tensões, com exceção da consideração da parcela homogênea da função de Airy. Apresentam-se os resultados obtidos tanto pelo método da Energia quanto pelo método de Galerkin. Utilizando a metodologia da conservação da energia, o resultado da expressão é dada por:

$$K_3 = -\frac{\pi^4 Eh^2 \left[ \begin{array}{l} \beta^2 v^2 \left( 272\beta^{14} + 2856\beta^{12} + 11273\beta^{10} + 23146\beta^8 + \right. \\ \left. 31506\beta^6 + 23146\beta^4 + 11273\beta^2 + 2856 + \frac{272}{\beta^2} \right) - \\ \beta^2 v \left( 576\beta^{12} + 6048\beta^{10} + 21924\beta^8 + 32904\beta^6 + \right. \\ \left. 21924\beta^4 + 6048\beta^2 + 576 \right) - \\ \beta^2 \left( 560\beta^{14} + 5880\beta^{12} + 22523\beta^{10} + 42622\beta^8 + \right. \\ \left. 53430\beta^6 + 42622\beta^4 + 22523\beta^2 + 5880 + \frac{560}{\beta^2} \right) \end{array} \right]}{144a^4 (1-v^2) (\beta^2 + 1)^2 (\beta^2 + 4)^2 (4\beta^2 + 1)^2 \rho} \quad (143)$$

O método de Galerkin, adotado por Yamaki (1961), exige que se conheça a função de Airy da estrutura, bem como a equação de deslocamento vertical. Estas duas estão apresentadas pelas Equações (133) e (129), respectivamente. Aplicando-as na Equação (130), encontra-se a seguinte expressão para  $K_3$ :

$$K_3 = \frac{\pi^4 E h^2}{72 a^4 \rho (1 - \nu^2)} \left[ \begin{array}{l} -128 \beta^2 (1 - \nu^2) \left( \begin{array}{l} \Phi_{2,1} + 2\Phi_{2,0} + \Phi_{1,2} + 2\Phi_{1,1} \\ + 2\Phi_{1,0} + 2\Phi_{0,2} + 2\Phi_{0,1} \end{array} \right) + \\ 9(2\beta^2 \nu + \beta^4 + 1) \end{array} \right] \quad (144)$$

- Parâmetro  $K_3$  – Caso III: Sistema Deslocável

Seguindo-se o descrito da dedução do caso livre de tensões para o método da energia, em consonância com a Tabela 6, a equação  $K_3$  é dado por:

$$K_3 = \frac{\pi^4 E h^2}{144 b^4 \beta^4 \rho} \left[ \frac{272 \beta^{16} + 2856 \beta^{14} + 11273 \beta^{12} + 23146 \beta^{10} + 31506 \beta^8 + 23146 \beta^6 + 11273 \beta^4 + 2856 \beta^2 + 272}{(\beta^2 + 1)^2 (\beta^2 + 4)^2 (4\beta^2 + 1)^2} \right] \quad (145)$$

Aplicando o método de Galerkin, considerando a 1ª equação de von Karman, a função de Airy, Equação (79) e o deslocamento vertica, Equação (129), aplicando-as na Equação (130), a energia  $K_3$  para sistema deslocável tem-se:

$$K_3 = \frac{32 \pi^4 \beta^2 E h^2}{9 a^4 \rho} \left[ \frac{\beta^2}{64 (4\beta^2 + 1)^2} + \frac{\beta^2}{64 (\beta^2 + 4)^2} + \frac{17 \beta^2}{512} + \frac{17}{512 \beta^2} \right] \quad (146)$$

- Resumo dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$

Desta forma, foram demonstradas as expressões  $K_1$  e  $K_3$ , correspondentes as parcelas linear e não linear da equação diferencial dinâmica, respectivamente, para o caso engastado. Tais parâmetros foram encontrados com base nos métodos da energia e de Galerkin. Para este trabalho, é adotado as soluções fornecidas pelo método de Galerkin, com base nos estudos realizados por YAMAKI (1961). Com isso, é apresentada a tabela com os parâmetros a serem utilizados:

Tabela 7 - Parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  – Apoio Engastado

Caso	$K_3$
------	-------

Livre de tensões	$K_3 = -\frac{32\pi^4 Eh^2}{9a^2 b^2 \rho} \left[ \Phi_{0,1} + \Phi_{1,0} + \Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{0,2} + \Phi_{2,0} \right]$
Indeslocável	$K_3 = \frac{\pi^4 Eh^2}{72a^4 \rho (1-\nu^2)} \left[ \frac{-128\beta^2 (1-\nu^2) \left( \Phi_{2,1} + 2\Phi_{2,0} + \Phi_{1,2} + 2\Phi_{1,1} \right) + 2\Phi_{1,0} + 2\Phi_{0,2} + 2\Phi_{0,1}}{9(2\beta^2\nu + \beta^4 + 1)} \right]$
Deslocável	$K_3 = \frac{32\pi^4 \beta^2 Eh^2}{9a^4 \rho} \left[ \frac{\beta^2}{64(4\beta^2 + 1)^2} + \frac{\beta^2}{64(\beta^2 + 4)^2} + \frac{17\beta^2}{512} + \frac{17}{512\beta^2} \right]$
Caso	$K_1$

Livre de tensões

$$K_1 = \frac{16\pi^4 D(3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9a^4 h \rho}$$

Deslocável

Conforme YAMAKI (1961), pode ser apresentada uma formulação geral dos parâmetros  $K_3$  apresentados pela Tabela 7, com base na Equação (71). Desta forma, a equação geral dinâmica da placa para o caso engastado é dada por:

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \frac{16\pi^4 D(3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9a^4 h \rho} A(t) + \frac{4\pi^2}{3a^2 \rho} (p_x' + \beta^2 p_y') [A(t)]^3 - \frac{32\pi^4 Eh^2}{9a^2 b^2 \rho} \left( \Phi_{0,1} + \Phi_{1,0} + \Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{1,1} + \frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{0,2} + \Phi_{2,0} \right) [A(t)]^3 = \frac{16}{\pi^2 h^2 \rho} F(t) \quad (147)$$

Onde, para o caso deste trabalho,  $P(t)$  corresponde ao carregamento explosivo, dado pela Equação (62).

Pelo mesmo procedimento adotado no caso do apoio simples, é avaliada a comparação entre os parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ , conforme a Figura 26 a seguir:

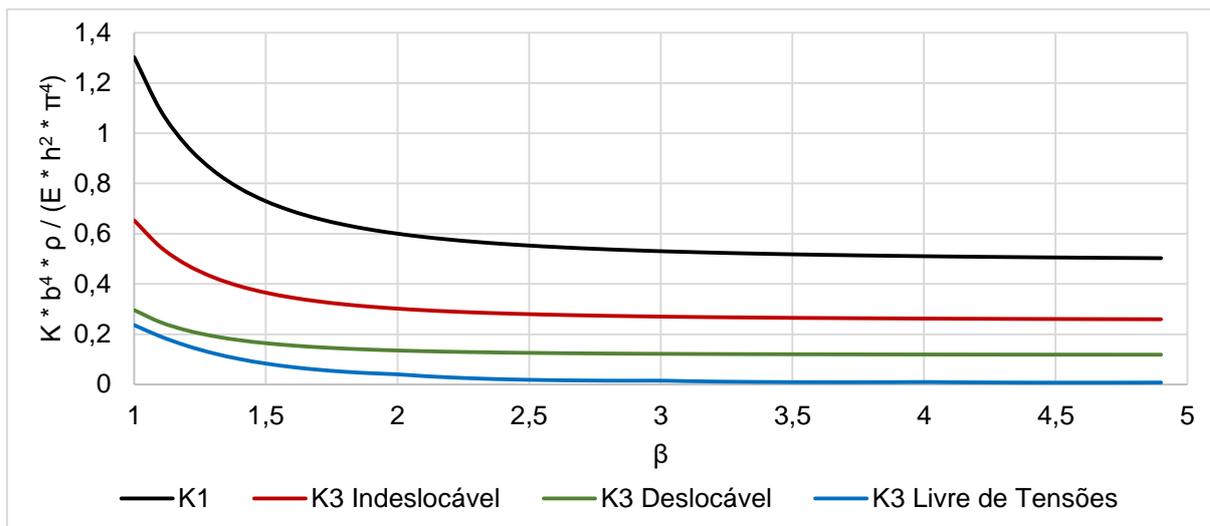


Figura 26 - Comparação entre parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  – Engastado

Com base na Figura 26, verifica-se a influência de cada parâmetro no comportamento estrutural da placa. Como abordado anteriormente,  $K_1$  e  $K_3$  estão relacionados aos regimes linear e não linear da equação diferencial, respectivamente. Observa-se que, para o apoio engastado, a influência do parâmetro linear se sobressai em comparação com o parâmetro não linear, ou seja, a influência do apoio engastado é preponderante com relação à condição de tensões da membrana.

Realizando a comparação entre os parâmetros não lineares, o caso indeslocável é preponderante aos outros. Da mesma forma que o apoio simples, este comportamento é justificado porque maiores restrições são impostas nos bordos, ou seja, todos os deslocamentos são impedidos, incluindo a rotação. Desta forma, a influência da não linearidade geométrica torna-se evidente.

Com relação ao caso livre de tensões, por corresponder ao que possui menores restrições, é permitido com que a placa tenha maior mobilidade de movimentação lateral, sendo baixa a influência da não linearidade. Com isso, é possível verificar que o mesmo é o que possui menos influência da não linearidade geométrica em comparação com as outras condições de tensão, inclusive também com relação ao parâmetro  $K_1$ .

Da mesma forma, o caso deslocável é característico por possuir um deslocamento uniforme nos bordos, provenientes de uma distribuição de tensões normais uniformes pelos mesmos, apresentando um resultado intermediário ao indeslocável e o livre de tensões. Contudo, apesar disto, ainda sim apresenta maior

mobilidade quando comparado ao sistema indeslocável, acarretando menores influências da não linearidade geométrica. Este comportamento também foi observado na condição de apoio simples.

Considerando para  $\beta = 1$ , observa-se os maiores valores dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ . De acordo com a Figura 26, obtêm-se os valores de 1,3024 para o regime linear e 0,2365, 0,6532 e 0,2961 para o regime não linear, sendo os casos livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente. Comparando estes resultados, verifica-se que o regime linear se sobrepõe ao não linear em 550,69% para o caso livre de tensões. Para o sistema indeslocável, a influência do regime linear também é mais evidente, sendo 99,38% maior que o regime não linear. Com relação ao caso deslocável, novamente a linearidade do sistema se sobressai à não linearidade, sendo verificada em 439,85%.

Para o caso de apoio engastado, observa-se uma estabilização dos valores para  $\beta > 3,0$ , onde tem-se os valores de 0,5306 para o sistema linear e 0,0152, 0,2703, 0,1221 para o sistema não linear, sendo os casos livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente. Observa-se que o regime linear corresponde à 34,8391 vezes maior quando comparado ao regime não linear, para o caso livre de tensões. Avaliando para o caso indeslocável e deslocável, o regime linear se sobressai, sendo 1,9630 e 4,3456 vezes maiores que o regime não linear, respectivamente.

### 3.2.5. Deslocamentos Estáticos

O comportamento geral da estrutura com apoio engastado se assemelha bastante ao apoio simples. Desta forma, de acordo com o comportamento adimensional relacionados aos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$ , conforme a Figura 26, é interessante realizar verificação da variação do comportamento do deslocamento total da estrutura com base na relação adimensional dependente de uma carga estática e das características geométricas e físicas da mesma.

De acordo com a Figura 27, um comportamento não linear é perceptível para consideração de  $\beta = 1$ , confrontando com o exposto pela Figura 26, visto que o regime não linear ainda é considerável nas primeiras relações de dimensões da placa. Contudo, conforme o aumento de  $\beta$ , verifica-se que o comportamento do

deslocamento vertical da placa,  $w_{max}$ , tende a comportar-se conforme um regime linear. Assim, para o caso livre de tensões e avaliando-se os deslocamentos da estrutura, Figura 27, é possível ignorar o parâmetro  $K_3$  na construção da equação, visto que, como exposto no item 3.2.4, a influência do parâmetro linear é muito maior que a do linear para o caso livre de tensões. Além disso, verifica-se a influência de uma placa quadrada é mais manifesta que outros valores de  $\beta$ . Para o caso analisado da Figura 27, considerando uma relação adimensional da carga estática de 500, o deslocamento associado à  $\beta = 1$  equivale à 2,8412 e este corresponde à 3,1540 e 13,4018 vezes maiores maiores do que para quando  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Ao contrário do caso livre de tensões, o sistema inadeslocável, apresentado pela Figura 28, possui uma influência da não linearidade evidente para qualquer valor de  $\beta$ , mesmo que a influência do parâmetro  $K_7$  seja maior. Da mesma forma que o caso livre de tensões, as placas quadradas representam as estruturas que ocasionam os maiores deslocamentos. Considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para o caso  $\beta = 1$ , o valor da relação  $w_{max}/h$  é de 2,1337, sendo 2,8702 e 10,2729 vezes maior quando comparado com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Finalmente, o caso deslocável, Figura 28, também apresenta um comportamento não linear evidente para qualquer  $\beta$ , contudo não tão expressivo quando a influencia do parâmetro  $K_7$ , porém não desprezível. Conforme apresentado pela Figura 26, o comportamento adimensional do parâmetro  $K_3$  encontra com resultados intermediários ao livre de tensões e ao indeslocável, o mesmo comportamento foi evidenciado no caso de apoio simples. Da mesma forma, é esperado que a relação  $w_{max}/h$  também gere deslocamentos intermediários aos outros casos. Observa-se na Figura 28, considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para o caso  $\beta = 1$ , o valor da relação  $w_{max}/h$  é de 2,6715, sendo 3,2425 e 8,3458 vezes maior quando comparado com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente.

Com base nos resultados obtidos pelas Figura 27 à Figura 28, torna-se importante avaliar o comportamento de deslocamento estático comparando-se os três casos. Desta forma, a Figura 30 (a) e (b) contempla a comparação deste comportamento para uma placa com características geométricas de  $\beta = 1$  e  $\beta = 2$ , respectivamente.

Verifica-se em ambas as figuras que o caso livre de tensões se sobrepõe aos outros sistemas quando o deslocamento estático da estrutura é avaliado. Isto é

justificado pelo fato deste caso possuir maior mobilidade lateral, sendo, portanto, propício a gerar maiores deslocamentos em relação aos outros dois casos, mesmo que as rotações estejam restritas para o caso.

Para o sistema indeslocável, observa-se que é aquele que gera os menores deslocamentos, visto que, ao contrário do caso livre de tensões, corresponde à estrutura com restrições aos deslocamentos, com isso, a influência da rigidez da membrana é maior quando comparada aos outros casos.

Observando as duas imagens presentes na Figura 29, é interessante averiguar que para  $\beta = 1$ , independe do tipo de escolha da condição de tensão de membrana quando a razão adimensional presente no eixo das abscissas desses gráficos for igual ou inferior à 30. Com relação à  $\beta = 2$ , esse valor aumenta para 137.

Avalia-se a diferença entre as três condições de contorno de membrana, considerando uma relação adimensional para a carga estática de 500, para uma placa com  $\beta = 1$ , o caso livre de tensões apresenta uma razão de 1,3315 e 1,0635 vezes maior que os casos indeslocável e deslocável, respectivamente. Da mesma forma, placas com  $\beta = 2$ , o caso livre de tensões apresenta uma razão de 1,2117 e 1,0933 vezes maior que os casos indeslocável e deslocável, respectivamente.

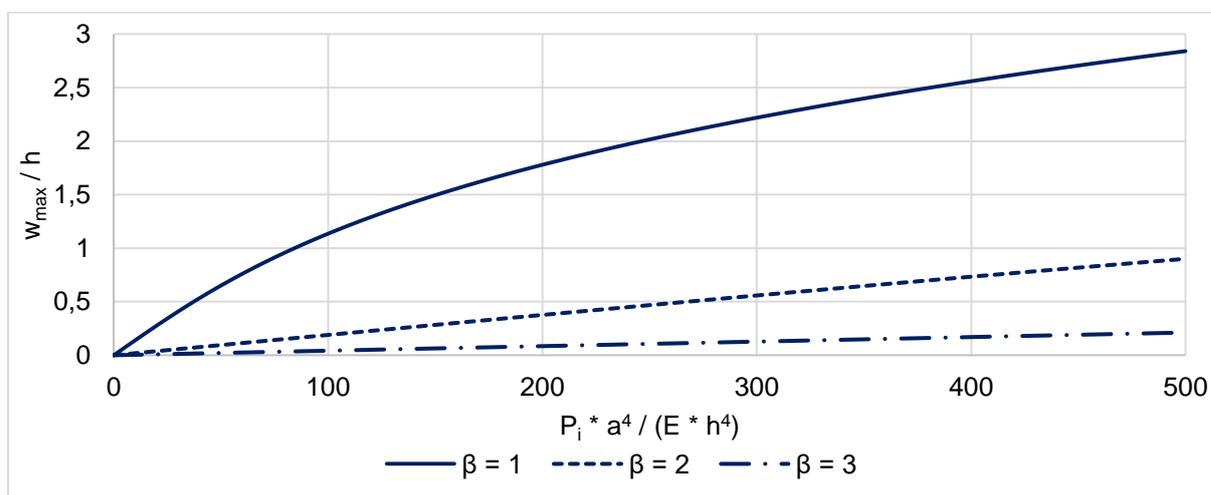


Figura 27 - Relação  $w_{max} / h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso livre de tensões

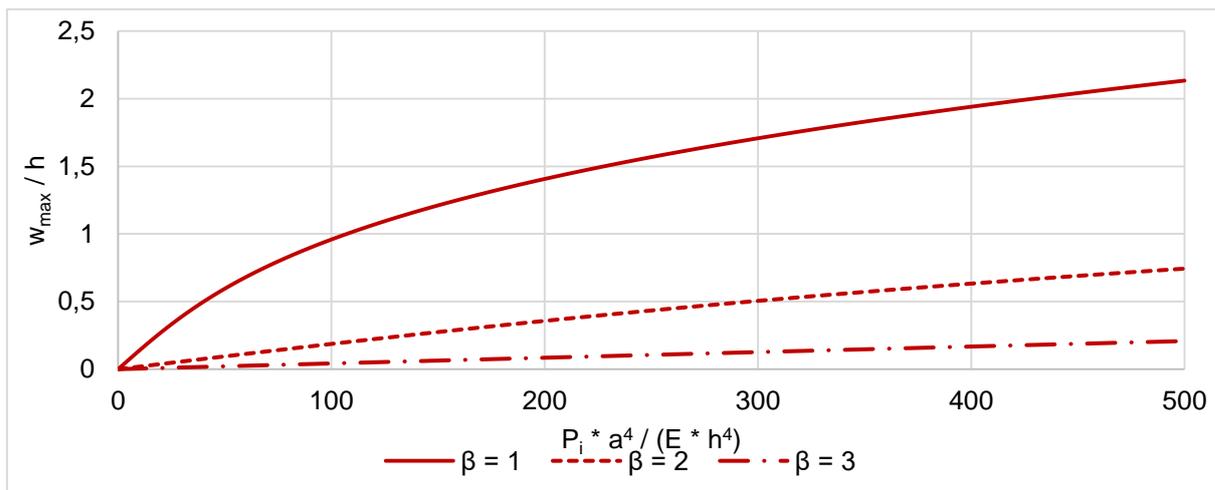


Figura 28 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso indeslocável

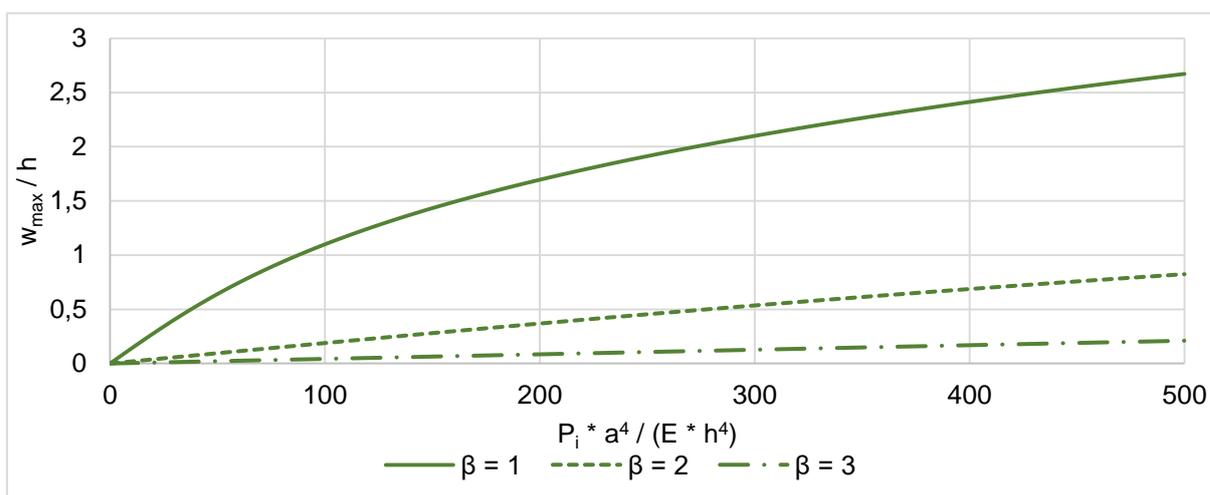
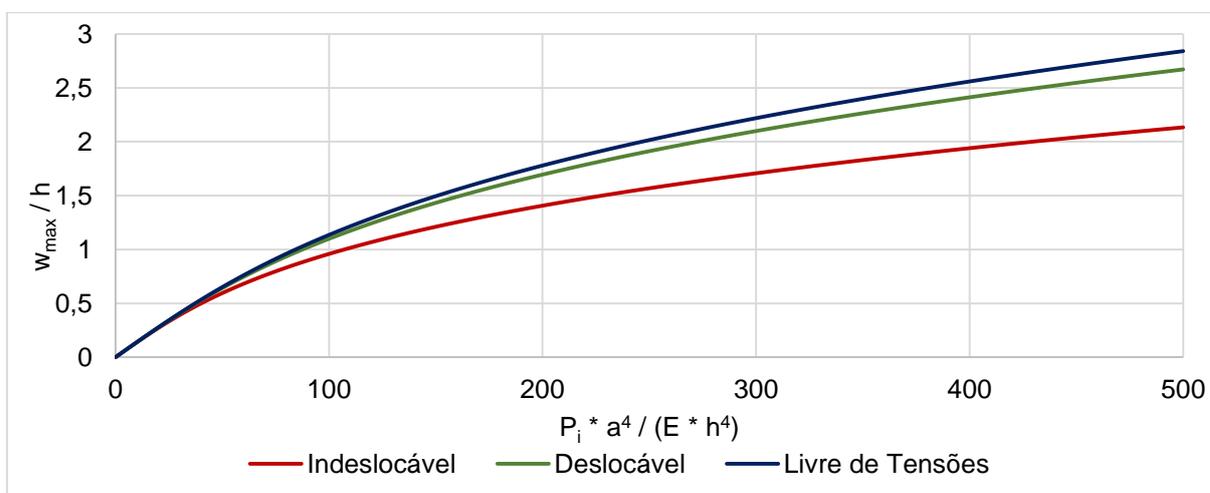
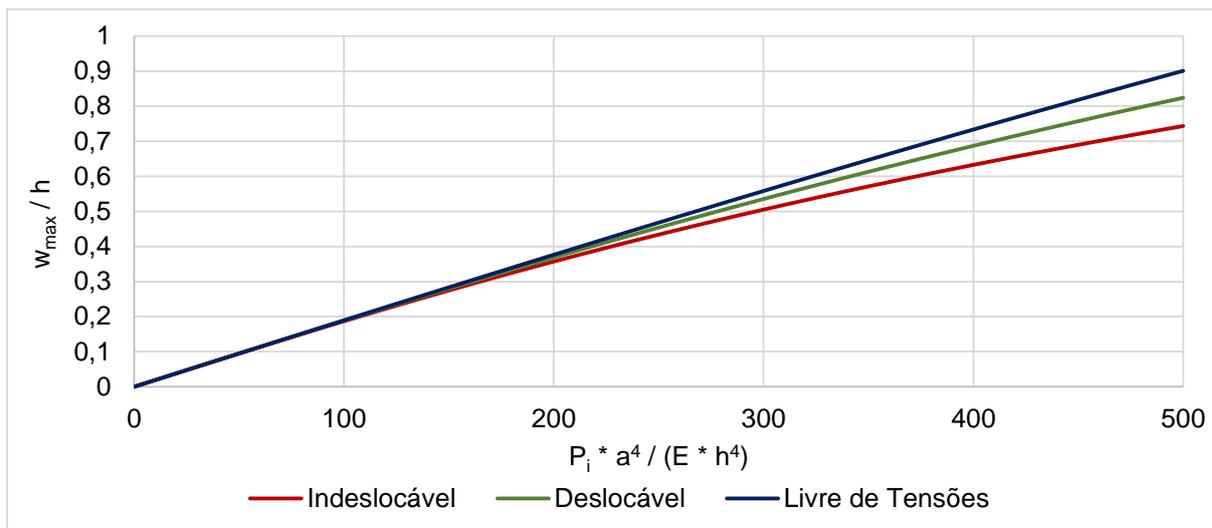


Figura 29 - Relação  $w_{\max}/h$  x Relação adimensional de carregamento estático – Engastado, caso deslocável



(a)



(b)

Figura 30 - Relação  $w_{max} / h$  x Relação adimensional de carregamento estático - Engastado (a)  $\beta = 1$ ;

(b)  $\beta = 2$

### 3.2.3. Tensões de Airy

Nesta etapa, é avaliada a influência das tensões provenientes do esforço da membrana com relação às tensões totais (tensões provenientes da flexão somados com as do esforço da membrana). Para cada condição de tensão de placa, conforme apresentado pela Tabela 3.

- Caso I: Caso Livre de tensões

O procedimento de cálculo é o mesmo para o já apresentado apoio simples. Da mesma forma, os processos de cálculo tornam-se mais complexos, visto que são manipuladas duas equações que possuem somatórios duplos de Fourier (solução particular e homogênea), Equações (79) e (82). Desta forma, apenas é descrito o procedimento de como foram as etapas até a definição das relações entre tensão proveniente do esforço da membrana e tensão total (esforços de flexão e membrana somados).

Conforme Equação (46), as tensões totais são dadas pelas segundas derivadas das equações de Airy. Porém como as tensões de flexão são já determinadas,

Equações (17) à (19), considera-se que as tensões provenientes do esforço da membrana sejam calculadas com base nas tensões de Airy. Nisso, é possível determinar as tensões em função das coordenadas de qualquer ponto na placa e em função da amplitude dinâmica. Desta forma, aplica-se a Equação (79) na Equação (46), encontrando então as tensões de Airy em função dos parâmetros apresentados pela Tabela 3, além das características físicas e geométricas da placa. Vale ressaltar que tal expressão torna-se extensa à medida que o valor de  $n$  aumenta conforme for a necessidade de convergência da equação. Para o caso, considerou-se que o número máximo de termos corresponde a 1.

Pelo mesmo procedimento são calculadas as tensões de flexão, aplicando a Equação (129) nas Equações (17) à (19) tem-se:

$$\sigma_{xx}^b = \frac{2\pi^2 Ez}{(1-\nu^2)} A(t) \left[ \frac{\nu}{b^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{1}{a^2} \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \quad (148)$$

$$\sigma_{yy}^b = \frac{2\pi^2 Ez}{(1-\nu^2)} A(t) \left[ \frac{1}{b^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{\nu}{a^2} \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \quad (149)$$

$$\sigma_{xy}^b = \frac{\pi^2 Ez}{ab(1-\nu^2)} A(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (150)$$

Como as maiores tensões ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ), as tensões de flexão no centro do plano valem:

$$\sigma_{xx}^b(0,0,t) = \frac{2\pi^2 Ez}{a^2(1-\nu^2)} A(t)(1+\nu\beta^2) \quad (151)$$

$$\sigma_{yy}^b(0,0,t) = \frac{2\pi^2 Ez}{a^2(1-\nu^2)} A(t)(\nu+\beta^2) \quad (152)$$

$$\sigma_{xy}^b(0,0,t) = 0 \quad (153)$$

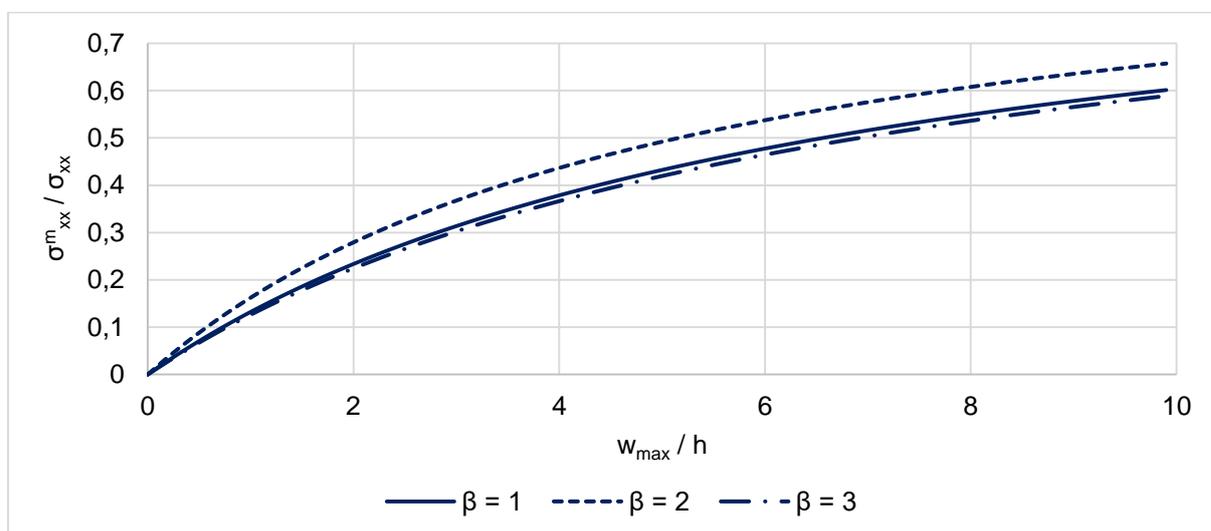
Após isso são aplicadas as relações entre a tensão dos esforços de membrana atuante no sistema e a tensão total (esforços de flexão somados à membrana) nas Equações (113) e (114).

Plotando o gráfico referente às relações apresentadas pelas Equações (113) e (114), tem-se para  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  a Figura 31 (a) e para  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ , a Figura 31 (b).

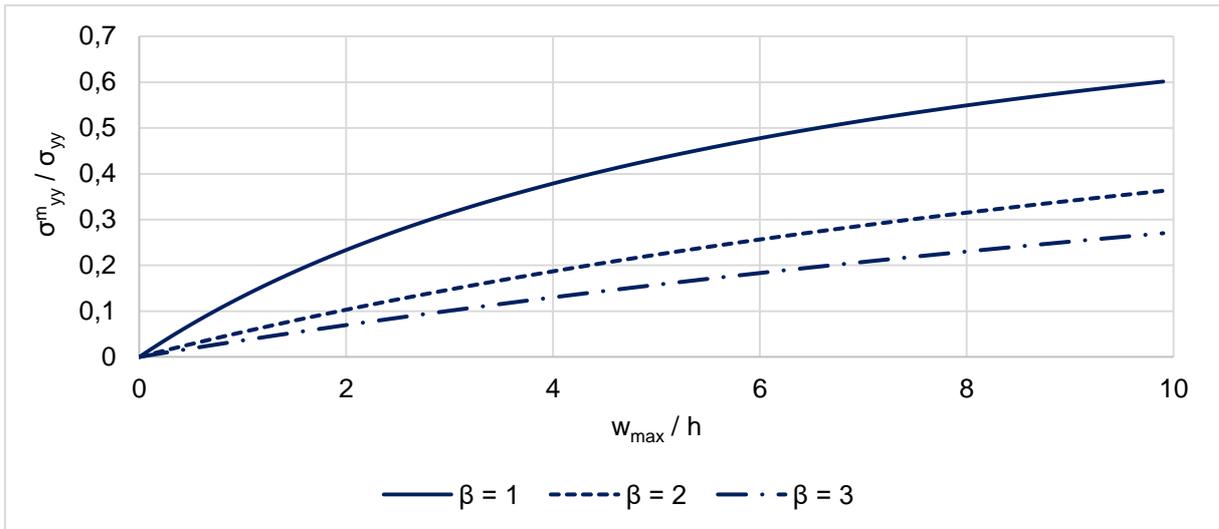
Observa-se que a inversão entre  $\beta = 1$  e  $\beta = 2$  se repete para o caso de todas as arestas engastadas para a condição livre de tensões. Como dado na análise da Figura 21 (a), corresponde ao inverso do esperado, ou seja, a expectativa é dada para  $\beta = 1$  apresentar as maiores relações de  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ , seguidos de  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ .

Neste caso, verifica-se que para a relação  $w_{max}/h = 10$ , a relação entre tensão de membrana e tensão total atinge os valores de 0,6013, 0,6573 e 0,5888, para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente, onde  $\beta = 2$  corresponde a 1,0931 e 1,1163 vezes maior que os sucessivos outros.

Apesar da relação  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  apresentar uma inversão entre  $\beta = 1$  e  $\beta = 2$ , a razão  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$  consiste no comportamento da estrutura condizente com a condição de contorno engastado. Desta forma, verificando que as maiores relações são obtidas para  $\beta = 1$ , sendo seguidas de  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , quantitativamente, estes podem atingir em 0,6013, 0,3627 e 0,2701, sucessivamente, onde  $\beta = 1$  corresponde a 1,6578 e 2,2262 em relação aos outros dois, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 31 - Relação entre  $\sigma_{ij}^m / \sigma_{ij} \times w_{max} / h$  - Engastado: Livre de tensões; (a)  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$

- Caso II: Caso Indeslocável

Para o caso de condições de apoio indeslocável, pode-se consultar as especificações na Tabela 3. Com isso, com base na Equação (133), referente à solução particular da equação diferencial, juntamente com os parâmetros apresentados na Tabela 6, é possível determinar as tensões em função das coordenadas de qualquer ponto na placa e em função da amplitude dinâmica. Assim, considerando a expressão geral contemplada pela Equação (133), aplicando-as na Equação (46), tem-se:

$$\sigma_{xx}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{b^2} \left[ \begin{array}{l} 4\varphi_{1,2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + 4\varphi_{0,2} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{2,1} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \varphi_{0,1} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{array} \right] \quad (154)$$

$$+ [A(t)]^2 \frac{3\pi^2 h^2 E (\beta^2 \nu + 1)}{32a^2 (1 - \nu^2)}$$

$$\sigma_{yy}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{a^2} \left[ \begin{array}{l} \varphi_{1,2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + 4\varphi_{2,0} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \\ 4\varphi_{2,1} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \varphi_{1,0} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{array} \right] \quad (155)$$

$$+ [A(t)]^2 \frac{3\pi^2 h^2 E (\beta^2 + \nu)}{32a^2 (1-\nu^2)}$$

$$\sigma_{xy}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{ab} \left[ \begin{array}{l} 2\varphi_{1,2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \\ 2\varphi_{2,1} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{array} \right] \quad (156)$$

Como as maiores tensões ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ), as podem ser reescritas conforme as Equações (157) e (158).

Vale ressaltar que considerando as equações de tensão, as tensões  $\sigma_{xy}$  são calculáveis. Contudo, considerando a teoria de placas finas de Kirchhoff, estas tensões são dadas como zero.

$$\sigma_{xx}^m(0,0,t) = \frac{\pi^2 E \beta^2 h^2 [A(t)]^2}{32a^4 (1-\nu^2)} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{16a^2 \beta^2}{(4\beta^2 + 1)^2} + \frac{4a^2 \beta^2}{(\beta^2 + 4)^2} + \right) (1-\nu^2) + \\ \frac{8a^2 \beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \\ \frac{a^2}{\beta^2} (8 - 5\nu^2) + 3a^2 \nu \end{array} \right] \quad (157)$$

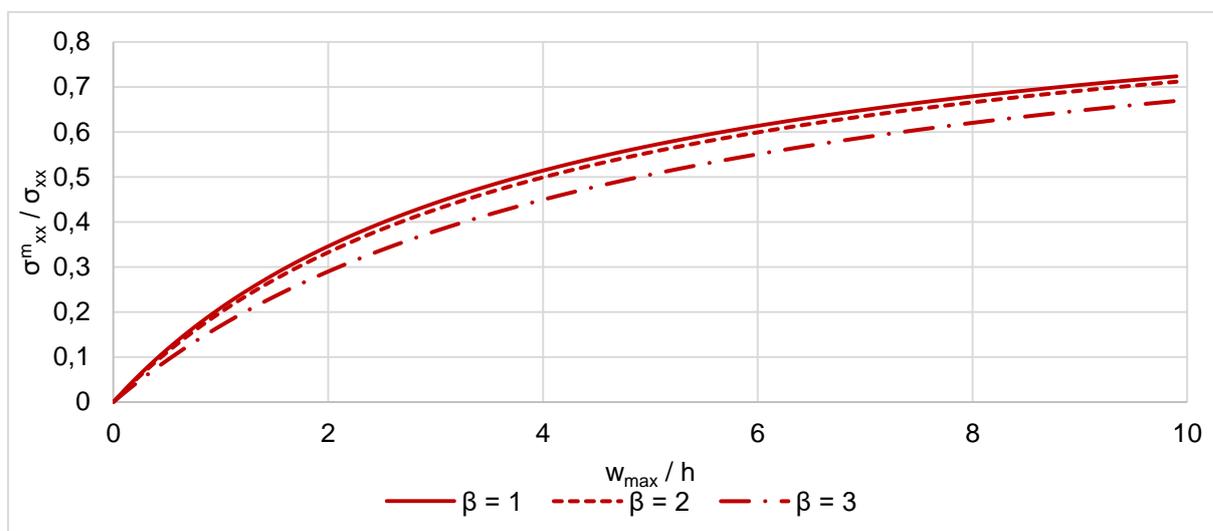
$$\sigma_{yy}^m(0,0,t) = \frac{\pi^2 E h^2 [A(t)]^2}{32a^2 (1-\nu^2)} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{16\beta^2}{(\beta^2 + 4)^2} + \frac{4\beta^2}{(4\beta^2 + 1)^2} + \right) (1-\nu^2) + \\ \frac{8\beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \\ \beta^2 (8 - 5\nu^2) + 3\nu \end{array} \right] \quad (158)$$

Considerando que as tensões de flexão são as mesmas consideradas para as apresentadas pelas Equações (151) e (152), aplicam-se estas tensões e as tensões de membrana, Equações (157) e (158), nas relações  $r_x$  e  $r_y$ , anteriormente já contempladas nas Equações (113) e (114). Com isso, a variação do comportamento da razão de tensões de membrana em função das tensões totais são dados para caso em que  $\beta = 1$ , Figura 32 (a), e para  $\beta = 2$ , Figura 32 (b).

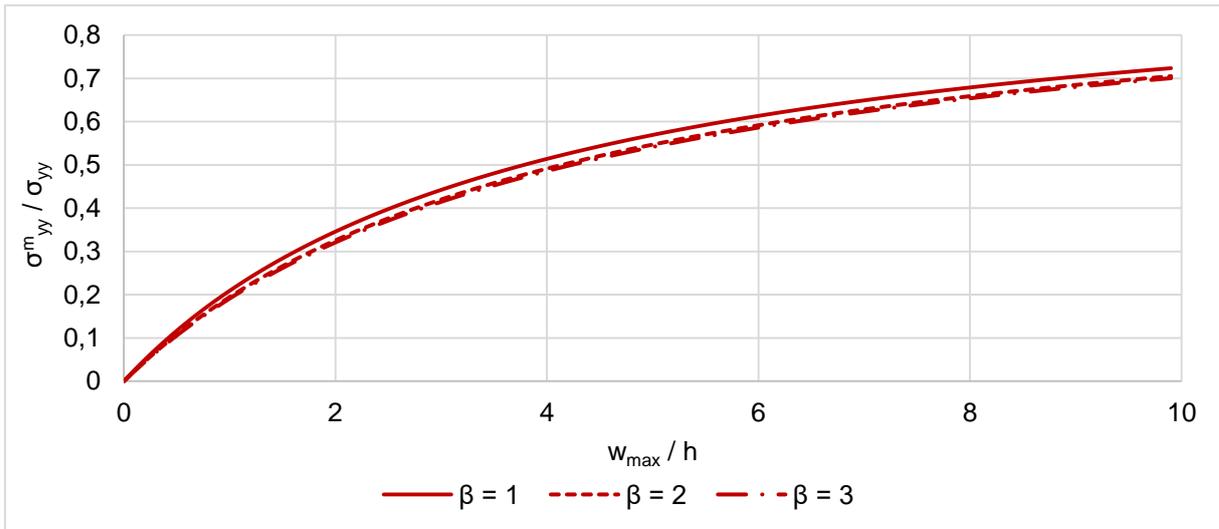
Ao contrário do caso ocorrido no simplesmente apoiado, observa-se que tanto as relações  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$  são maiores quanto maior for a razão  $\beta$ . Isto é justificado com a base teórica utilizada para o caso simplesmente apoiado, onde verifica-se que o aumento das dimensões geométricas da placa,  $\beta$ , a diferença existente entre as razões  $\sigma_{ii}^m / \sigma_{ii}$  tende à diminuir, de forma que a palca assemelha-se à uma estrutura reticulada, onde o efeito das tensões para o menor eixo diminui.

Nota-se que, considerando uma análise quantitativa realizada para as relações  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ , os valores obtidos para estas ponderando-se para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  são dadas por 0,7235, 0,7113 e 0,6688, respectivamente. Com isso, verifica-se que para placas quadradas, o efeito da razão  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$  é apenas 1,71% e 8,17% maior em comparação as placas retangulares.

Outrossim, para análises realizadas em  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ , verifica-se que as relações são dadas por 0,7235, 0,7050 e 0,7004 para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , respectivamente. Para este caso, nota-se que placas quadradas apresentam as maiores razões, sendo ainda 2,62% e 3,29% maior que as outras duas abordadas.



(a)



(b)

Figura 32 - Relação entre  $\sigma_{ij}^m / \sigma_{ij}$  x  $w_{max} / h$  - Engastado: Livre de tensões; (a)  $\sigma_{xx}^m / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma_{yy}^m / \sigma_{yy}$ 

- Caso III: Caso Deslocável

O procedimento de determinação das tensões neste caso é semelhante ao apresentado no caso indeslocável. Para este sistema, a expressão da função de Airy utilizada foi provada e apresentada na Equação (133). Com isso, as tensões relacionadas ao esforço de membrana são:

$$\sigma_{xx}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{b^2} \left[ \begin{array}{l} 4\varphi_{1,2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + 4\varphi_{0,2} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{2,1} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \varphi_{0,1} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{array} \right] \quad (159)$$

$$\sigma_{yy}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{a^2} \left[ \begin{array}{l} \varphi_{1,2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + 4\varphi_{2,0} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \\ 4\varphi_{2,1} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \varphi_{1,0} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{array} \right] \quad (160)$$

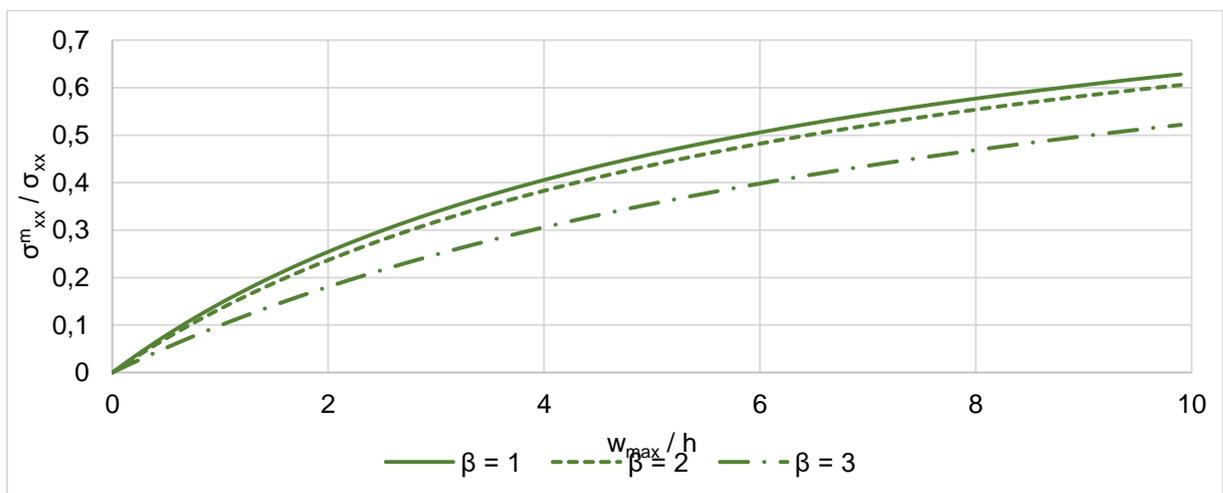
$$\sigma_{xy}^m = -\frac{4\pi^2 h^2 E [A(t)]^2}{ab} \begin{bmatrix} 2\varphi_{1,2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right) + \\ 2\varphi_{2,1} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \\ \varphi_{1,1} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (161)$$

Como as maiores tensões ocorrem no meio do plano e nas coordenadas centrais ( $x = 0$  e  $y = 0$ ), as equações acima podem ser reescritas como:

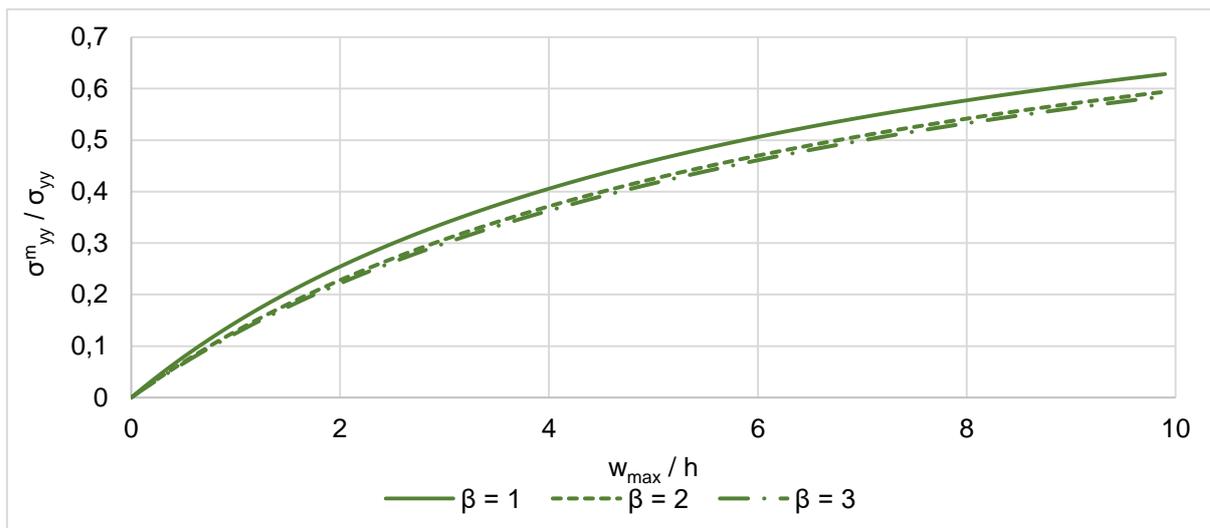
$$\sigma_{xx}^m(0,0,t) = \frac{4\pi^2 E \beta^2 h^2 [A(t)]^2}{8a^2} \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{(4\beta^2 + 1)^2} + \frac{\beta^2}{4(\beta^2 + 4)^2} + \\ \frac{\beta^2}{2(\beta^2 + 1)^2} + \frac{5}{16\beta^2} \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$\sigma_{yy}^m(0,0,t) = \frac{4\pi^2 E h^2 [A(t)]^2}{8a^2} \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{4(4\beta^2 + 1)^2} + \frac{\beta^2}{(\beta^2 + 4)^2} + \\ \frac{\beta^2}{2(\beta^2 + 1)^2} + \frac{5}{16\beta^2} \end{bmatrix} \quad (163)$$

Pelo mesmo procedimento, são utilizadas as Equações (151) à (152) como as tensões de flexão e as Equações (127) e (128), para expressar a razão entre as tensões de flexão e para o caso das tensões de membrana. Desta forma, tem-se para caso em que  $\beta = 1$ , Figura 32 (a), e para  $\beta = 2$ , Figura 32 (b), são:



(a)



(b)

Figura 33 - Relação entre  $\sigma^m_{ij} / \sigma_{ij} \times w_{max} / h$  - Engastado: Deslocável; (a)  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$

O comportamento das tensões do caso deslocável é próximo ao caso indeslocável, para ambas as análises  $\sigma^m_{ij} / \sigma_{ij}$  a razão diminui conforme aumenta  $\beta$ .

Contudo, é importante salientar que para o caso indeslocável, as relações  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$  /  $\sigma_{xx}$  eram ainda próximas devido ao impedimento da estrutura ter livre deslocamento na direção longitudinal. Logo, no caso deslocável, proveniente à maior liberdade de deslocamento lateral, evidencia-se o maior efeito das tensões de flexão à membrana, principalmente quando se avalia na direção do menor eixo. Isto é perceptível quando se compara as relações  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$  e  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$ , em que a primeira atinge razões de 0,6 e a segunda, em 0,7.

De acordo com a Figura 32 (a), para valores de  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  são observados valores de  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$  iguais 0,6281, 0,6057 e 0,5218, respectivamente. Evidencia-se que o menor valor de  $\beta$  gera valores de razões de tensões de membrana e tensões totais iguais a 3,69% e 20,37% maiores em comparação com os outros dois.

Da mesma forma, na Figura 32 (b), relações  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$  maiores são evidenciadas quando a relação  $\beta$  aumenta. Considerando que para  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$  são obtidos as razões das tensões de membrana e tensões totais iguais a 0,6281, 0,5938 e 0,5851, respectivamente. Considerando que o menor valor atingido corresponde à  $\beta = 1$ , em comparação com  $\beta = 2$  e  $\beta = 3$ , estas relações podem atingir à 5,77% e 7,34% maior que o primeiro caso.

- Resumo das Tensões

Com base nas equações apresentadas para correlacionar a tensão de membrana e a tensão total de cada condição de tensão, é possível comparar a variação deste comportamento com relação ao apoio e ao eixo. Assim, considerando para o caso de  $\beta = 1$ , tem-se a Figura 34 e para  $\beta = 2$ , Figura 35 (a) e (b).

Conforme o sistema simplesmente apoiado, na Figura 33 é possível observar que as maiores relações são apresentadas para o caso indeslocável, o seu oposto, livre de tensões, são as menores relações. Da mesma forma, este processo é justificado por conta da influência da não linearidade no sistema, conforme já confrontado com a Figura 26. Ou seja, para sistemas com maiores restrições de movimentação lateral, maior a influência do efeito de membrana. Da mesma forma, estruturas com maiores movimentações laterais, como o caso livre de tensões, o efeito da membrana é menos preponderante.

Considerando as relações quantitativamente, é dado que na Figura 34 a maior relação das tensões é representada pela condição indeslocável com 0,7235, seguida pelo caso deslocável e livre de tensões, com 0,6281 e 0,6013, respectivamente, para  $w_{max}/h = 10$ . Isto pode ser verificado que o caso indeslocável é 1,15 e 1,20 vezes maior que os casos deslocável e livre de tensões, respectivamente.

Para o caso presente na Figura 35 (a), onde é avaliado  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$ , é verificado que, por conta da inversão apresentada na Figura 31 (a), para  $w_{max}/h = 10$ , a condição livre de tensões apresenta resultado superior ao deslocável. Desta forma, o resultado apresentado pelo caso indeslocável é dado por 0,7113, seguido pelos casos deslocável e livre de tensões, com 0,6057 e 0,6573, sucessivamente. Assim, o caso indeslocável apresenta-se como sendo 1,17 e 1,08 maior que os casos deslocável e livre de tensões, respectivamente.

Para a Figura 35 (b), o comportamento se segue conforme o esperado, com o caso indeslocável como possuindo as maiores relações de  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$ , seguido do caso deslocável e livre de tensões. Com isto, quantitativamente, verifica-se que o caso mais restritivo atinge valores de 0,7050 para  $w_{max}/h = 10$ , enquanto os casos deslocável e livre de tensões atingem 0,5938 e 0,3627, nesta ordem.

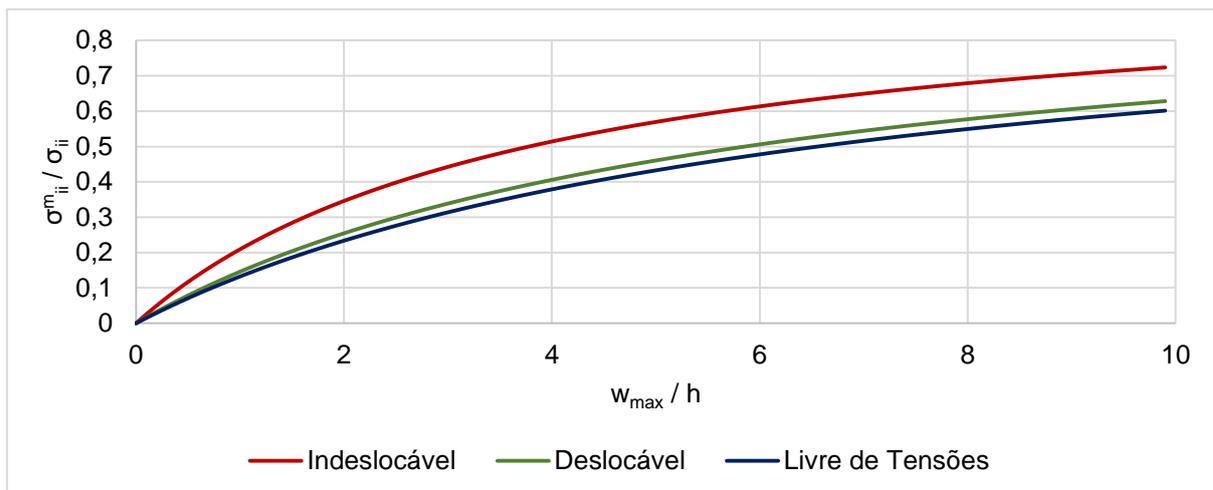
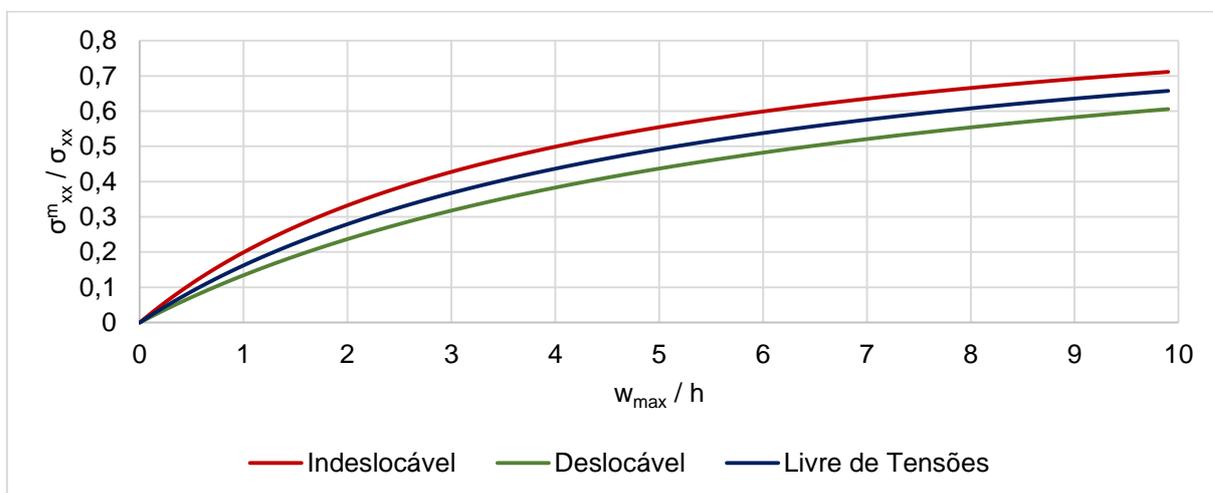
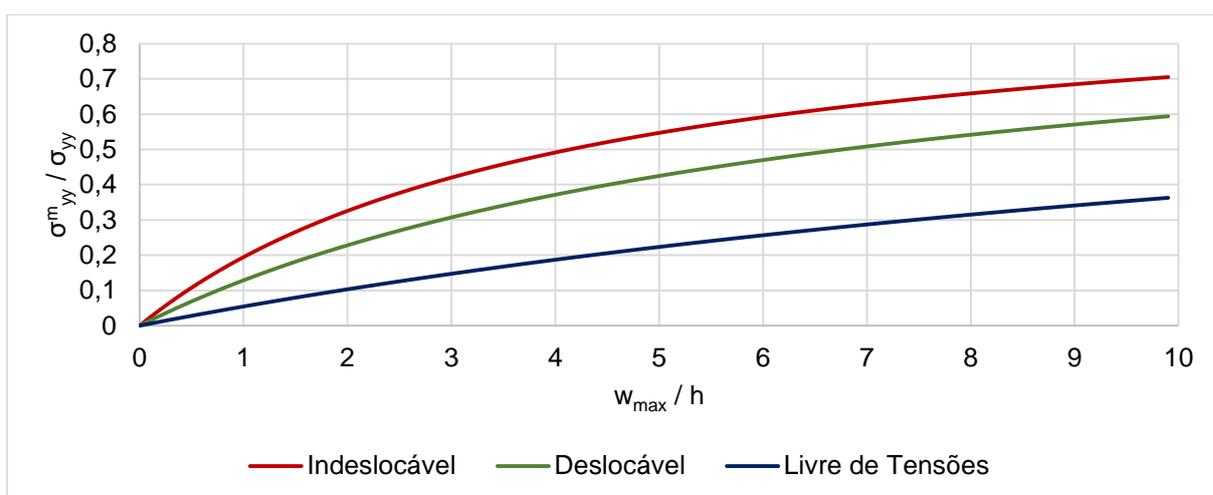


Figura 34 - Relação entre  $\sigma^m_{ij} / \sigma_{ij} \times w_{max} / h$  - Engastado:  $\beta = 1$



(a)



(b)

Figura 35 - Relação entre  $\sigma^m_{ij} / \sigma_{ij} \times w_{max} / h$  - Engastado:  $\beta = 2$ ; (a)  $\sigma^m_{xx} / \sigma_{xx}$ ; (b)  $\sigma^m_{yy} / \sigma_{yy}$

### 3.3. Solução das Equações Diferenciais

Observa-se que, para este caso, a equação diferencial que caracteriza o comportamento dinâmico de uma estrutura de placa com efeito de membrana se dá pela Equação (106), condição simplesmente apoiada, e pela Equação (147).

A determinação da amplitude da placa submetida à carga de explosão tem por base as condições de contorno da própria placa e da membrana, sendo estas últimas possuindo 3 tipos: livre de tensões, indeslocável e deslocável. Conforme cada um, a rigidez associada à deformação faz com que a estrutura possua diferenciadas amplitudes de vibração para uma mesma carga dinâmica aplicada.

Visto que a equação diferencial possui não linearidade, proveniente da rigidez da membrana, caracterizada pelo parâmetro  $K_3$ , deve-se empregar um método numérico para solucioná-la. Optou-se por utilizar o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem. Este processo iterativo corresponde a uma solução aproximada de equações diferenciais ordinárias e parciais. Para equações diferenciais de ordem superior, é necessário separá-las em um sistema de equações de primeira ordem. Por ser um método iterativo, é necessário especificar um passo de tempo. Nesta pesquisa, como trabalha-se com intervalos de tempos pequenos, o passo a ser considerado, utilizando o *software* wxMaxima, é de 0.0001 segundos.

Desta forma, a solução com base em tal método se dá por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Com isso, seja:

$$\frac{dA(t)}{dt} = H(t) \quad (164)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = P(t) - K_1 A(t) - K_3 [A(t)]^3 \quad (165)$$

Onde:

$H(t)$  Função auxiliar de cálculo para resolução de equação diferencial pelo método de *Runge-Kutta*

Aplicando as duas equações acima no método de *Runge-Kutta*, é possível determinar o nível de amplitude para cada instante de tempo. Após isso, substitui-se o valor da amplitude na equação do deslocamento vertical  $u_z$ .

Com base no deslocamento dinâmico obtido a partir do resultado das Equações (164) e (165) e conhecendo o deslocamento estático da estrutura, Figura 17 a Figura 18 bem como Figura 27 à Figura 30, é possível determinar o Fator de Amplificação Dinâmica (FAD):

$$FAD = \frac{w_{\max}}{w_{\text{est}}} \quad (166)$$

Onde

$w_{\max}$  Deslocamento máximo dinâmico

$w_{\text{est}}$  Deslocamento máximo estático

Já com relação à ausência de carga, a equação é caracterizada por ser de vibração livre. Sua solução é conhecida como Equação de Duffing, um modelo de sistema estrutural que inclui a restauração não linear das forças (RAND, 2005). Para este caso, utiliza-se a solução de funções elípticas de Jacobi. Neste caso, a solução sugerida por Yamaki (1961) e por Soudack (1964) é dada por:

$$A(t) = A_0 Cn(\lambda t, k) \quad (167)$$

Onde:

$k$  Função de condições iniciais da integral elíptica de Jacob

$\lambda$  Coeficiente da integral elíptica de Jacob

$A_0$  Relação entre amplitude e espessura da placa. Coeficiente utilizado nas integrais elípticas de Jacob

Substituindo a Equação (167) na (71), considerando vibração livre, tem-se:

$$-\lambda^2 A_0 Cn(1-k^2) + K_1 A_0 Cn - 2k^2 \lambda^2 A_0 Cn^3 + K_3 A_0^3 Cn^3 = 0$$

Com isso é possível determinar que:

$$k = \sqrt{\frac{K_3 A_0^2}{2(K_1 + K_3 A_0^2)}} \quad (168)$$

$$\lambda = \sqrt{K_1 + K_3 A_0^2} \quad (169)$$

O processo de demonstração desta equação diferencial de vibração livre está contemplado no APÊNDICE D.

Considerando que a vibração livre é o comportamento que determina as frequências naturais da estrutura, pode-se obter o período não linear da estrutura diretamente a partir das funções elípticas. Com isso:

$$T_{NL} = \frac{4K(k)}{\lambda} \quad (170)$$

O correspondente período linear é dado por:

$$T_L = \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} \quad (171)$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo de resultados pretende avaliar o comportamento dinâmico tanto da placa, quanto do carregamento nela imposto. Especificamente, será estudado o desempenho da carga explosiva considerando a influência da fase positiva e a carga negativa, sendo estas representadas pelas equações de Friedlander e cúbica, respectivamente.

Este processo vem a contemplar o estudo de deslocamentos máximos conforme a variação da massa de TNT e a distância escalar  $Z$ , localizados no meio da placa, bem como a verificação do tempo de duração da fase positiva com relação aos períodos naturais lineares da estrutura, além da influência da espessura da placa com relação à amplitude. Além disso, o Fator de Amplificação Dinâmica (FAD) da placa é avaliado para cada tipo de condição de contorno de membrana e sua comparação com a análise linear da estrutura.

Vale ressaltar que para este trabalho foi realizada a formulação e equacionamento de placas submetidas a carregamento explosivo, considerando os efeitos de flexão e membrana, para dois tipos de condições de contorno: simplesmente apoiado e engastado em todas as faces. A fim de não tornar o trabalho extenso, para a análise de resultados é apresentado somente o caso de apoio simples, visto que o processo para engaste é similar.

Além disso, é importante ressaltar que um estudo aprofundado com relação às tensões da estrutura não foi realizado porque a equação de deslocamento vertical da placa é representada pelo primeiro harmônico, Equações (68) e (129). Tal aproximação é válida para que o sistema tenha apenas um grau de liberdade na análise dinâmica, porém a correta representação do comportamento da placa deve ser obtida por meio de uma série de Fourier com um número adequado de termos.

Este primeiro harmônico apresenta resultados satisfatórios com relação ao deslocamento, porém avaliando as tensões (que são obtidas pela segunda derivada) o erro torna-se grande, quando comparadas ao real comportamento da estrutura, principalmente quando é considerada a não linearidade geométrica do sistema. Isso pôde ser verificado realizando um estudo numérico estático de uma placa quadrada,

submetida a um carregamento uniformemente distribuído, no *software* ABAQUS (2014) versão 6.14-1.

Considera-se, salvo onde explicitamente especificado, que as condições físicas e geométricas da estrutura de placa e as características de carga são dadas conforme a tabela abaixo:

Tabela 8 - Relação parâmetros para análise dinâmica

Parâmetros	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	200 GPa
Espessura da placa ( $h$ )	0,005 m
Dimensão na direção $x$	1 m
Relação $a/b$ ( $\beta$ )	1
$\nu$	0,3
$\rho$	7700 kg/m <sup>3</sup>
$W_{TNT}$	10 kg
$Z$	5 m / kg <sup>1/3</sup>
Tipo de explosão	Esférica

Com isso, a configuração da estrutura pode ser dada com base na Figura 36 apresentada a seguir:

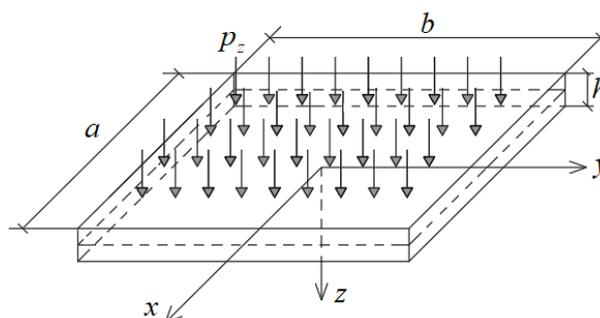


Figura 36 – Características geométricas da placa

Desta forma, considerando as especificações de características geométricas e físicas da estrutura estipuladas na Tabela 8, para a condição de contorno de apoio simples do tipo indeslocável e um carregamento de pressão de 0,03 MPa, para elementos do tipo S4R com comprimento de 50 mm (20 elementos por lado) distribuídos numa malha regular, conforme apresentado pela Figura 37.

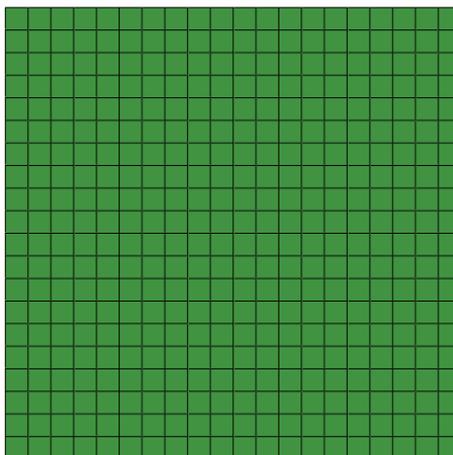


Figura 37 – Malha de 50 mm com elemento S4R

Com relação aos, foram obtidos analiticamente (com o auxílio do *software* wxMaxima) e numericamente (com o auxílio do *software* ABAQUS):

Tabela 9 - Resultados de deslocamentos e tensões obtidos analiticamente e numericamente

Software utilizado	Deslocamento (mm)		$\sigma_{xx}$ e $\sigma_{yy}$ (MPa)	
	Análise Linear	Análise Não Linear	Análise Linear	Análise Não Linear
wxMaxima	54,52	9,49	384,35	120,90
ABAQUS	53,31	8,80	343,41	93,82
Erro (%)	2,26	7,83	11,92	28,86

A distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , considerando uma análise com não linearidade geométrica, podem ser contempladas na Figura 38:

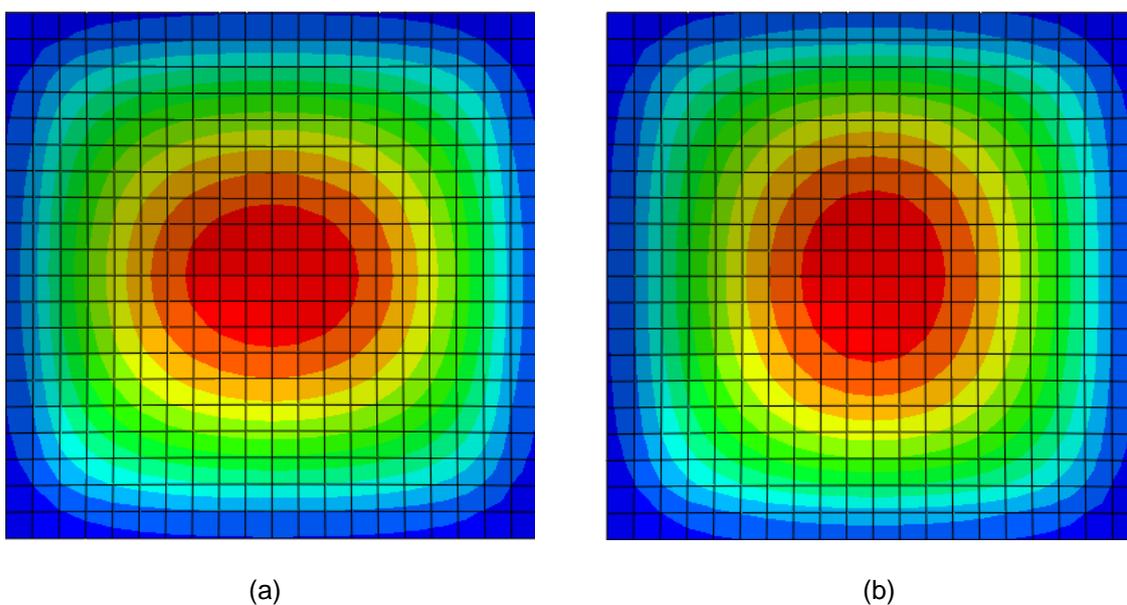


Figura 38 – Distribuição das tensões. (a)  $\sigma_{xx}$  e (b)  $\sigma_{yy}$

É possível verificar, com base nos resultados apresentados pela Tabela 9, que o erro obtido nos deslocamentos é ainda considerado satisfatório, sendo, portanto,

válida a análise dinâmica do sistema. Contudo, considerando o cálculo do erro em comparação com o resultado obtido pelo ABAQUS, a análise não linear se aproxima a 30% de discrepância nas tensões. Conforme apresentado, o resultado analítico apresenta-se conservador por conta da equação de deslocamento vertical utilizada, representada pelo primeiro harmônico.

Antes do processo de avaliação do comportamento estrutural para a análise dinâmica, é importante realizar o estudo de carga em que este trabalho se insere. Ou seja, o escopo do trabalho foi baseado em uma estrutura de placa submetida ao carregamento explosivo.

Este tipo de carregamento possui uma região de sobrepressão e uma segunda fase de sobressão (caracterizada por gerar pressões abaixo da pressão ambiente), como é apresentado na Figura 6. A área entre as curvas e o eixo da abscissa é caracterizada como o impulso gerado pela pressão exercida em um intervalo de tempo. Desta forma, o primeiro intervalo de tempo,  $0 \leq t \leq t_d$ , é caracterizado pelo impulso positivo e o segundo intervalo,  $t_d \leq t \leq t_d + t_d^-$ , é caracterizado pelo impulso negativo.

Desta forma, para cada um dos tipos de explosões (esférico e hemisférico) é realizado o estudo da influência do impulso da fase negativa com relação ao impulso total do sistema, conforme apresentado na Figura 39 a seguir:

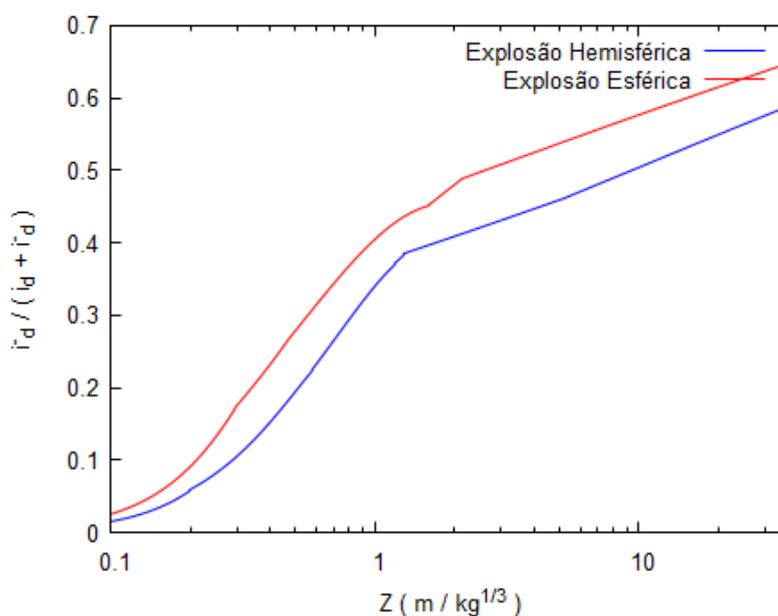


Figura 39 - Relação impulso negativo com o impulso total

De acordo com o gráfico apresentado pela Figura 39, observa-se que em ambos os tipos de explosão, existe uma influência progressiva da fase negativa, à medida que ocorre um aumento da distância escalar  $Z$ . Com isso, avalia-se que é necessária a incorporação do estudo da fase negativa nas considerações de análise dinâmica das estruturas. Considerando que a equação cúbica é válida para  $Z \geq 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ , a influência da fase negativa é equivalente à, no mínimo, 50% da energia transmitida ao sistema.

Avaliando, agora, o comportamento dinâmico, verifica-se o deslocamento vertical da placa. Este processo é realizado comparando os 3 tipos de condições de tensão de membrana: livre de tensões, indeslocável e deslocável. Desta forma, considerando as características abordadas pela Tabela 8, o comportamento oscilatório pode ser observado na Figura 40:

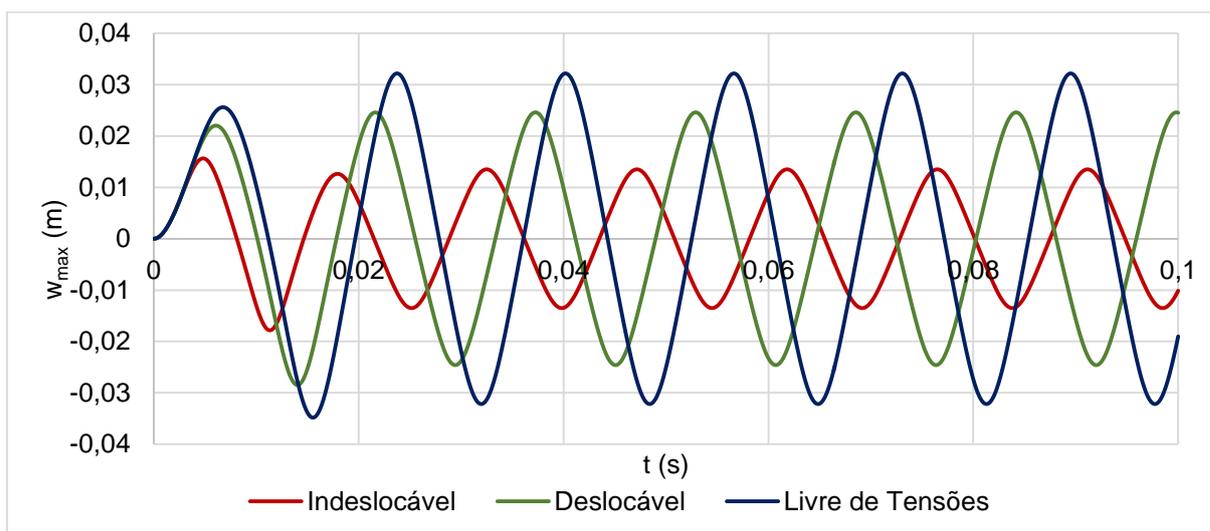


Figura 40 – Comportamento oscilatório para o caso simplesmente apoiado

Na Figura 40 observa-se a diferença de período para os três casos, acarretando uma discrepância de amplitude em cada sistema. Averigua-se, ainda, que o sistema de livre de tensões, por ser um tipo de condição de contorno que permite a mobilidade total do sistema, acarreta maiores amplitudes para a placa. Em contrapartida, o sistema indeslocável, por ser o sistema que não permite mobilidade do apoio (somente para rotação), é o que acarreta menores amplitudes.

Com base nas informações apresentadas pela Figura 40, tendo as informações físico-geométricos do material disponíveis na Tabela 8, verifica-se que o maior deslocamento é dado pela condição livre de tensões sendo no valor de  $-0,03480 \text{ m}$  no

tempo de 0,01557 s. O valor intermediário é dado pelo caso deslocável, ocorrendo aos 0,01397 s com amplitude de 0,02845 m. Por último, o caso indeslocável apresenta o máximo deslocamento no tempo de 0,01137 s com amplitude de 0,01781 s. De acordo com estes dados, verifica-se que, com base nas informações da Tabela 8, o caso livre de tensões apresenta um deslocamento máximo vertical de 22,31% e 95,39% maiores que os casos deslocáveis e indeslocáveis, respectivamente.

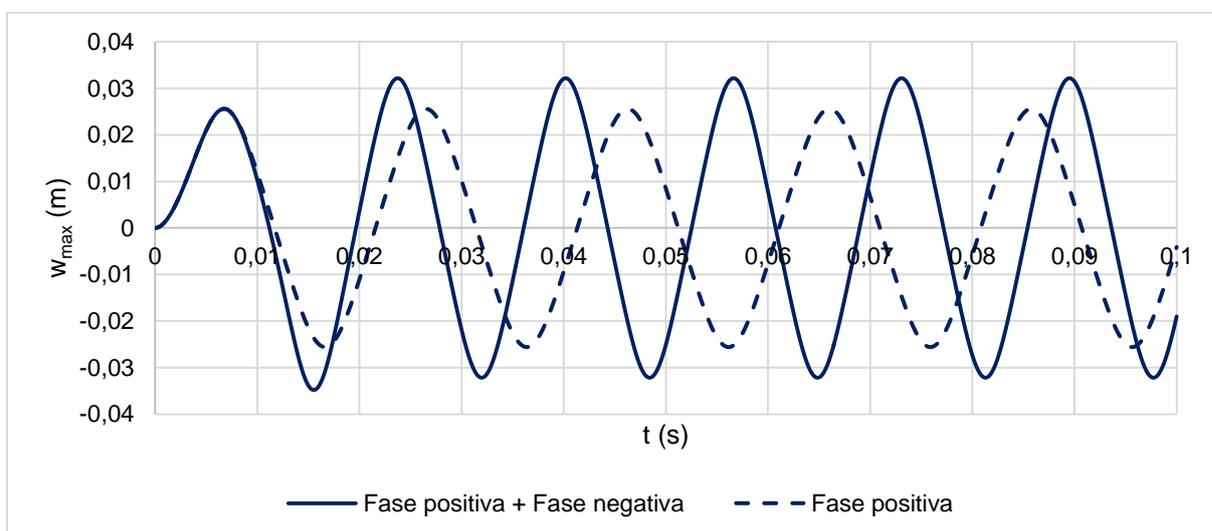
Paralelamente a este processo, avalia-se a influência da fase negativa sobre o sistema estrutural ao comparar-se a utilização ou não da equação cúbica, Figura 41 (a). Além disso, também é verificado os intervalos de tempo em que cada fase (positiva, negativa e ausência de carga) é imposta na estrutura, conforme Figura 41 (b). Considerando o caso para apoio simples livre de tensões, é possível avaliar a diferença do pico de pressão ocasionada pelas duas formulações.

De acordo com a Figura 41 (a) apresentada, é possível verificar que a consideração da fase negativa como carga de solicitação acarreta em um deslocamento maior na estrutura, não somente no intervalo de tempo que ocorre a própria fase negativa, mas também durante a vibração livre da estrutura.

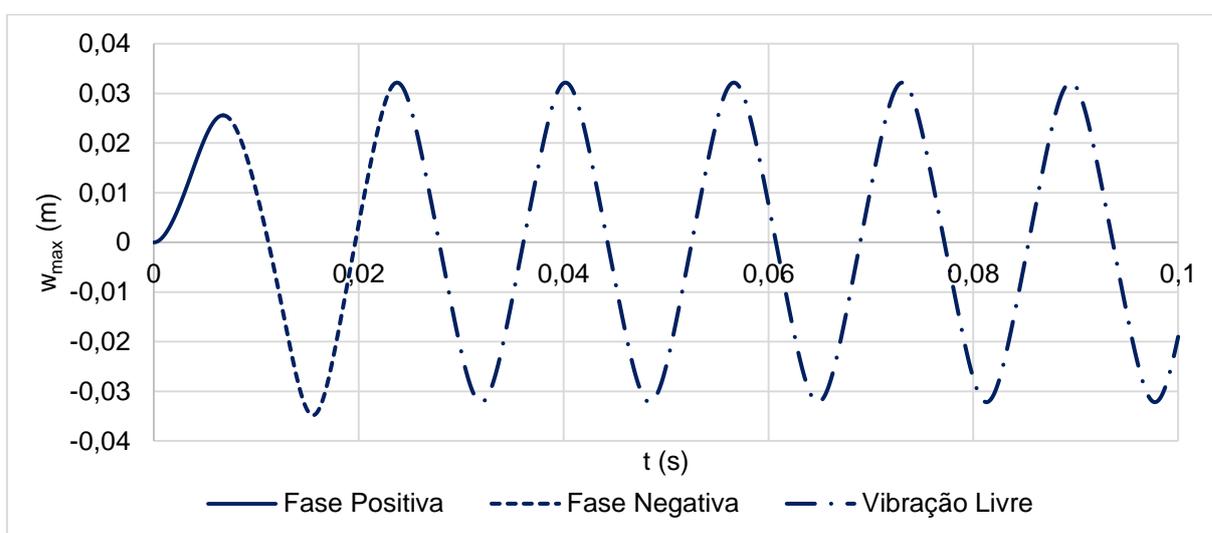
Verificando o comportamento oscilatório para o caso que considera somente a fase positiva no fenômeno da explosão, o maior deslocamento é dado por 0,02559 m, ocorrendo na vibração livre. Já considerando a fase negativa, o maior deslocamento é dado por 0,03480 m no tempo de 0,01557 s, como abordado acima, caracterizando um aumento de 36%. Os outros picos e vales ocorrem na fase de vibração livre, sendo o deslocamento máximo de 0,03216, caracterizando um aumento de 25,67% em comparação à curva de consideração somente a fase positiva.

A Figura 41 (b), esta é caracterizada pela discretização das fases, ou seja, apresentação dos intervalos de tempo que atuam as fases positiva, negativa e vibração livre. Nesta figura, observa-se os picos e valores representantes por todas estas fases. Durante a fase do carregamento de sobrepressão, a amplitude máxima atingida corresponde à 0,02558 m, ocorrido em 0,00677 s. Durante a fase negativa, a maior amplitude é de 0,03480 m registrada aos 0,01557 s. Finalmente, durante a fase de vibração livre, as maiores amplitudes correspondem à 0,03216 m durante os picos e vales do movimento oscilatório. Com base nisso, é possível observar que a maior amplitude registrada pela estrutura se localiza no intervalo de tempo que a fase negativa atua, correspondendo à 36,04% e 8,20% maior que as fase positiva e

vibração livre, respectivamente. Além disso, a fase negativa representa a solicitação que possui maior duração que a fase positiva, ou seja, 0,01648 s comparados à 0,00677 s, respectivamente. Por conta disso, o impulso da estrutura durante a fase negativa tende a ser maior.



(a)



(b)

Figura 41 – Comportamento oscilatório do sistema,  $\beta = 1$ . (a) Comparação entre a utilização da Equação Cúbica com a sua não consideração; (b) Apresentação das fases para a consideração da fase negativa

De forma a analisar os períodos da estrutura, averigua-se o comportamento quanto à razão dos períodos não linear ( $T_{NL}$ ) e linear ( $T_L$ ) com relação à razão  $w_{max}/h$ . O período não linear é calculado com base na solução da equação de Duffing,

conforme apresentado no capítulo 3. Desta forma, a Figura 42 apresenta o comportamento do período com relação aos três tipos de apoios simples:

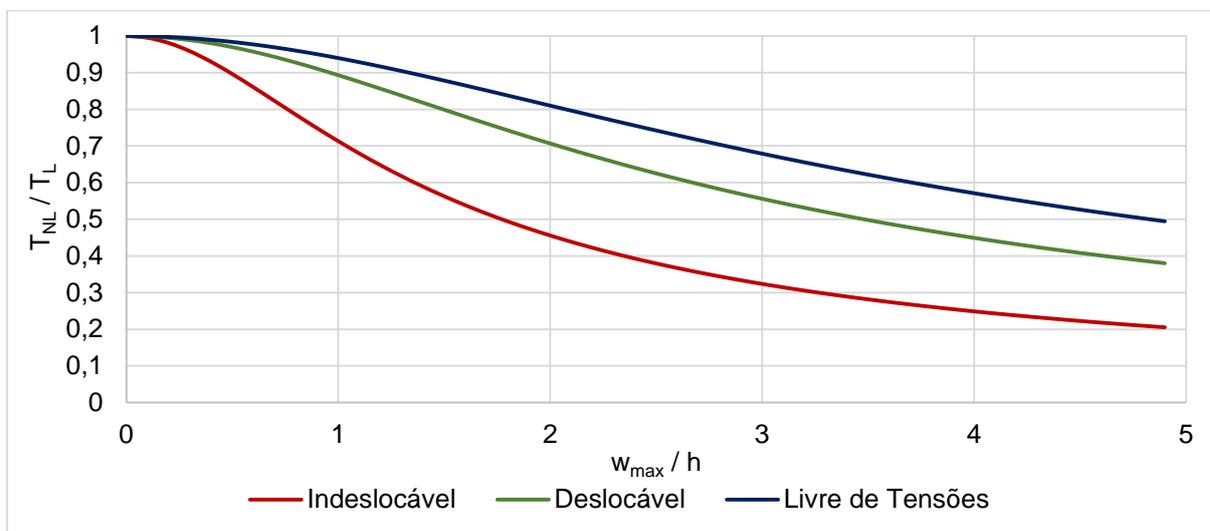


Figura 42 – Relação  $T_{NL} / T_L \times w_{max} / h$

Com base na Figura 42, observa-se que a frequência da estrutura é diretamente dependente do grau de não linearidade do sistema. Com isso, para estruturas com maiores restrições, como o caso do sistema indeslocável, a influência do período não linear torna-se relevante. Paralelamente, para o caso livre de tensões, há menor influência da rigidez da membrana e, conseqüentemente, menor relevância do período não linear.

Paralelamente, é importante avaliar o processo de influência da massa de TNT no sistema à medida que ocorre a variação da distância escalar  $Z$ . Mais especificamente, como a massa e o parâmetro  $Z$  influenciam em uma análise dinâmica considerando ou não a fase negativa para cada condição de tensão (livre de tensões, indeslocável e deslocável). Nas Figura 43 à Figura 45 são apresentados os comportamentos da estrutura (relação  $w_L / w_{max}$ ) quando são variadas as distâncias escalares ( $Z$ ) e o uso ou não da equação negativa na formulação. Estes gráficos foram desenvolvidos com base nas características físico-geométricos da estrutura presentes na Tabela 8.

Para a Figura 43, observa-se que para massas de TNT abaixo de 80 kg, torna-se extremamente relevante o uso da fase negativa (para este trabalho, equação cúbica) nas considerações do comportamento dinâmico da placa. Isto é intensificado para valores menores de  $Z$ , que gera as maiores relações  $w_L / w_{max}$ . Ainda pode ser analisado que para estruturas com menos restrições, esta mesma relação torna-se

menor (vide Figura 43), já que a placa pode mover-se livremente. Já para massas maiores que 80 kg, o uso da fase negativa na formulação torna-se irrelevante quando se é analisado os deslocamentos máximos da placa. Isto é representado pela curva “Limite” representada no gráfico, onde representa a fronteira entre a relevância ou não do uso da fase negativa na análise dos deslocamentos. Esta curva, “Limite”, foi criada com base nas análises realizadas para distâncias escalares  $Z$ , variando de  $5 \text{ m/kg}^{1/3}$  à  $34 \text{ m/kg}^{1/3}$ , à um intervalo de  $5 \text{ m/kg}^{1/3}$ .

De acordo com o gráfico presente na Figura 43, nota-se que as maiores relações de  $w_L/w_{\max}$  são encontradas para os menores valores de  $Z$ . Considerando uma massa de  $W_{\text{TNT}} = 100 \text{ kg}$ , as relações encontradas para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 15 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  são de 5,01728, 2,29974 e 1,25949, respectivamente. Ou seja, a relação de  $w_L/w_{\max}$  para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  corresponde à 2,18167 e 3,98358 vezes maior que as outras duas relações apresentadas.

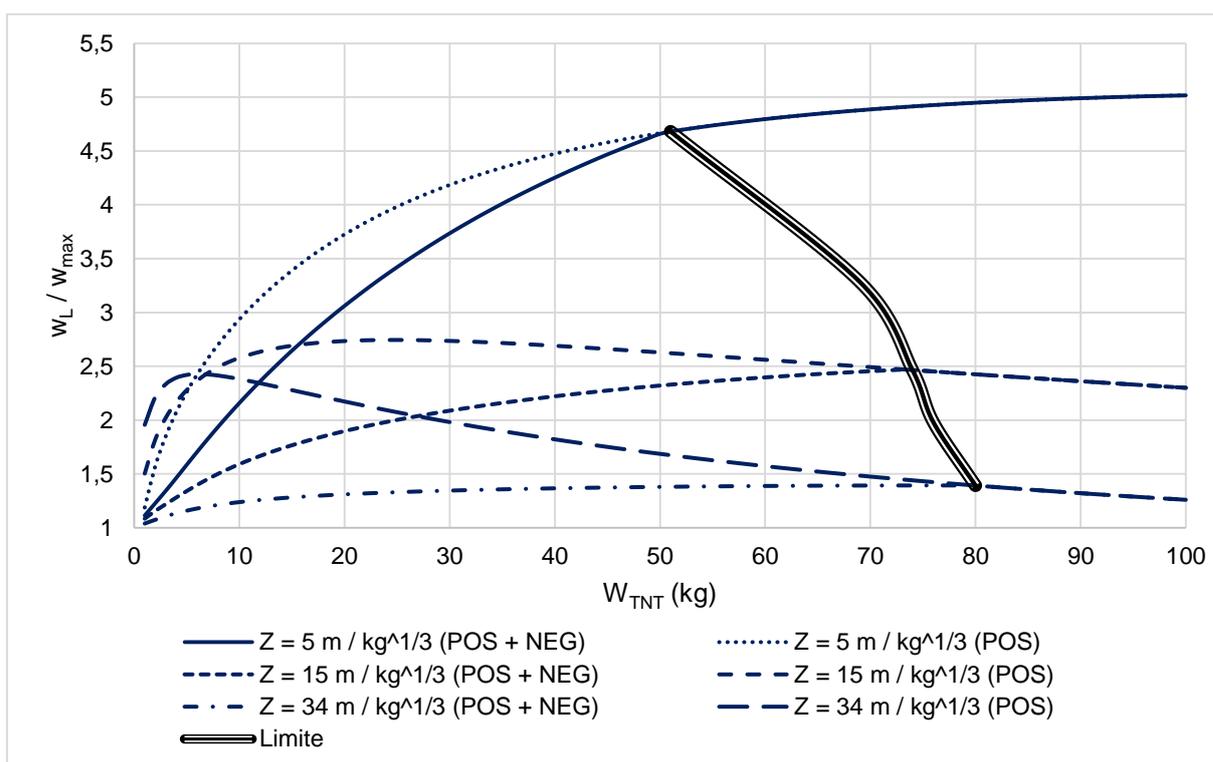


Figura 43 - Variação  $w_L / w_{\max}$  por  $W_{\text{TNT}}$  (kg) e de  $Z$  ( $\text{m/kg}^{1/3}$ ), caso livre de tensões e  $\beta = 1$

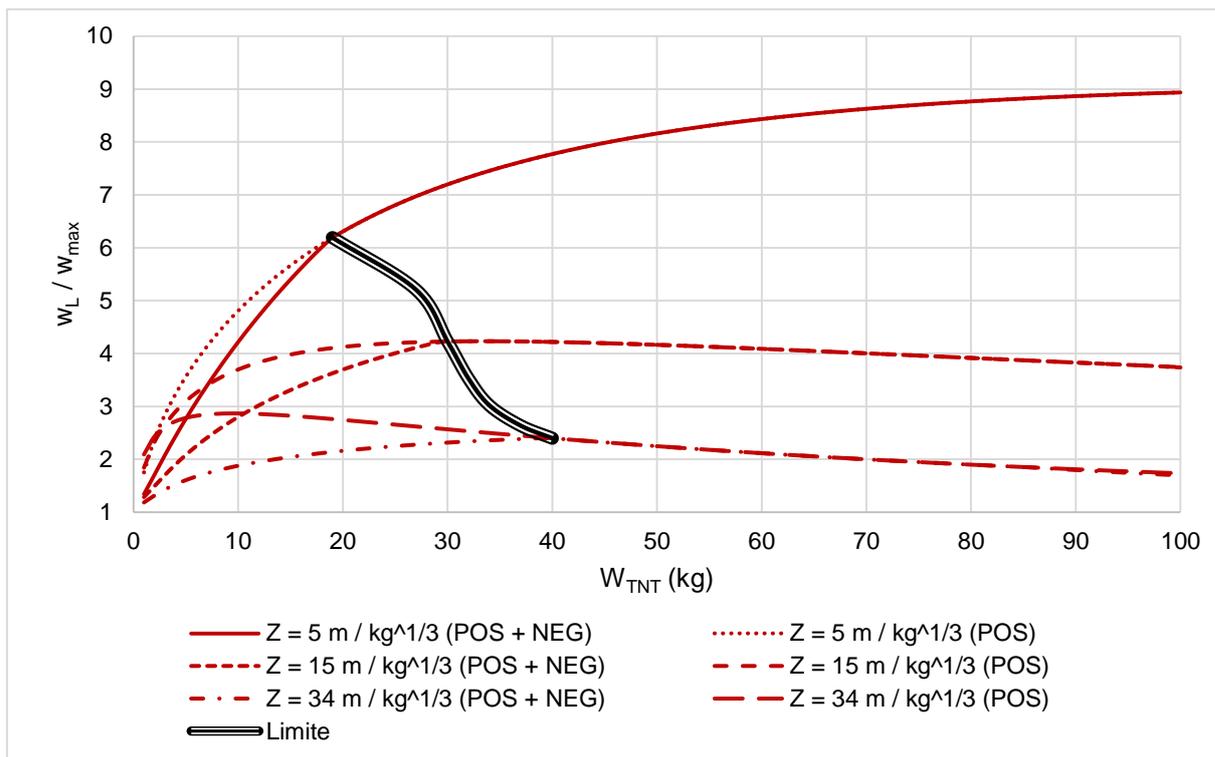


Figura 44 - Variação  $w_L / w_{max}$  por  $W_{TNT}$  (kg) e de  $Z$  ( $\text{m}/\text{kg}^{1/3}$ ), caso indeslocável  $\beta = 1$

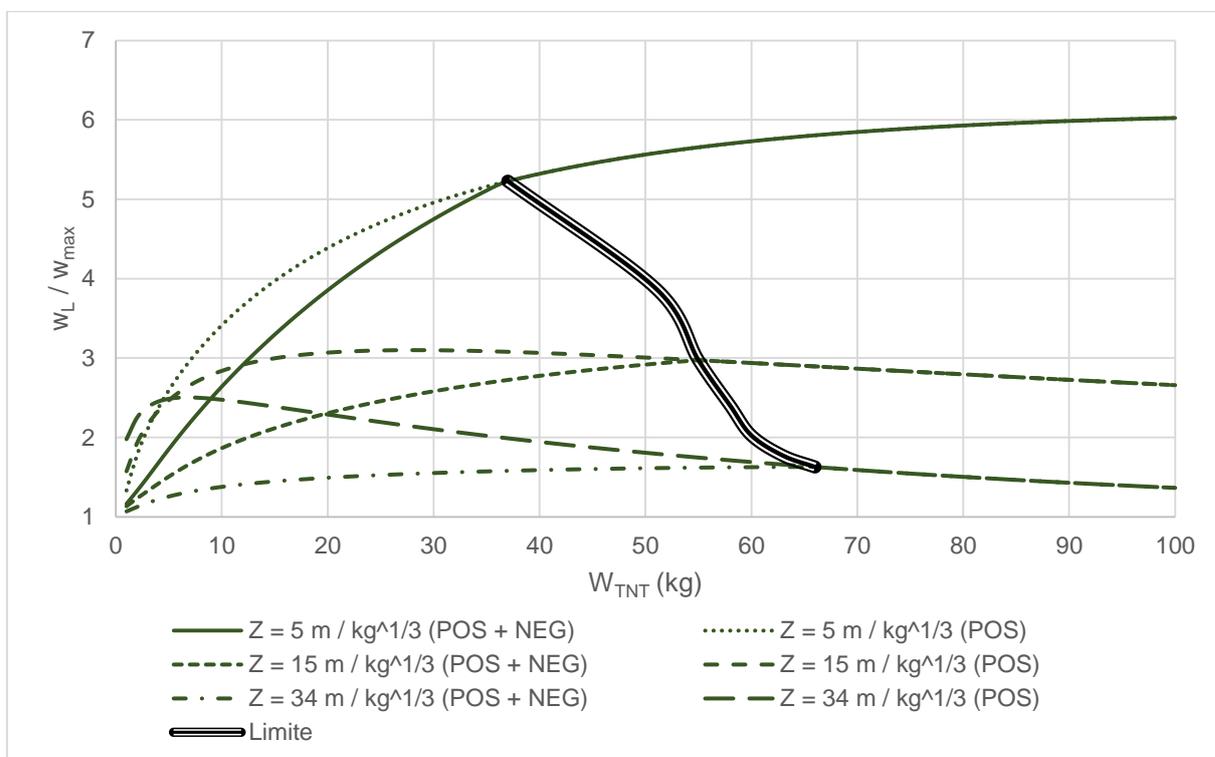


Figura 45 - Variação  $w_L / w_{max}$  por  $W_{TNT}$  (kg) e de  $Z$  ( $\text{m}/\text{kg}^{1/3}$ ), caso deslocável e  $\beta = 1$

O mesmo comportamento é constatado para o caso indeslocável, Figura 44, onde para massas de TNT até 40 kg a inserção da função de sobressão torna-se imprescindível para a análise de deslocamentos. Contudo, acima de 40 kg, torna-se irrelevante sua consideração para a verificação dos máximos deslocamentos da placa. Isto é representado pela curva “Limite”, que foi concebida analisando as comparações de deslocamentos máximos considerando ou não a fase negativa, em um intervalo de  $5 \text{ m/kg}^{1/3}$  à  $34 \text{ m/kg}^{1/3}$ , à um intervalo de  $5 \text{ m/kg}^{1/3}$ .

Da mesma forma, de acordo com o gráfico presente na Figura 44, nota-se que as maiores relações de  $w_L/w_{\max}$  são encontradas para os menores valores de  $Z$ . Considerando uma massa de  $W_{\text{TNT}} = 100 \text{ kg}$ , as relações encontradas para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 15 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  são de 8,93478, 3,73649 e 1,69595, respectivamente. Ou seja, a relação de  $w_L/w_{\max}$  para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  corresponde à 2,39122 e 5,26830 vezes maior que as outras duas relações apresentadas.

Finalmente, o processo para o caso deslocável é similar aos casos livre de tensões e indeslocável, inclusive para a obtenção da curva “Limite”. A distinção se dá pelos resultados obtidos com relação as relações  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 15 \text{ m/kg}^{1/3}$ ,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$ , considerando uma massa de  $W_{\text{TNT}} = 100 \text{ kg}$ . Para estes, encontram-se relações  $w_L/w_{\max}$  de 6,02377, 2,65845 e 1,36494, ou seja, a relação para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  corresponde à 2,26653 e 4,41321 vezes maior que as outras duas, respectivamente.

Além disto, é interessante constatar que as maiores relações  $w_L/w_{\max}$  são obtidas pelo caso indeslocável. Realizando uma comparação entre os três casos apresentados, considerando  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ , o caso indeslocável possui a razão  $w_L/w_{\max}$  48,32% e 78,08% maior que os casos deslocável e livre de tensões, respectivamente.

Seguidamente a este processo, apresenta-se o comportamento da variação da relação  $w_{\max}/h$  conforme o avanço de  $Z$  ( $\text{m/kg}^{1/3}$ ), Figura 46 e Figura 47, com base nas características físico-geométricas da placa, conforme abordada na Tabela 8. Avaliando a primeira figura, por ser considerada uma placa  $\beta = 1$ , o comportamento da placa com relação à vibração torna-se um tanto próxima para quando  $Z \geq 10 \text{ m/kg}^{1/3}$ , ou seja, inexpressivo para a variação da massa, conforme a condição de tensão. Com relação ao decaimento de  $Z$ , são apresentadas maiores amplitudes proporcionalmente à massa de TNT, já que menores  $Z$  implicam em maiores cargas. Outrossim, vale salientar que para esta condição a influência da massa de TNT em geral é pequena, conforme pode ser observado pela proximidade das curvas.

Desta forma, considera-se a comparação do caso livre de tensões quando são aplicados 10 kg e 5000 kg de TNT, para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ . Verifica-se, na Figura 46, que a massa de 5000 kg acarreta em uma relação  $w_{\max}/h$  de 7,58197, sendo 8,91% maior que o resultado obtido para 10kg.

Para o caso deslocável e indeslocável, as relações  $w_{\max}/h$  encontradas para uma massa de 5000 kg foram de 6,19855 e 4,05848, respectivamente. Estes resultados correspondem à 8,92% e 13,91% maiores quando comparados aos seus respectivos de massas 10 kg.

Contudo, para o  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$ , as maiores amplitudes são constatadas para massas de  $W = 10\text{kg}$ , visto que maiores  $Z$  acarretam em menores pressões no anteparo e que, de forma que obedeça a Equação (51), a distância do anteparo ( $R$ ) deve diminuir. Neste caso, avaliando para  $W_{\text{TNT}} = 10 \text{ kg}$ , os as relações obtidas para os casos livre de tensões, deslocável e indeslocável são 2,02249, 1,81760 e 1,33254, respectivamente. Comparando com os resultados de  $w_{\max}/h$  para massa de  $W_{\text{TNT}} = 5000 \text{ kg}$ , aqueles são 5,57%, 2,88% e 4,73% maiores que estes.

Considerando a Figura 47, é possível observar que a placa, por ser de características geométricas  $\beta = 2$ , começa a apresentar uma maior influência da quantidade de TNT. Por conta disto, a implicação de massas maiores ocasiona maiores amplitudes para todas as condições de tensão, ou seja, livre de tensões, indeslocável e deslocável. Além disso, verifica-se que com maiores  $Z$ , os deslocamentos se assemelham, conforme a massa de TNT a ser utilizada.

Avaliando os resultados obtidos pela Figura 47, verifica-se que para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  e uma massa de  $W_{\text{TNT}} = 5000 \text{ kg}$  tem-se as relações  $w_{\max}/h$  de 4,59440, 1,94296 e 2,78641 para os casos livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente, sendo 3,80251, 1,58555 e 2,19172 vezes maiores que os resultados obtidos para  $W_{\text{TNT}} = 10 \text{ kg}$ . Com relação à  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$ , pode-se assumir para  $W_{\text{TNT}} = 10 \text{ kg}$ , todos os casos convergem para uma média  $w_{\max}/h$  de 0,29411, enquanto  $W_{\text{TNT}} = 5000 \text{ kg}$  atinge uma média  $w_{\max}/h$  de 0,41410.

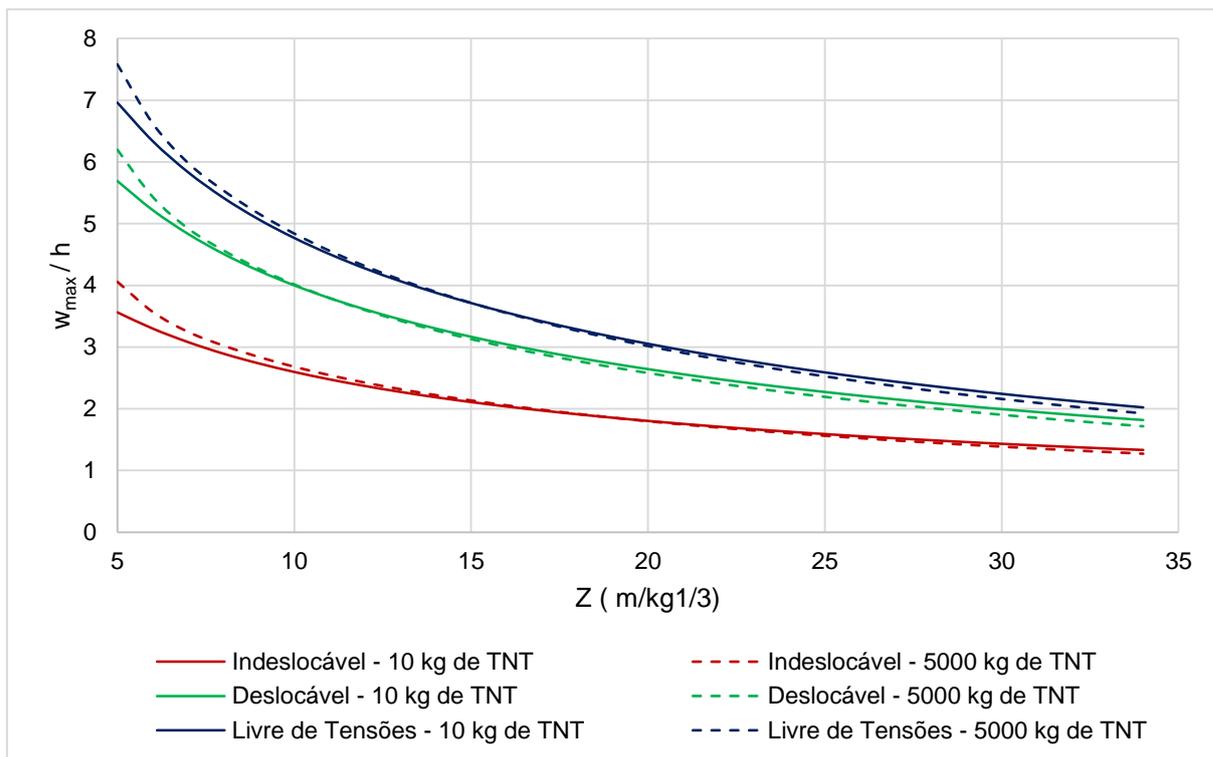


Figura 46 - Variação  $w_{\max}/h$  x  $Z$  conforme  $W_{TNT}$ ,  $\beta = 1$

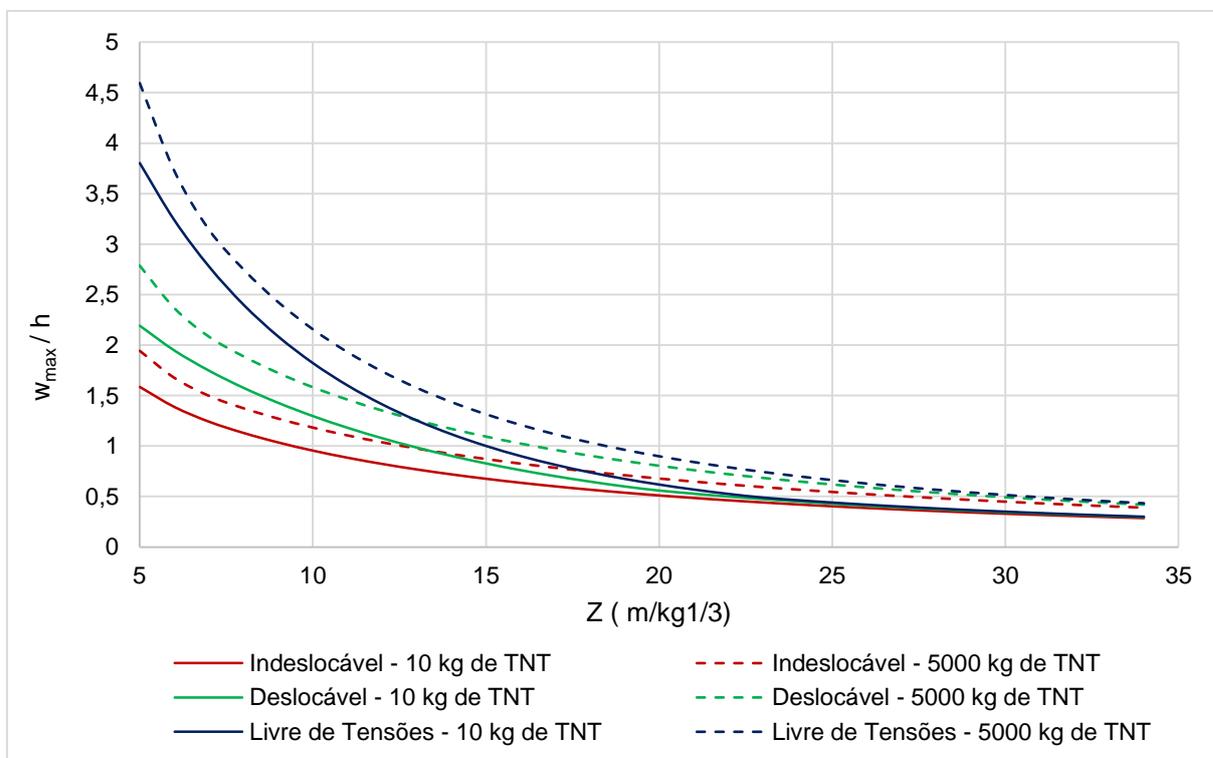


Figura 47 - Variação  $w_{\max}/h$  x  $Z$  conforme  $W_{TNT}$ ,  $\beta = 2$

As próximas considerações são correlacionadas ao Fator de Amplificação Dinâmica (FAD), variando conforme a razão tempo de duração da fase positiva / período natural linear da estrutura aumenta, Figura 48 e Figura 49, cuja frequência natural linear corresponde à 24,33 Hz. Além disso, considera-se que a estrutura está submetida ao carregamento dinâmico referente à equação de Friedlander e à equação Cúbica, conforme presente na Equação (62).

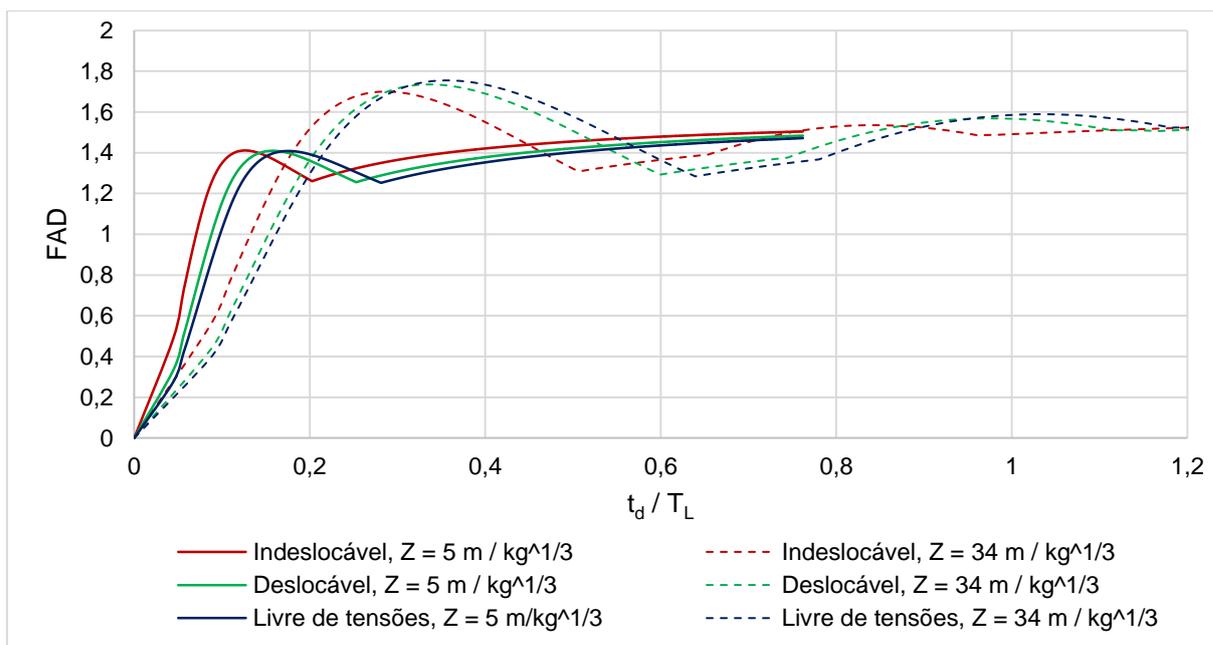


Figura 48 – Relação FAD e  $t_d / T_L$ ,  $\beta = 1$

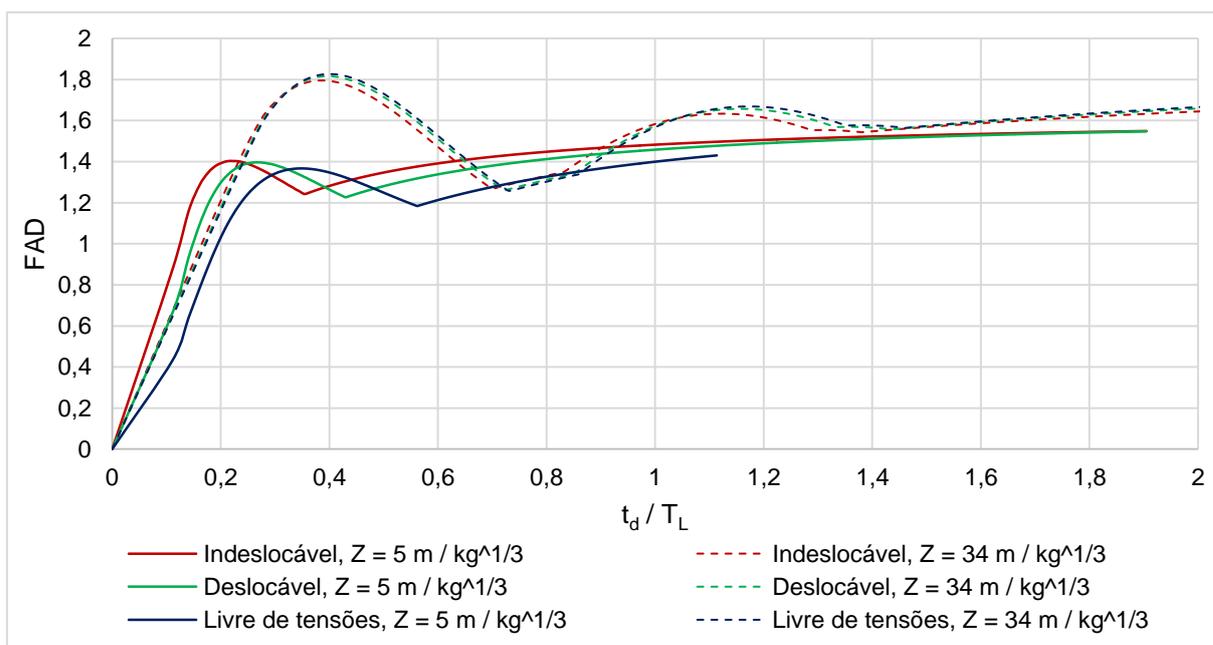


Figura 49 – Relação FAD e  $t_d / T_L$ ,  $\beta = 2$

Em ambos os gráficos, Figura 48 e Figura 49, o sistema indeslocável acarreta um crescimento do FAD mais acelerado, visto que corresponde à condição de contorno com maiores restrições, intensificando o efeito da membrana, como também é observado na Figura 42. Ou seja, para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  a taxa de crescimento média, considerando  $\beta = 1$ , corresponde à 18,56 e para  $\beta = 2$ , corresponde à 12,74.

Nota-se que para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  o valor de FAD aproxima-se de 1.4 para as condições de indeslocável, deslocável e livre de tensões, tanto para  $\beta = 1$  quanto  $\beta = 2$ , sendo que este montante é atingido para  $\beta = 1$  e relações  $t_d/T_L$  de 0,1145, 0,1443 e 0,1608, respectivamente. Outrossim, para  $\beta = 2$ , as relações  $t_d/T_L$  apresentadas são de 0,2130, 0,2684 e 0,3499, respectivamente.

Com isso, a diferença entre os picos apresentados na Figura 48 e Figura 49 é justificada pela influência do período natural não linear da estrutura. Pode-se averiguar para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões que, para  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ , os fatores de amplificação são próximos, com diferença dada para  $t_d/T_L$ .

Avaliando para  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  e com  $\beta = 1$ , verifica-se que há um aumento tanto do FAD quanto para a razão  $t_d/T_L$  à medida que a placa possui mais mobilidade lateral. Desta forma, para o caso indeslocável é verificado que FAD corresponde 1,70 para  $t_d/T_L$  igual à 0,2865, o sistema deslocável é dado que FAD vale 1.73 com  $t_d/T_L$  sendo 0,3359 e para o caso livre de tensões, FAD vale 1,75 com  $t_d/T_L$  sendo de 0,3542. Outrossim, para  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  com  $\beta = 2$ , para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões, o FAD relacionado corresponde à 1,79, 1,81 e 1,82. Contudo, para o caso  $\beta = 2$ , verifica-se que para os 3 casos de condições de tensões de membrana, o fator de amplificação sucede na mesma razão  $t_d/T_L$ , ou seja, 0,39429.

O mesmo é averiguado para os vales presentes nas Figura 48 e Figura 49. Considerando  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ , verifica-se os fatores de amplificação dinâmica são próximos à 1,25 e a razão  $t_d/T_L$  é dada por 0,2026, 0,2529 e 0,2815 para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões, respectivamente. Outrossim, para a mesma solicitação de carregamento, porém para a geometria  $\beta = 2$ , para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões, tem-se FAD 1,24 com  $t_d/T_L$  de 0,3536, FAD 1,22 com  $t_d/T_L$  de 0,4287 e FAD 1,18 com  $t_d/T_L$  de 0,5614, respectivamente.

Avalia-se para  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  com  $\beta = 1$ , para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões, tem-se FAD 1,30 com  $t_d/T_L$  de 0,5067, FAD 1,29 com  $t_d/T_L$  de 0,5997

e FAD 1,28 com  $t_d/T_L$  de 0,6395, respectivamente. Com relação à  $\beta = 2$ , FAD pode ser aproximado para 1,26, sendo as relações de  $t_d/T_L$  0,7029, 0,7230 e 0,7295, para os casos indeslocável, deslocável e livre de tensões, sucessivamente.

Para as Figura 48 e Figura 49 apresentadas com base no FAD, verifica-se que a implicação da carga com  $Z = 34 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$  acarreta maiores fatores de amplificação dinâmica. Apesar do impacto para  $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$  ser maior, o cálculo do deslocamento estático é dado como a carga estática, sendo a pressão máxima gerada pela distância escalar. Desta forma, para distancias escalares menores, são obtidas as maiores sobrepressões e, para este caso, acarretam FAD menor.

De forma complementar, para a geração dos gráficos de FAD, foram introduzidas as mesmas condições de *input* de dados para realizar o *looping* (vide Tabela 8). Com isso, como o período linear da estrutura é sempre o mesmo (para uma dada condição de contorno e características geométricas da estrutura), para menores valores de  $Z$  e considerando que a variação da massa de TNT é a mesma, o intervalo do tempo de duração da fase positiva é menor, ocasionando uma interrupção do gráfico de  $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$  antes com relação à  $Z = 34 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ .

A existência dos picos e vales, nas Figura 48 e Figura 49, podem ser justificados pelo período da placa e da carga estarem próximos. Isto pôde ser analisado com base nas transformadas de Fourier (FFT) dos períodos não lineares da placa e da carga, conforme é possível verificar nas Figura 49 à Figura 54.

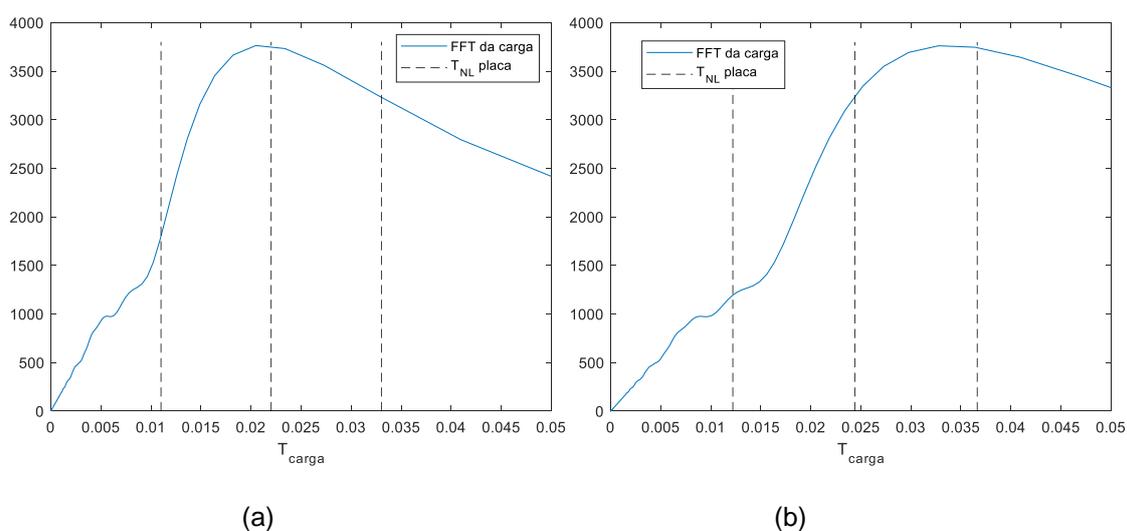


Figura 50 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga - indeslocável,  $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

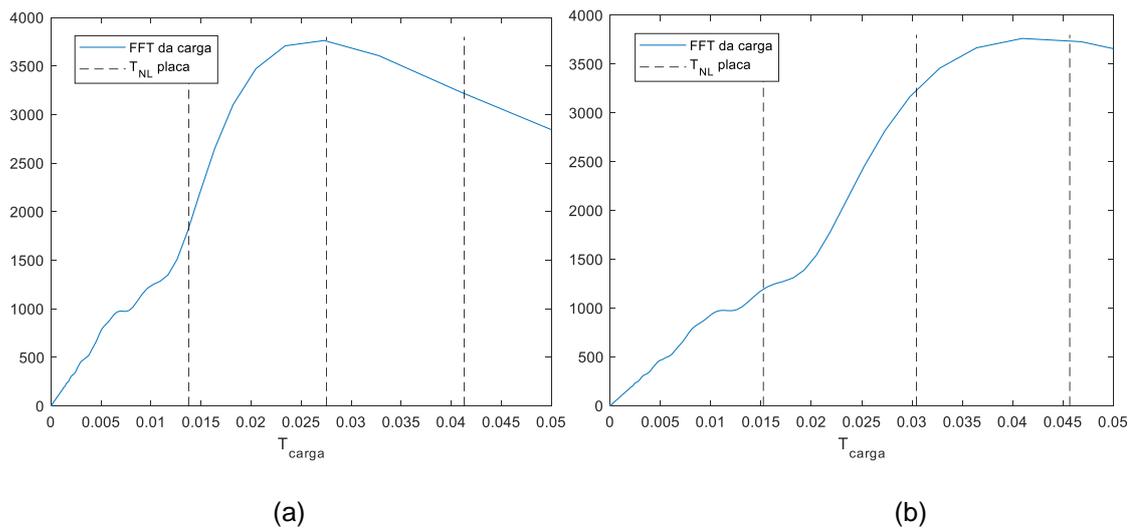


Figura 51 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga - deslocável,  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

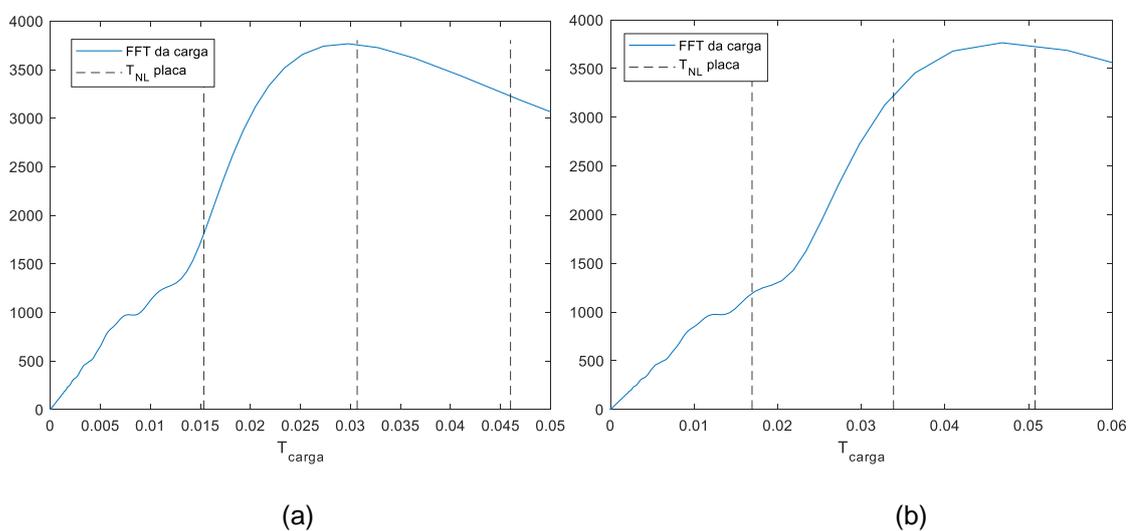


Figura 52 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga - livre de tensões,  $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

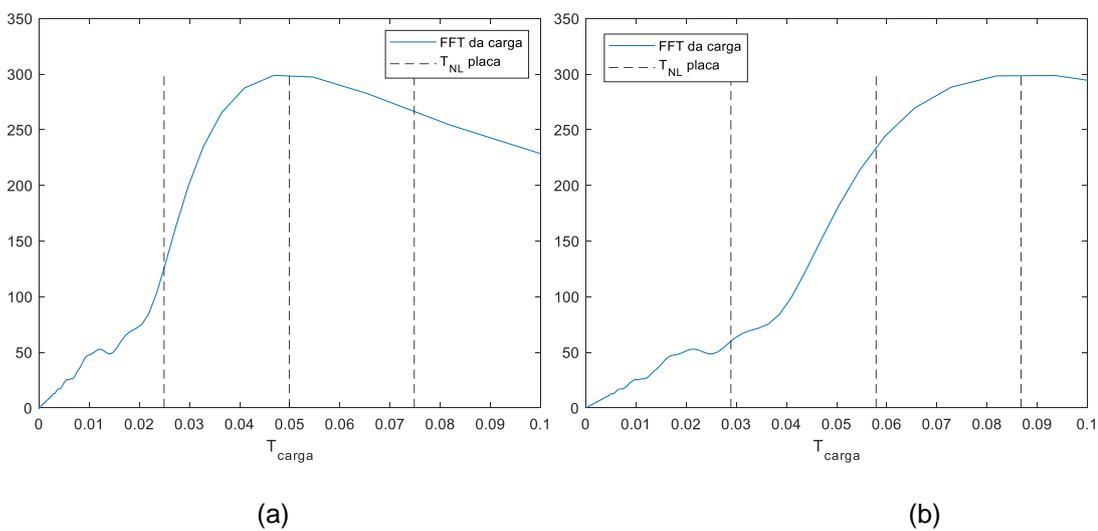


Figura 53 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga - indeslocável,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

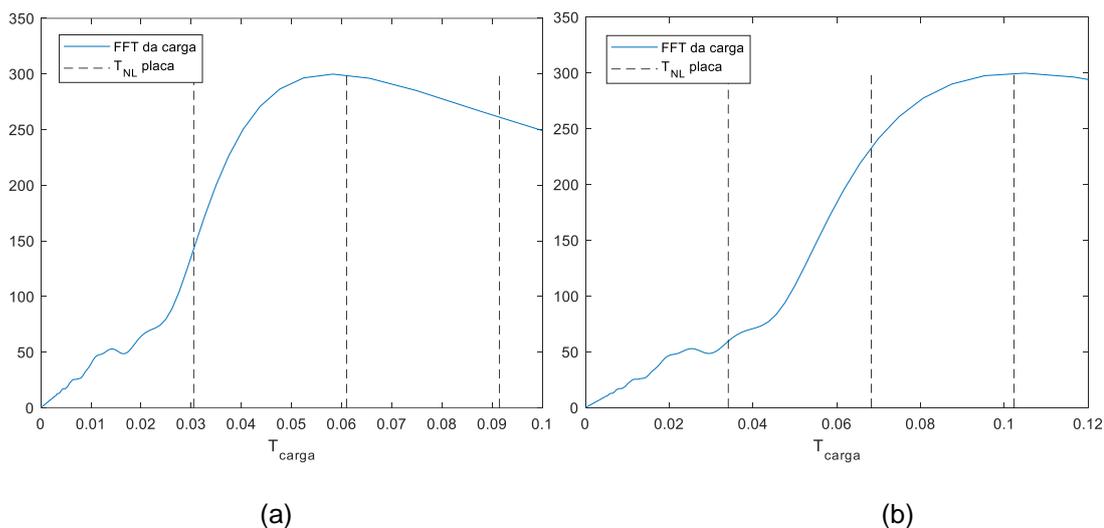


Figura 54 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga - deslocável,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

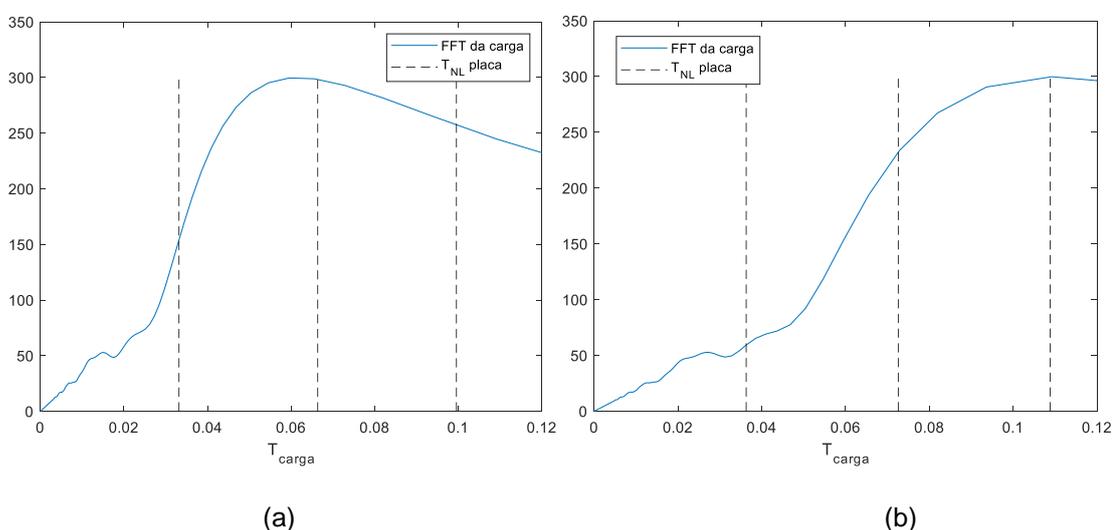


Figura 55 – Relação  $T_{\text{carga}}$  e FFT da carga – livre de tensões,  $Z = 34 \text{ m/kg}^{1/3}$  e  $\beta = 1$ . (a) Pico; (b) Vale

Finalmente, das Figura 56 à Figura 59 são apresentadas o comportamento da estrutura, quanto à amplitude, para com a variação da massa conforme ocorre a alteração da espessura da placa.

Observa-se que, com base nas Figura 56 à Figura 59, para as considerações de  $Z = 5 \text{ m / kg}^{1/3}$  tem-se as maiores relações de amplitudes linear com amplitude total, visto que para menores distâncias escalares  $Z$  acarretam as maiores sobre pressões na estrutura. Isto é intensificado em casos em que o efeito da membrana é relevante (indeslocável) e diminui conforme a possibilidade de movimentação lateral da estrutura aumenta (livre de tensões).

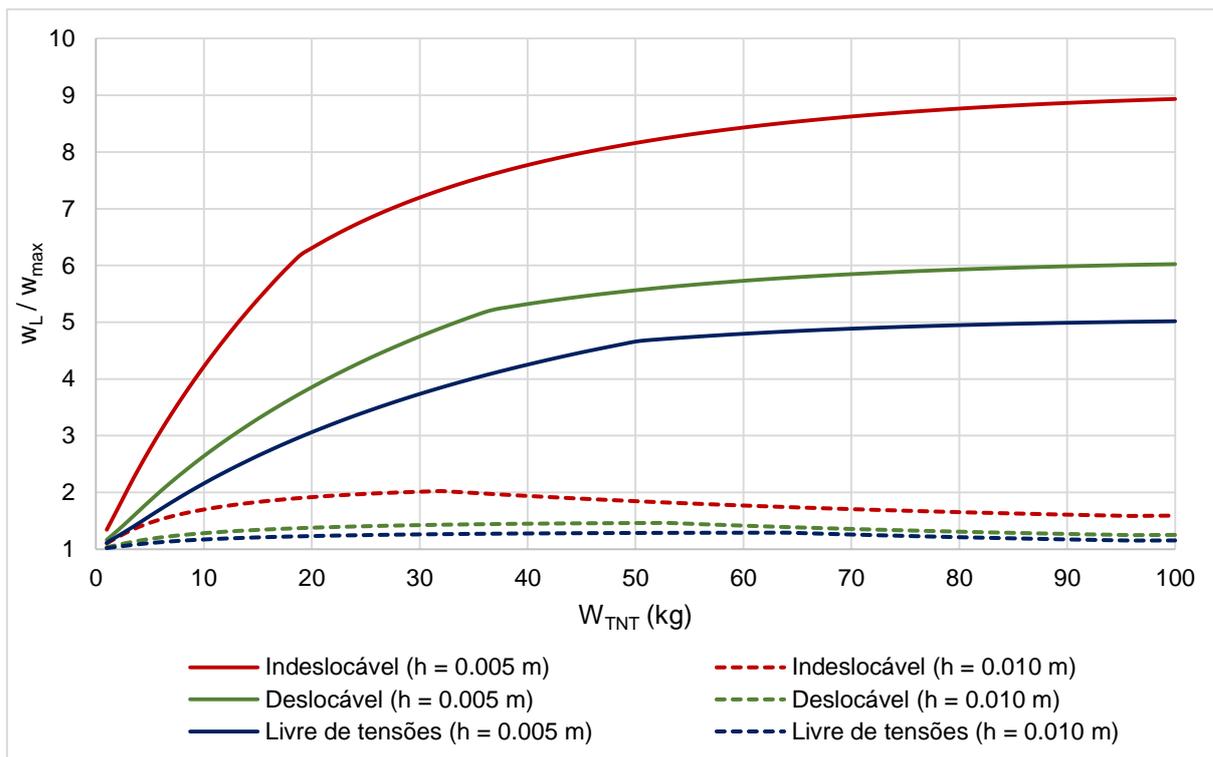


Figura 56 – Relação  $w_L / w_{max} \times W_{TNT}$ ,  $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ ,  $\beta = 1$

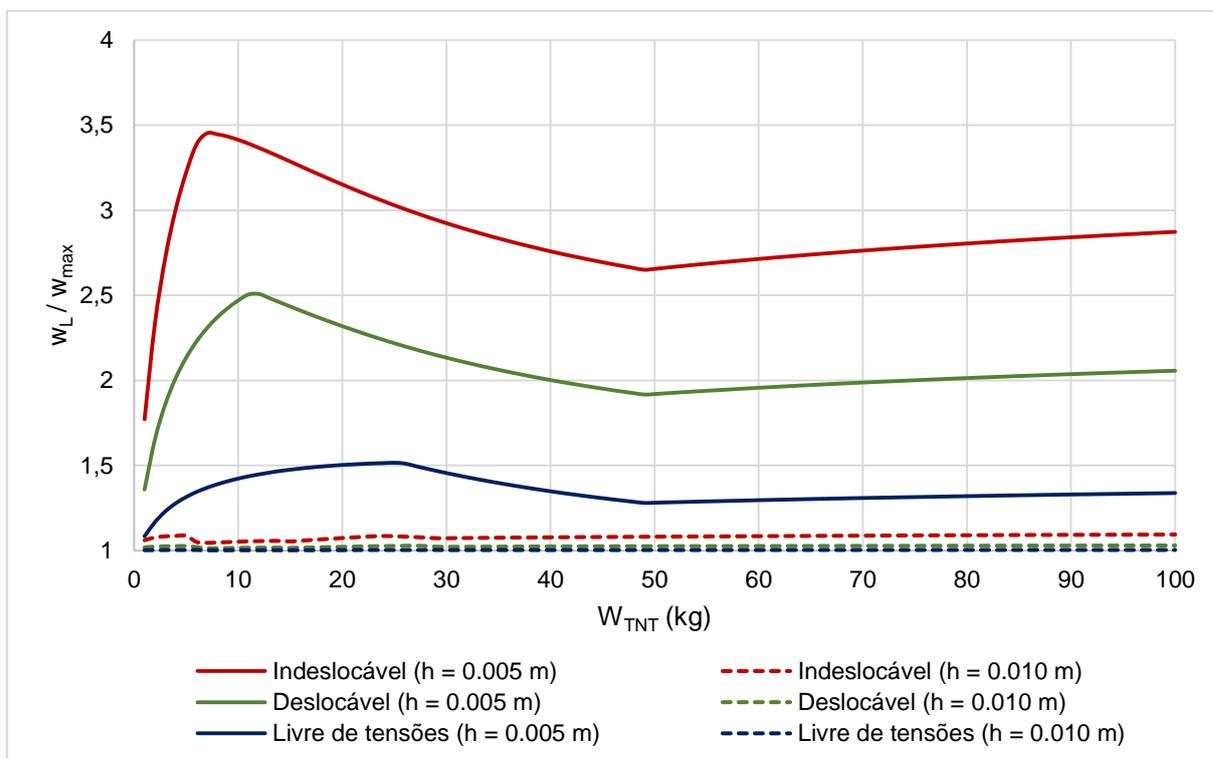


Figura 57 – Relação  $w_L / w_{max} \times W_{TNT}$ ,  $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ ,  $\beta = 2$

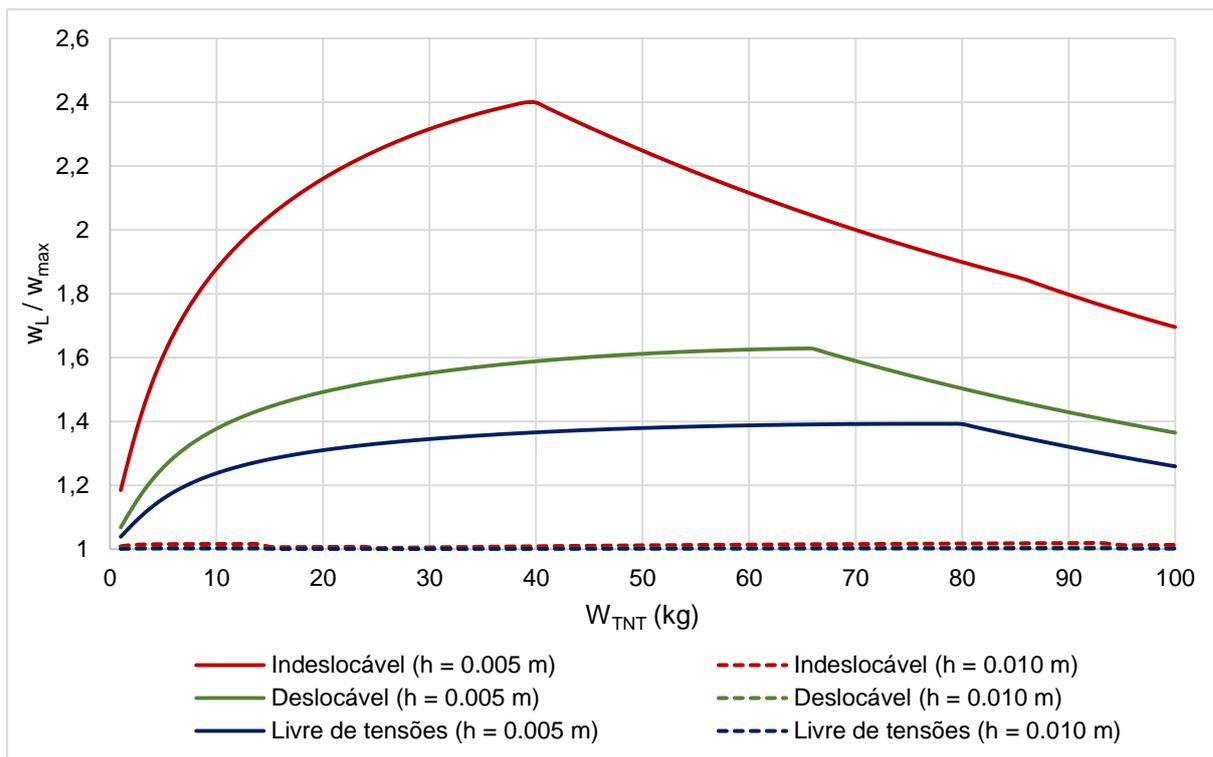


Figura 58 – Relação  $w_L / w_{max} \times W_{TNT}$ ,  $Z = 34 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ ,  $\beta = 1$

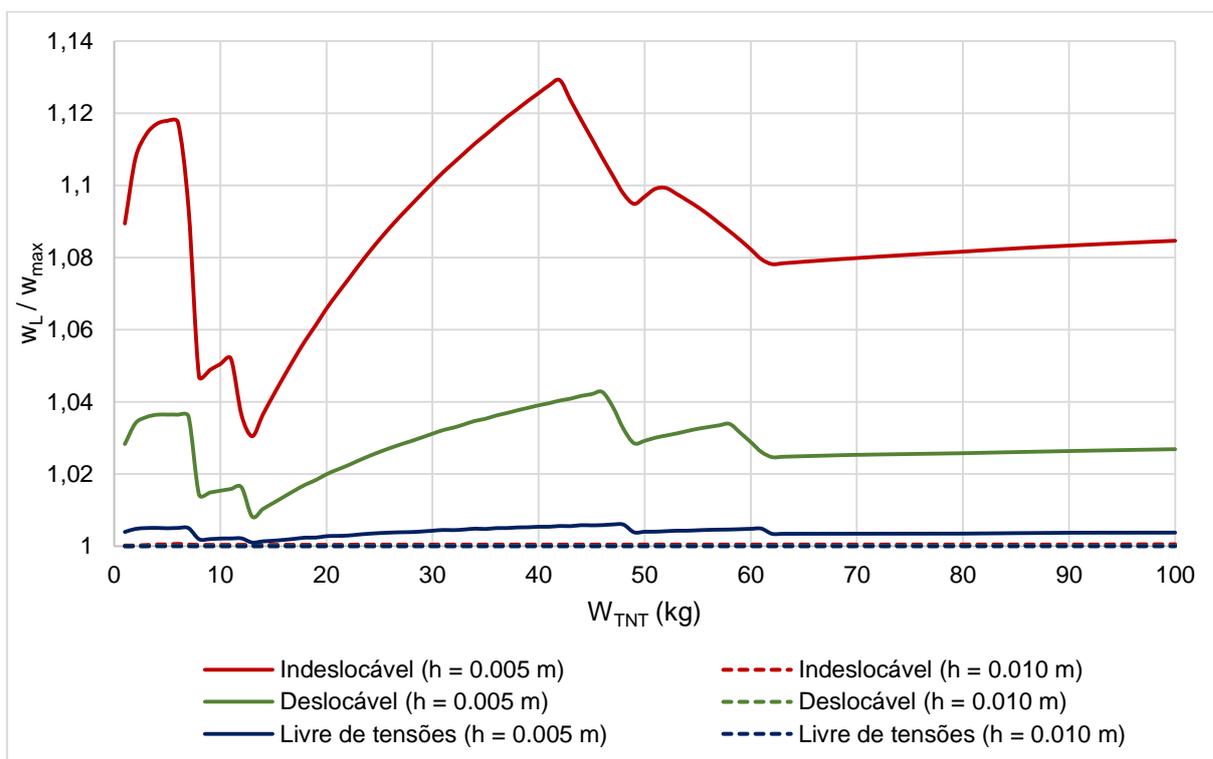


Figura 59 – Relação  $w_L / w_{max} \times W_{TNT}$ ,  $Z = 34 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ ,  $\beta = 2$

Nos quatro gráficos apresentados, Figura 56 à Figura 59, observa-se que para placas com espessuras maiores, a relação de  $w_L / w_{max}$  tende à 1. Isto implica que maiores espessuras de placas acarretam ser irrelevante a consideração da não

linearidade geométrica no sistema. Este fenômeno é intensificado quando a carga atuante é pequena e a relação entre as dimensões da placa é maior, como pode ser observado na Figura 59. Em contrapartida, maiores sobrepressões ( $Z = 5m/kg^{1/3}$ ) juntamente com placas esbeltas geram as maiores relações  $w_L/w_{max}$ , intensificando a consideração da não linearidade no sistema, conforme Figura 56.

É possível ainda avaliar que o sistema livre de tensões apresenta uma razão de amplitudes próxima à 1 quando as dimensões da placa são alteradas, independente da intensidade da carga (Figura 57 e Figura 59). Isto pode ser justificado pela maior movimentação lateral da estrutura.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida uma formulação para placas delgadas, verificando a influência do da membrana, com base na teoria de von Karman, submetidas a cargas explosivas. Para o carregamento, foram consideradas a equação de Friedlander, como a fase de pressão positiva, e a equação cúbica como caracterização da fase de pressão negativa. A solução para as equações diferenciais resultantes deu-se pela implementação do método numérico de Runge-Kutta.

Com base nas características da carga, de acordo com os ábacos fornecidos por Rigby (2014), avaliou-se o efeito do impulso da fase negativa com relação ao impulso total do sistema (impulso da fase positiva somado ao impulso da fase negativa). De acordo com esta relação, observou-se que para distâncias escalares ( $Z$ ) maiores que 10, a influência da fase negativa corresponde a, no mínimo, 50% com relação ao impulso total. Visto isso, averiguou-se a importância do uso da fase negativa para avaliar o comportamento da estrutura quanto aos deslocamentos.

De forma a facilitar o processo de análise do comportamento da placa, com base nos ábacos fornecidos por Rigby (2014), verificou-se a importância de desenvolver equações que determinassem o valor dos parâmetros, presentes nas expressões de explosão, em função da distância escalar do elemento e da massa de TNT.

De acordo com o processo de formulação, avaliou-se que o carregamento de explosão faz com que grandes deslocamentos sejam gerados na estrutura, ocasionando a necessidade da implementação do efeito da membrana nos cálculos, visto que uma análise somente com a rigidez à flexão provoca amplitudes discrepantes em comparação com a introdução do efeito da membrana.

Na introdução do efeito da membrana, devem ser implementadas 3 condições de tensão tanto para a placa apoiada como engastada: livre de tensões, indeslocável e deslocável. Neste sentido, a membrana realiza um papel fundamental na rigidez total da placa, constatando-se que para estruturas com maiores restrições nas condições de contorno (caso indeslocável) há uma maior contribuição da rigidez da membrana no sistema. De outro modo, no caso onde a estrutura permite uma maior movimentação lateral dos bordos (caso livre de tensões) a influência do efeito da

membrana torna-se pequena, principalmente quando a razão entre as duas dimensões do plano da placa é maior que 2. O caso intermediário (caso deslocável) é característico por permitir a movimentação da estrutura de forma igual entre os bordos, por isso os resultados encontrados são intermediários ao livre de tensões e ao indeslocável. Todo este processo pode ser avaliado pela apresentação da relação entre os períodos linear e não linear da estrutura, onde as maiores influências são contempladas pelo caso indeslocável.

Pelo fato de o sistema livre de tensões apresentar menor rigidez de membrana, presença do parâmetro  $K_3$ , averiguou-se que este caso apresenta os maiores deslocamentos verticais. Contudo, a modificação de alguns parâmetros pode ocasionar que a influência do efeito da membrana seja irrelevante, como o aumento da distância escalar  $Z$ , da espessura e da relação geométrica  $\beta$ . A modificação destas características geométricas da estrutura e da carga ocasionam que a escolha de uma condição de tensão indeslocável, deslocável ou livre de tensões seja desprezível para a avaliação dos deslocamentos.

De forma complementar, foi avaliado o Fator de Amplificação Dinâmico (FAD) da estrutura, apresentando-se como uma curva que possui picos e vales no seu desenvolvimento. A presença do pico pode ser característica da frequência fundamental da carga ser próxima a frequência dos harmônicos da estrutura. O fato de estes picos e vales ocorrerem em abcissas diferentes para cada condição de contorno evidencia que o parâmetro relevante na consideração dos harmônicos da placa é o período não linear.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

Com base nas conclusões obtidas neste trabalho, algumas sugestões para futuros trabalhos podem ser apresentadas, tais como:

- verificar o comportamento da placa deste trabalho com as outras equações de fase negativa mencionadas, avaliando para diversas distâncias escalares ( $Z$ );

- avaliar o comportamento da estrutura através da equação de deslocamentos verticais com presença dos harmônicos superiores, de forma a verificar as tensões na mesma com maior precisão;

- consideração da solicitação de carga explosiva para placas de Mindlin. Neste caso, é importante avaliar o comportamento de placas espessas e a influência do efeito do cisalhamento desse tipo de estrutura, visto que neste trabalho apenas realizou-se a formulação para placas delgadas com comportamento à flexão e efeito de membrana;

- o material considerado neste trabalho é um aço de comportamento linear elástico, sem patamar de escoamento. A sugestão a ser dada é que outros tipos de materiais sejam empregados de forma que seja possível estudar a não linearidade física do mesmo e/ou sua plastificação;

- avaliar o comportamento de placas compósitas, ou seja, como diversas camadas presentes na placa podem influenciar o efeito de deslocamentos verticais e distribuições associadas, com base no carregamento dinâmico tratado neste trabalho;

- avaliação dos efeitos que placas com enrijecedores podem apresentar, verificando como as amplitudes ao longo do tempo são afetadas, bem como as tensões;

- avaliação dos efeitos da placa submetidas ao carregamento explosivo em locais confinados.

## REFERÊNCIAS

- ABAQUS S. **ABAQUS/Standart User's Manual**. Dassault Systèmes, Providence, RI, USA. 2005.
- BAKER, W. E., PARR, V. B., BESSEY, R. L., COX P. A. **Assembly and Analysis of Fragmentation Data for Liquid Propellant Vessels**. NASA, 1974.
- DHARARI, L. R. WEI, J. **Dynamic response of laminated glass under blast loading: effect of negative phase**. In *Structures under shock and impact VIII*, pages 181-190, Crete, Greece, 2004.
- DUFFING, G. **Erzwungene schwingungen bei veranderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung**, Series: Sammlung Vieweg, N° 41/42. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918.
- GANTES, C. PNEVMATIKOS, N. **Elastic-plastic response spectra for exponential blast loading**. *International Journal of Impact Engineering*, 30(3):323-343, 2004.
- GRANSTRÖM, S. A. **Loading characteristics of fair blasts from detonating charges**. *Technical Report 100, Transactions of the Royal Institute of Technology*, Stockholm, 1956.
- GUPTA, A. D., GREGORY, F. H., BITTING, R. L., BHATTACHARY, S. **Dynamic Analysis of an Explosive Loaded Hinged Rectangular Plate**. *Pergamon Journal Ltd, Computers & Structure*, 0045-7949/87. Vol 26, n°1/2, pp 339 – 344, 1987.
- FELDGUN, V. R., YANKELEVSKY, Y. S., KARINSKI, Y. S. **A nonlinear SDOF model for blast response simulation of elastic thin rectangular plates**. *International Journal of Impact Engineering*, 2015.
- FRIEDLANDER, F. G. **The diffraction of sound pulses I. Diffraction by a semi-infinite plane**. *Communicated by G. I. Taylor*, F.R.S., 1940.
- JAREK, A. **Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC - Rio. Rio de Janeiro, 2007.
- KINNEY, G. F., GRAHAM, K. J. **Explosive Shocks in Air**. *Springer Science + Business Media New York*. ISBN 978-3-642-86684-5, 1985.

- KRAUTHAMMER, T. ALTENBERG, A. **Negative phase blast effects on glass panels.** *International Journal of Impact Engineering*, 24(1):1-17, 2000.
- LI, J. HAO, H. **Development of a simplified numerical method for structural response analysis to blast load.** *Procedia Eng* 14: 2558 - 2566.
- MAHMOUD, S. **A note on the simplified model for blast - loading simulation.** *University of Dammam*, Dammam. Saudi Arabia, 2017.
- NEEDHAM, C. E., *Blast Waves, Shock Wave and High Pressure Phenomena.* DOI 10.1007/978-3-642-05288-0\_1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- NISHAWALA, V. V. **A Study of Large Deflection of Beams and Plates.** *The State University of New Jersey.* New Jersey, 2011.
- NGO, T., MENDIS, P., GUPTA, A., RAMSAY, J. **Blast Loading and Blast Effects on Structures.** *EJSE Special Issue: Loading on Structures.* The University of Melbourne, Australia, 2007.
- RAND, R. H. **Lecture Notes on Nonlinear Vibrations.** *Department Theoretical & Applied Mechanics, Cornell University.* New York, 2005.
- RANDERS - PEHRSON, G. BANNISTER, K. A. **Airblast loading model for DYNA2D and DYNA3D.** *Technical Report ARL-TR-1310, U.S Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, USA, 1997.*
- REZENDE, V. **O MÉTODO DE GALERKIN.** *Universidade Estadual de Maringá, Maringá - 2005.*
- RIGBY, S. E. **Blast Wave Clearing Effects on Finite - Sized Targets Subjected to Explosive Loads.** *Doctor's thesis. The Department of Civil and Civil Structural Engineering at the University of Sheffield, 2014.*
- RIGBY, S. E., ANDREW, T., BENNETT, T., CLARKE, S. D., FAY, S. D. **The Negative Phase of the Blast Load.** *International Journal of Protective Structures.* Multi - Science Publishing ISSN 2041 --4196, 2013.
- RUSSELL, J. M., *On the Hazard of Hydrogen Explosions at Space Shuttle Launch Pads.* NASA / ASEE / University of Central Florida, 1988.
- SIMPSON, L. L., SIMPSON, D. G. **Estimating Atmospheric Mass Using Air Density.** *Union Carbide Corporation, NASA.*

SLAUGHTER, W. S. ***The Linearized Theory of Elasticity***. Springer Science + Business Media, LLC. ISBN 978 - 1 - 4612 - 6608 - 2, 2002.

SOUDACK, A. C. ***Nonlinear Differential Equations Satisfied by the Jacobian Elliptic Functions***. *Mathematics Magazine*, Vol. 37, N° 3 (May 1964). pp 138 - 147.

TEICH, M., GEBBEKEN, N. ***The influence of the underpressure phase on the dynamic response of structures subjected to blast loads***. *International Journal of Protective Structures*. ISSN 219 - 234, 2010.

TIMOSHENKO, S. ***THEORY OF PLATES AND SHELLS***. *Engineering Societies Monographs*. Stanford University. 1959.

US Department of Defense, ***Structures to resist the effects of accidental explosions***, US DoD, Washington DC, USA, UFC-3-340-02, 2018.

VON KARMAN, T. ***Festigkeitsprobleme im Maschinenbau***. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, IV/4* , Teubner (1910) pp. 311-385.

YAMAKI, N. ***Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates***. *ZAMM* 1961; 41 (12): 601 – 10

YAMAKI, N. ***Stress Distribution in a Rectangular Plate under a Pair of Concentrated Forces***, *The Reports of the Institute of High Speed Mechanics*, Tohoku University, 8 (1957), pp. 1 - 12.

WEI, J. DHARANI, L. R. ***Response of laminated architectural glazing subjected to blast loading***. *International Journal of Impact Engineering*, 32(12):2032 - 2047, 2006.

**wxMaxima**, *Graphical user interface for the Maxima computer algebra system*. Versão 5.42.2, 2019. Disponível em: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/download.html>. Acesso em: 13 de Julho de 2019.

## APÊNDICE A

Para este tópico é demonstrada a equação da dinâmica com base na teoria de placas de Kirchhoff, considerando apenas os esforços de flexão e a estrutura submetida ao carregamento explosivo. Esta abordagem corresponde à teoria básica de dinâmica.

Com base nisso, são abordadas soluções para dois tipos de sistemas de apoios: simplesmente apoiado em todas as arestas e engastado em todas as arestas.

### A.1. Condição de Contorno: Simplesmente Apoiado em Todas as Arestas

A onda de pressão possui como meio de choque uma estrutura de placa. Em um primeiro momento, a solução é dada pela expressão positiva. Após, é realizado o equacionamento da parte negativa. Para a solução da equação de pressão, GUPTA (1987) apresenta a solução com base na equação Lagrangeana:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{A}(t)} \right) + \frac{\partial U}{\partial A(t)} = \frac{\partial W}{\partial A(t)} \quad (\text{A.1})$$

Onde:

$K$  Energia cinética da estrutura

$U$  Energia de deformação da estrutura

$W$  Trabalho externo aplicado na estrutura

$A(t)$  Amplitude da estrutura proveniente da carga dinâmica

A solução da equação diferencial é assumida conforme a série de Navier, como já abordada na Equação (68):

$$u_z = A(t) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.2})$$

Para determinar os valores das energias acima apresentadas, segue-se a formulação apresentada por TIMOSHENKO (1959). Com isso, a energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2} m \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{du_z}{dt} \right)^2 dx dy = \frac{abm}{8} \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

Onde:

$m$  Massa por unidade de área da estrutura

Para a energia de deformação da placa na flexão, é utilizada a expressão de TIMOSHENKO (1959), apresenta na Equação (95). Desta forma, substituindo a Equação (A.2) na Equação (95).

$$U_b = \frac{Eh^3 \pi^4 ab [A(t)]^2}{96(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{Eh^3 \pi^4 (\beta^2 + 1)^2 [A(t)]^2}{96b^2 \beta^3 (1-\nu^2)} \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, o trabalho externo é considerado como carregamento distribuído em toda a região da placa e seu valor corresponde a:

$$W = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} P(t) u_z dx dy = P(t) \frac{4abA(t)}{\pi^2} \quad (\text{A.4})$$

Assim, aplicando as Equações (A.2) à (A.4) na Equação (95), tem-se:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{D\pi^4}{m} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 A(t) = P(t) \frac{16}{m\pi^2} \quad (\text{A.5})$$

Em um primeiro momento, a Equação (A.5) é avaliada para pressão positiva da solicitação, apresentada pela primeira parcela da mesma, ou seja, a fase positiva. Considerando que a parcela positiva é representada pela equação de Friedlander, presente na Equação (62) para  $t \leq t_d$ , a solução para a equação diferencial é dada pela soma de uma solução homogênea e uma solução particular:

$$A_{pos} = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + (C_3 - C_4 t) e^{-\mu t} \quad (\text{A.6})$$

Em que:

$$\omega^2 = \frac{D\pi^4}{m} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2, \quad \mu = \frac{a'}{t_d} \quad (\text{A.7})$$

Onde:

$A_{pos}$  Amplitude da estrutura proveniente da fase positiva da explosão

$C_i$  Constante auxiliar de cálculo ( $i \in \mathbb{N}$ )

$\omega$  Frequência natural do sistema

$\mu$  Constante auxiliar de cálculo

Desta forma, aplicando a Equação (A.6) na Equação (A.1) e com as condições de contorno para placa totalmente apoiada, tem-se a seguinte solução final:

$$A_{pos} = \frac{1}{\mu^2 + \omega^2} \left[ \left( \delta + \frac{\alpha}{t_d} \frac{1}{\mu} \right) \frac{\mu}{\omega} \sin(\omega t) - \delta \cos(\omega t) + \left( \delta - \frac{\alpha}{t_d} t \right) e^{-\mu t} \right] \quad (\text{A.8})$$

Em que:

$$\alpha = \frac{16}{m\pi^2} p_{\max}, \quad \delta = \alpha - \frac{2\mu\beta}{\mu^2 + \omega^2}$$

Onde:

$\alpha, \delta$  Constantes auxiliares de cálculo

Com base na medida da amplitude transversal apresentada na Equação (A.8), é possível determinar as tensões no meio da placa, já que correspondem às tensões máximas da estrutura, devido à equação de pressão positiva, durante o intervalo de tempo  $t \leq t_d$ .

$$\sigma_{xx} = \frac{Eh\pi^2 A_{pos}}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{Eh\pi^2 A_{pos}}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

O segundo processo corresponde determinar a expressão da amplitude da estrutura que é provocada pela solicitação de subpressão, apresentada pela segunda parcela da Equação (62), ocorrente no intervalo  $t_d < t \leq t_d + t_d$ . Desta forma, a Equação (A.1) é escrita como:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{D\pi^4}{m} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 A(t) = -\frac{16p_{\min}}{m\pi^2} \left( \frac{6.75(t-t_d)}{t_d^-} \right) \left( 1 - \frac{(t-t_d)}{t_d^-} \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

A Equação (A.11) possui uma solução homogênea e uma particular. As condições de contorno iniciais desta são as finais da equação de pressão positiva, tanto para deslocamento quanto para velocidade. Assim:

$$\begin{aligned} A_{neg}(t=0) &= A_{pos}(t=t_d) \\ \frac{d}{dt} A_{neg}(t=0) &= \frac{d}{dt} A_{pos}(t=t_d) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Onde:

$A_{neg}$  Amplitude da estrutura proveniente da fase negativa da explosão

A solução da Equação (A.11) é dada por:

$$A_{neg} = C_5 \sin(\omega t) + C_6 \cos(\omega t) + C_7 t^3 + C_8 t^2 + C_9 t + C_{10} \quad (\text{A.13})$$

Os coeficientes  $C_5$  e  $C_6$  da Equação (A.13) são determinados apenas com base nas condições finais provenientes da amplitude da equação de pressão positiva. Os demais são determinados de forma a satisfazer a solução particular.

Ao gerar ambos os gráficos, é necessário que o tempo final da fase positiva ( $t_d$ ), seja o tempo inicial da equação de pressão negativa. Contudo, não apenas isso, mas a derivada de ambas as equações deve ser a mesma, visto que deve haver continuidade no gráfico do impulso proveniente deste esforço. Desta forma, a equação que gera essa correção na descontinuidade é dada por:

$$t_d = \frac{4p_{\max} t_d^- e^{-a'}}{27p_{\min}} \quad (\text{A.14})$$

Relacionado às tensões totais, são aplicadas as Equações (A.9) e (A.10) com base na amplitude encontrada na Equação (A.13).

Finalmente, há ainda o comportamento da estrutura quando está livre de qualquer carregamento dinâmico, onde é considerado que a placa oscila em torno do seu plano médio (vibração livre).

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{D\pi^4}{m} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 A(t) = 0 \quad (\text{A.15})$$

A Equação (A.15) possui apenas a solução homogênea. As condições de contorno iniciais desta são as finais da equação de pressão negativa, tanto para deslocamento quanto para velocidade.

$$\begin{aligned} A_{liv}(t=0) &= A_{neg}(t=t_d^- + t_d) \\ \frac{d}{dt} A_{liv}(t=0) &= \frac{d}{dt} A_{neg}(t=t_d^- + t_d) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Onde:

$A_{liv}$  Amplitude de reação da estrutura livre de carregamento

A solução da Equação (A.15) é dada por:

$$A_{liv} = C_{11} \sin(\omega t) + C_{12} \cos(\omega t) \quad (\text{A.17})$$

Da mesma forma, para a determinação das tensões totais, são aplicadas as Equações (A.9) e (A.10) com base na amplitude encontrada na Equação (A.17).

## A.2. Condição de Contorno: Engastado em Todas as Arestas

A solução particular da equação diferencial é assumida conforme a série de Navier (Equação A.18), conforme já apresentada pela Equação (129).

$$u_z = A(t) \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.18})$$

Para determinar os valores das energias acima apresentadas, segue-se a formulação apresentada por TIMOSHENKO (1959), que foi utilizada na Equação (97). Com isso, a energia cinética é dada por:

$$K = \frac{9abm}{128} \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \quad (\text{A.19})$$

Para a energia de deformação na flexão, utiliza-se a Equação (95), tem-se:

$$U_b = \frac{D\pi^4 [A(t)]^2}{8b^2\beta^3} (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3) \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, o trabalho externo da Equação (A.4) é considerado distribuído em toda a região da placa e seu valor corresponde à:

$$W = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} P(t) u_z dx dy = P(t) \frac{abA(t)}{4} \quad (\text{A.21})$$

Assim, aplicando as Equações (A.19) à (A.21) na Equação (A.1), tem-se:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{16\pi^4 D (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9b^4 \beta^4 m} A(t) = P(t) \frac{16}{9m} \quad (\text{A.22})$$

Em um primeiro momento, a equação acima é avaliada para pressão positiva da solicitação, ocorrente no intervalo  $t \leq t_d$ , apresentada pela Equação (62). A solução geral da equação diferencial apresentada pela Equação (A.22) é a mesma da referida para condições de contorno simplesmente apoiada, Equação (A.8). A diferença é dada para o valor da frequência natural da estrutura, ou seja:

$$\omega^2 = \frac{16\pi^4 D (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9b^4 \beta^4 m} \quad (\text{A.23})$$

O segundo processo corresponde determinar a expressão da amplitude da estrutura que é provocada pela solicitação de subpressão, apresentada pela segunda parcela na Equação (62). Desta forma, a Equação (A.1) é escrita como:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{16\pi^4 D(3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9b^4 \beta^4 m} A(t) = -\frac{16p_{\min}}{m\pi^2} \left( \frac{6.75(t-t_d)}{t_d^-} \right) \left( 1 - \frac{(t-t_d)}{t_d^-} \right)^2 \quad (\text{A.24})$$

A Equação (A.24) possui uma solução homogênea e um particular. Pelo mesmo processo da condição de apoio simples, é dado que as condições de contorno iniciais desta são as finais da equação de pressão positiva, tanto para deslocamento quanto para velocidade. Além disto, a solução da Equação (A.24) possui a mesma estruturação da Equação (A.13), contudo, os coeficientes  $C_i$  são adaptados para cada tipo de apoio.

Finalmente, há ainda o comportamento da estrutura quando está livre de qualquer carregamento dinâmico:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \frac{16\pi^4 D(3\beta^4 + 2\beta^2 + 3)}{9b^4 \beta^4 m} A(t) = 0 \quad (\text{A.25})$$

A Equação (A.25) possui apenas a solução homogênea. As condições iniciais desta são as finais da equação de pressão positiva, tanto para deslocamento quanto para velocidade, Equação (A.16).

As tensões para placas engastadas são contempladas pelas Equações (A.9) e (A.10), de acordo com as amplitudes determinadas pelas Equações (A.24) à (A.25).

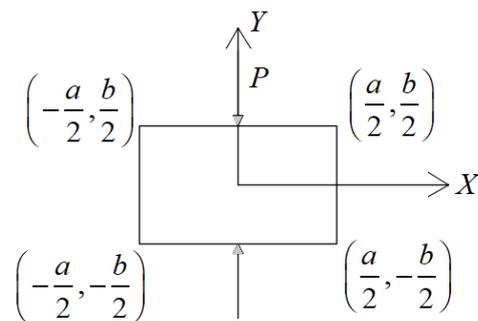
## APÊNDICE B

Neste apêndice é apresentado a solução homogênea da equação de Airy, apresentada pela Equação (78). A indução para a solução se dá por:

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{B.1})$$

A solução homogênea da Equação (B.1) é proposta por YAMAKI (1957), onde aborda-se a respeito do efeito de membrana que é observado a partir da aplicação de um par de forças concentradas no plano central da placa, conforme Figura B.1:

Figura B.1 - Par de forças concentradas no plano médio da placa



A condição de YAMAKI (1957) implica é que a estrutura de placa está orientada em um plano coordenado  $XY$  submetida a determinadas condições:

$$\begin{aligned}
 X = \pm \frac{a}{2} : & \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial Y} = 0 \end{cases} \\
 Y = \pm \frac{b}{2} : & \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = -\frac{2F}{ah} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n\pi X}{a} \right) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial Y} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Realizando mudança de variáveis, de forma que a Equação (B.2) se torne adimensional:

$$x = \frac{2X}{a}, \quad y = \frac{2Y}{b} \quad (\text{B.3})$$

Com base na mudança de variáveis, a Equação (B.2) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
 x = \pm 1: & \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \\
 y = \pm 1: & \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{aF}{2h} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi x \right) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Desta forma, a Equação (B.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \left(\frac{a}{2}x\right)^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \left(\frac{a}{2}x\right)^2 \partial \left(\frac{b}{2}y\right)^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \left(\frac{b}{2}y\right)^4} = 0 \\
 \frac{16}{a^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{16}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{16}{b^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Para a primeira análise, multiplicando-se a Equação (B.5) por  $a^4$ , tem-se:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \tag{B.6}$$

Desta forma, de acordo com YAMAKI (1957), com base na simetria do problema em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , então pode inicialmente assumir a primeira expressão solução:

$$\phi = f_n(y) \cos(n\pi x) \tag{B.7}$$

Substituindo a Equação (B.7) na Equação (B.6) e realizando manipulações matemáticas, tem-se:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} [f_n(y) \cos(n\pi x)] + 2\beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} [f_n(y) \cos(n\pi x)] + \beta^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} [f_n(y) \cos(n\pi x)] = 0$$

$$\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^4 f_n(y) - 2\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 \frac{\partial^2 f_n(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 f_n(y)}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{B.8})$$

A solução da (B.12) corresponde à:

$$f_n(y) = \begin{bmatrix} C_{12} \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + C_{13} y \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + \\ C_{14} \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + C_{15} y \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Entretanto,  $f_n(y)$  deve ser uma função para  $y$ , logo  $C_{14}$  e  $C_{15}$  são zero. Quando a tensão de cisalhamento no limite da placa retangular é zero, a segunda condição para  $x$  e  $y$  da Equação (B.4) deve ser satisfeita, ou seja:

$$\frac{n\pi}{\beta} C_{12} \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + C_{13} \left[ \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} y \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \right] = 0 \quad (\text{B.10})$$

Onde

$$C_{13} = \frac{-\frac{n\pi}{\beta} C_{12} \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right)}{\left[ \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} y \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \right]}$$

Substituindo a Equação (B.10) na Equação (B.9), é possível encontrar que:

$$f_n(y) = C_n \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} y \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \right] \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) - \\ \frac{n\pi}{\beta} y \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \end{array} \right\} \quad (\text{B.11})$$

Onde:

$$C_n = \frac{C_{12}}{\left[ \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} y \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \right]}$$

Tal como proposto pela segunda condição da Equação (B.4), realizando a avaliação da equação acima para  $y = \pm 1$ , a Equação (B.11) é reescrita como:

$$f_n(y) = C_n \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} \cosh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \right] \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) - \\ & \frac{n\pi}{\beta} y \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta} y\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.12})$$

Este processo foi para determinar uma função que fosse dependente da variável  $y$ . Agora, o mesmo procedimento é realizado para uma função dependente de  $x$ . Com base na simetria do problema em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , então pode-se inicialmente assumir a segunda expressão solução:

$$\phi = g_n(x) \cos(n\pi y) \quad (\text{B.13})$$

Multiplicando a Equação (B.5) por  $b^4$  e aplicando a solução da Equação (B.13), tem-se para a primeira análise:

$$\frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^4} + 2(\beta n\pi)^2 \frac{\partial^4 g(x)}{\partial x^2 \partial y^2} + (\beta n\pi)^4 g(x) = 0 \quad (\text{B.14})$$

A solução para a equação acima corresponde

$$g_n(x) = \begin{bmatrix} C_{16} \cosh(\beta n\pi x) + C_{17} x \sinh(\beta n\pi x) + \\ C_{18} \sinh(\beta n\pi x) + C_{19} x \cosh(\beta n\pi x) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Entretanto,  $g_n(x)$  deve ser uma função para  $x$ , logo  $C_{18}$  e  $C_{19}$  são zero. Quando a tensão de cisalhamento no limite da placa retangular é zero, a primeira condição da Equação (B.4) para  $x$  e  $y$  da deve ser satisfeita, ou seja:

$$\beta n\pi C_{16} \sinh(\beta n\pi x) + C_{13} \left[ \sinh(\beta n\pi x) + \beta n\pi x \cosh(\beta n\pi x) \right] = 0 \quad (\text{B.16})$$

Onde:

$$C_{13} = \frac{-\beta n\pi C_{16} \sinh(\beta n\pi x)}{\left[ \sinh(\beta n\pi x) + \beta n\pi x \cosh(\beta n\pi x) \right]}$$

Substituindo a expressão acima na Equação (B.15) e realizando manipulações matemáticas, tem-se:

$$g_n(x) = C'_n \left\{ \begin{array}{l} [\sinh(\beta n \pi x) + \beta n \pi x \cosh(\beta n \pi x)] \cosh(\beta n \pi x) - \\ \beta n \pi x \sinh(\beta n \pi) \sinh(\beta n \pi x) \end{array} \right\}$$

Onde:

$$C'_n = \frac{C_{16}}{[\sinh(\beta n \pi x) + \beta n \pi x \cosh(\beta n \pi x)]}$$

Ao aplicar a primeira condição da Equação (B.4), a expressão é avaliada em  $x = \pm 1$ , com isso, a equação acima é reescrita como:

$$g_n(x) = C'_n \left[ \begin{array}{l} [\sinh(\beta n \pi) + \beta n \pi \cosh(\beta n \pi)] \cosh(\beta n \pi x) - \\ \beta n \pi \sinh(\beta n \pi) \sinh(\beta n \pi x) \end{array} \right] \quad (\text{B.17})$$

Onde:

$$C'_n = \frac{C_{12}}{\left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} \cosh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \right]}$$

Observando as Equação (B.12) e Equação (B.17) para  $n = 0$ , as expressões passam a ter seus resultados zerados. Com isso, gera-se a solução:

$$\begin{aligned} f_0(y) &= C_0 y^2 \\ g_0(x) &= C'_0 x^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Desta forma, a solução homogênea apresenta uma forma completa, dada pelas Equações (B.12), (B.17) e (B.18), formulada primeiramente por YAMAKI (1957):

$$\phi_0 = \frac{1}{2} p'_y x^2 + \frac{1}{2} p'_x y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left( \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) + \frac{n\pi}{\beta} \cosh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) - \right] \cos(n\pi x) + \\ \left[ \frac{n\pi y}{\beta} \sinh\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{\beta}\right) \right] \end{array} \right. \quad (B.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[ \left( \sinh(\beta n\pi) + \beta n\pi \cosh(\beta n\pi) \right) \cosh(\beta n\pi x) - \right] \cos(n\pi y) \\ \left[ \beta n\pi \sinh(\beta n\pi) \sinh(\beta n\pi x) \right] \end{array} \right\}$$

De forma mais elegante, a equação acima foi reescrita conforme a já apresentada anteriormente:

$$\phi_0 = \frac{1}{2} p'_y x^2 + \frac{1}{2} p'_x y^2 + Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n \left[ \Omega\left(\frac{n}{\beta}\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - \frac{2n\pi y}{a} \Psi\left(\frac{n}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right] \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + \\ B_n \left[ \Omega(n\beta) \cosh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) - \frac{2n\pi x}{b} \Psi(n\beta) \sinh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \end{array} \right\}$$

Onde:

$$\Omega(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi \cosh(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}$$

$$\Psi(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}$$

## APÊNDICE C

Neste apêndice, é demonstrada a equação proveniente da solução homogênea de Airy cuja qual é presente na expressão do somatório. Para isto, realiza-se a derivada segunda tanto de  $x$  quanto de  $y$  e avalia-se para  $x = \pm a/2$  e  $y = \pm b/2$ . Para um primeiro momento, avalia-se a segunda derivada em  $x$  da Equação (78) determinada (também demonstrada no APÊNDICE A), com isso tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_{0,xx} = p'_y - & \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \left\{ \Omega\left(\frac{n}{\beta}\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - \Psi\left(\frac{n}{\beta}\right) y \sinh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right\} - & \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n^2 \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \left\{ \frac{1}{(n\beta)^2} \Omega(n\beta) \cosh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) - \right. & \\ \left. \Psi(n\beta) \left\{ \frac{b}{n\pi} \cosh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) + x \sinh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) \right\} \right\} & \end{aligned} \quad (C.1)$$

Avaliando para  $y = \pm b/2$ :

$$\begin{aligned} \phi_{0,xx}|_{y=b/2} = p'_y - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + & \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \frac{-\left(\sinh(n\beta\pi) + n\beta\pi \cosh(n\beta\pi)\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) -}{\sinh(n\beta\pi) \cosh(n\beta\pi) + n\beta\pi} \right. & \\ \left. \frac{2n\pi x}{b} \sinh(n\beta\pi) \sinh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right)}{\sinh(n\beta\pi) \cosh(n\beta\pi) + n\beta\pi} \right] & \end{aligned}$$

Pode-se escrever como:

$$\phi_{0,xx}|_{y=b/2} = p'_y - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n B_n \xi\left(n\beta, \frac{2x}{b}\right) + A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \right] \quad (C.2)$$

Onde:

$$\xi(\gamma, z) = \frac{(\sinh(\gamma\pi) - \gamma\pi \cosh(\gamma\pi)) \cosh(\gamma\pi z) + \gamma\pi z \sinh(\gamma\pi) \sinh(\gamma\pi z)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi} \quad (C.3)$$

Avalia-se a segunda derivada em  $y$  da Equação (78), com isso tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_{0,yy} = p'_x + \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \left\{ \begin{array}{l} \Omega\left(\frac{n}{\beta}\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - \\ \frac{2n\pi}{an^2} \Psi\left(\frac{n}{\beta}\right) \left[ \frac{a}{n\pi} \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - y \sinh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right] \end{array} \right\} - \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n^2 \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(n\beta)^2} \Omega(n\beta) \cosh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) - \\ \frac{2n\pi}{b(n\beta)^2} \Psi(n\beta) x \sinh\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (C.4)$$

Avaliando para  $x = \pm a/2$ :

$$\begin{aligned} \phi_{0,yy} \Big|_{x=a/2} = p'_x + \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^2 \cos(n\pi) \left\{ \begin{array}{l} \Omega\left(\frac{n}{\beta}\right) \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - \\ \frac{2n\pi}{an^2} \Psi\left(\frac{n}{\beta}\right) \left[ \frac{a}{n\pi} \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) - y \sinh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right] \end{array} \right\} - \\ \frac{4Eh^2\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n^2 \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(n\beta)^2} \Omega(n\beta) \cosh(n\pi\beta) - \\ \frac{2n\pi}{b(n\beta)^2} \Psi(n\beta) x \sinh(n\pi\beta) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Pode-se reescrever como:

$$\phi_{0,yy} \Big|_{x=a/2} = p'_x - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n A_n \xi\left(\frac{n}{\beta}, \frac{2y}{a}\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \right] \quad (C.5)$$

As Equações (C.2) e (C.5) podem ser escritas como em série de Fourier, dado pelo seguinte formato:

$$f(n) = a_0 + \sum_{n=1}^i (a_n \cos n\pi v + b_n \sin n\pi v) \quad (C.6)$$

Dada a configuração geral da série de Fourier, os coeficientes são:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \xi(\gamma, z) dz$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \xi(\gamma, z) \cos(m\pi z) dz$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \xi(\gamma, z) \sin(m\pi z) dz$$

Os coeficientes apresentados são calculados para um intervalo qualquer. Para este caso em particular, é dado que  $-1 \leq z \leq 1$ . Desta forma, tem-se:

$$a_0 = 0, \quad b_n = 0$$

Para o caso do coeficiente  $a_n$ , utilizou-se o *software* Wxmaxima para a solução do mesmo, encontrando:

$$a_n = \frac{(-1)^m \gamma m^2}{\pi(\gamma^2 + m^2)^2} \frac{e^{-2\gamma\pi} (e^{\gamma\pi} - 1)^2 (e^{\gamma\pi} + 1)^2}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}$$

Sendo:

$$\sinh(-\gamma\pi) = \frac{1 - e^{2\gamma\pi}}{2e^{\gamma\pi}}$$

Logo,

$$a_n = \eta(\gamma, m) = \frac{4(-1)^m \gamma m^2}{\pi(\gamma^2 + m^2)^2} \frac{\sinh^2(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi} \quad (\text{C.7})$$

Desta forma, a Equação (C.3) pode ser reescrita como:

$$\xi(\gamma, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta(\gamma, m) \cos(m\pi z) \quad (\text{C.8})$$

Aplicando a Equação (C.7) nas Equações (C.2) e (C.5), tem-se:

$$\phi_{0,yy} \Big|_{x=a/2} = p'_x - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n A_n \eta \left( \frac{m}{\beta}, n \right) \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) + B_n \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) \right]$$

$$\phi_{0,yy} \Big|_{x=a/2} = p'_x - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n A_n \eta \left( \frac{m}{\beta}, n \right) + B_n \right] \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (C.9)$$

$$\phi_{0,xx} \Big|_{y=b/2} = p'_y - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n B_n \eta(m\beta, n) \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) + A_n \cosh \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \right]$$

$$\phi_{0,xx} \Big|_{y=b/2} = p'_y - \frac{4Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n B_n \eta(m\beta, n) + A_n \right] \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \quad (C.10)$$

A partir disto, cria-se uma relação entre as equações de Airy com solução particular e homogênea:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \quad (C.11)$$

É válido ressaltar que para este tipo de condições de contorno (apoio simples), o cisalhamento nos bordos é nulo, desta forma, pode-se afirmar que:

$$\phi_{,yy} = \phi_{0,yy} + \phi_{1,yy} = 0$$

$$\phi_{0,yy} = -\phi_{1,yy} \quad (C.12)$$

YAMAKI (1961) propõe que tanto a solução particular quanto a homogênea da equação de Airy podem ser expressas por série dupla de Fourier. Para o caso da solução particular, é expressa como:

$$\phi_1 = Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{pq} \cos \left( \frac{2p\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{2q\pi y}{b} \right) \quad (C.13)$$

Derivando em relação a  $y$ , avaliando para  $x = \pm a/2$  e realizando mudança de variável de  $q$  para  $n$ , tem-se:

$$\phi_{1,yy} \Big|_{x=a/2} = -\frac{4\pi^2 Eh^2}{a^2} \beta^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^p \varphi_{pn} \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (C.14)$$

O mesmo procedimento é dado para a derivada em relação à  $x$  sua avaliação em  $y = \pm b/2$ , da mesma forma aplicando mudança de variável, tem-se:

$$\phi_{1,yy} \Big|_{y=b/2} = -\frac{4\pi^2 Eh^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \varphi_{nq} \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \quad (\text{C.15})$$

Considerando o conceito introduzido pela Equação (C.12), iguala-se as Equações (C.9) e (C.10) nas expressões apresentadas pelas Equações (C.14) e (C.15). Desta forma, encontra-se o sistema de equações que introduz os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  apresentados pela solução homogênea da equação de Airy:

$$\begin{cases} B_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \eta\left(\frac{m}{\beta}, n\right) = -\beta^2 n^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \varphi_{pn} \\ A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m \eta(m\beta, n) = -n^2 \sum_{q=0}^1 (-1)^q \varphi_{nq} \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Da mesma forma que a expressão da solução particular foi escrita em forma de série dupla de Fourier, a solução homogênea também pode ser escrita de tal forma. Desta forma, é conhecida a Equação (78) onde pode-se chamar de  $\bar{\xi}$  a expressão que se repete na equação mencionada, ou seja:

$$\bar{\xi}(\gamma, z) = \frac{[\sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi \cosh(\gamma\pi)] \cosh(\gamma\pi z) - \gamma\pi z \sinh(\gamma\pi) \sinh(\gamma\pi z)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}$$

Com isso, a Equação (78) pode ser reescrita como:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_n}{n^2} \bar{\xi}\left(\frac{n}{\beta}, \frac{2y}{b}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + \\ \frac{B_n}{(n\beta)^2} \bar{\xi}\left(n\beta, \frac{2x}{a}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \end{array} \right\} \quad (\text{C.17})$$

A equação apresentada por  $\bar{\xi}$  pode ser expandida em série de Fourier:

$$\bar{\xi}(\gamma, z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi z) + b_n \sin(n\pi z)]$$

$$a_0 = \int_{-1}^1 \bar{\xi}(\gamma, z) dz$$

$$a_n = \int_{-1}^1 \bar{\xi}(\gamma, z) \cos(x\pi z) dz$$

$$b_n = \int_{-1}^1 \bar{\xi}(\gamma, z) \sin(x\pi z) dz$$

A parcela  $a_0$  é dada por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{4(e^{4\pi\gamma} - 2e^{2\pi\gamma} + 1)}{\pi\gamma(e^{4\pi\gamma} + 4\pi\gamma e^{2\pi\gamma} - 1)} = \frac{1}{2} \frac{4 \sinh^2(\gamma\pi)}{\pi\gamma [\cosh(\gamma\pi) \sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi]}$$

A parcela  $a_n$  ao ser calculada com o auxílio do software WxMaxima e manipulada algebricamente, é possível encontrar:

$$a_n = \frac{4(-1)^n \gamma^3 (e^{4\pi\gamma} - 2e^{2\pi\gamma} + 1)}{\pi(\gamma^2 + \pi^2)^2 (e^{4\pi\gamma} + 4\pi\gamma e^{2\pi\gamma} - 1)} = \frac{4(-1)^n \gamma^3 \sinh^2(\gamma\pi)}{\pi(\gamma^2 + \pi^2)^2 [\cosh(\gamma\pi) \sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi]}$$

A parcela  $b_n$  foi calculada e encontrou-se valor zero.

Assim,  $\bar{\xi}$  pode ser escrito como:

$$\bar{\xi}(\gamma, z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \cos(n\pi z) \quad (\text{C.18})$$

Onde:

$$a_n^* = \frac{4(-1)^n \gamma^3 \varepsilon \sinh^2(\gamma\pi)}{\pi(\gamma^2 + \pi^2)^2 [\cosh(\gamma\pi) \sinh(\gamma\pi) + \gamma\pi]}, \quad \varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{para } n = 0 \\ 1, & \text{para } n > 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

Observa-se que o somatório passa a iniciar de zero porque na expressão é incorporado o primeiro termo,  $a_0$ . Além disso, fazendo mudança de variáveis:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} a_p^* \left( \frac{n}{\beta} \right) \cos \left( \frac{2p\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) +$$

$$Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_n}{(n\beta)^2} a_p^* (n\beta) \cos \left( \frac{2p\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right)$$

Realizando a separação do somatório em uma parcela inicial:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{A_n}{n^2} a_0^* \left( \frac{n}{\beta} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} a_p^* \left( \frac{n}{\beta} \right) \cos \left( \frac{2p\pi y}{b} \right) \right] \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) + \right.$$

$$\left. \left[ \frac{B_n}{(n\beta)^2} a_0^* (n\beta) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n\beta)^2} a_p^* (n\beta) \cos \left( \frac{2p\pi x}{a} \right) \right] \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) \right\}$$

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{n^2} a_0^* \left( \frac{n}{\beta} \right) \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) + \frac{B_n}{(p\beta)^2} a_0^* (p\beta) \cos \left( \frac{2p\pi y}{b} \right) \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{n^2} a_p^* \left( \frac{n}{\beta} \right) \cos \left( \frac{2p\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \right] + \quad (C.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{B_n}{(n\beta)^2} a_p^* (n\beta) \cos \left( \frac{2p\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{2n\pi y}{b} \right) \right]$$

Com base no artigo do YAMAKI (1961), utilizado por FELDGUN (2016) como referência, pode-se reescrever a Equação (C.19) como:

$$\phi_0 = Eh^2 \sum_p \sum_q \phi'_{pq} \cos \left( \frac{2\pi px}{a} \right) \cos \left( \frac{2\pi qy}{b} \right)$$

Onde:

$$\phi'_{pq} = \frac{4\beta}{\pi \left( p^2 + (q\beta)^2 \right)^2} \left[ \frac{p(-1)^q \varepsilon_q \sinh^2 \left( \frac{p}{\beta} \pi \right) A_p}{\sinh \left( \frac{p}{\beta} \pi \right) \cosh \left( \frac{p}{\beta} \pi \right) + \frac{p}{\beta} \pi} + \frac{q(-1)^p \varepsilon_p \sinh^2 (q\beta\pi) B_q}{\sinh (q\beta\pi) \cosh (q\beta\pi) + q\beta\pi} \right]$$

Que corresponde a Equação (84).

## APÊNDICE D

De acordo com Jacobi, define-se a função inversa da integral elíptica do primeiro tipo como sendo:

$$\omega t = u = F(k, \sin^{-1} x) = \int_0^x \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}} \quad (\text{D.1})$$

O quarto período de oscilação é dado por  $K(k)$ , a integral elíptica completa para o primeiro tipo, quando  $K(k) = F(k, \frac{1}{2}\pi)$ .

Vale ressaltar que são dados 3 tipos de integrais elípticas de Jacobi: as do primeiro, segundo e terceiro tipo. Contudo, para o desenvolvimento deste trabalho, basta-se conhecer a integral elítica do primeiro tipo.

A Equação (D.1) pode ser reescrita como:

$$Sn^{-1}x = \int_0^x \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}, 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{D.2})$$

Para essa expressão tem-se que  $0 \leq Sn \leq 1$  para  $0 \leq F(k, \sin^{-1} x) \leq K(k)$ , isto é,  $Sn$  é igual ao quarto período de  $K(k)$ . Sendo “ $k$ ” uma função das condições iniciais, correspondente ao período de oscilação,  $4K$  torna-se, também, uma função dependente das condições iniciais. Desde a dependência da frequência da amplitude inicial ser uma propriedade de equações diferenciais de segunda ordem não lineares, é possível afirmar que o seno elíptico tem-se uma boa aproximação das soluções das equações diferenciais não lineares (SOUNDACK, 1964).

Além do seno elíptico, outras duas definições são contempladas por Jacobi, como o caso do cosseno elíptico e de “ $\Delta$ ”, apresentado por “ $D$ ”, ou seja:

$$Dn(k, u) = \sqrt{1 - k^2 Sn^2(k, u)} \quad (\text{D.3})$$

$$Cn(k, u) = \sqrt{1 - Sn^2(k, u)} \quad (\text{D.4})$$

Além das duas equações acima, outras definições a serem apresentadas são as derivadas das funções elípticas de Jacobi, visto que são utilizadas para solucionar a equação diferencial de Duffing.

De acordo com a Equação (D.2), pode-se demonstrar a derivada do seno elíptico:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{dSn(k,u)}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

$$\frac{dSn(k,u)}{du} = Cn(k,u)Dn(k,u) \quad (D.5)$$

Também a do cosseno elíptico, com base na Equação (D.4):

$$\frac{dCn(k,u)}{du} = \frac{-2Sn(k,u)Cn(k,u)Dn(k,u)}{2\sqrt{1-Sn^2(k,u)}}$$

$$\frac{dCn(k,u)}{du} = -Sn(k,u)Dn(k,u) \quad (D.6)$$

A derivada de *Delta*, com base na Equação (D.3) :

$$\frac{dDn(k,u)}{du} = \frac{-2k^2Sn(k,u)Cn(k,u)Dn(k,u)}{2\sqrt{1-k^2Sn^2(k,u)}}$$

$$\frac{dDn(k,u)}{du} = -k^2Sn(k,u)Dn(k,u) \quad (D.7)$$

As Equações (D.3) à (D.7) são fundamentais para a demonstração da solução da equação homogênea de Duffing, que corresponde à equação da amplitude dinâmica da placa com efeito de membrana. Desta forma, dada a Equação (71), a solução é dada por:

$$A(t) = A_0Cn(k, \lambda t) \quad (D.8)$$

As primeiras e segunda derivadas da expressão acima são determinadas com base nas Equações (D.6) e (D.7). Com isso:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda A_0 Sn Dn \quad (D.9)$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} = -\lambda^2 A_0 Cn [Dn^2 - k^2 Sn^2] \quad (D.10)$$

De acordo com as definições apresentadas pelas Equações (D.3) e (D.4), as Equações (D.9) e (D.10) podem ser reescritas como:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} = -\lambda^2 A_0 Cn [1 - 2k^2 Sn^2]$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} = -\lambda^2 A_0 Cn [1 - 2k^2 + 2k^2 Cn^2]$$

Substituindo tal expressão na Equação (71), considerando o sistema de vibração livre, encontra-se:

$$-\lambda^2 A_0 Cn (1 - k^2) + K_1 A_0 Cn - 2k^2 \lambda^2 A_0 Cn^3 + K_3 A_0^3 Cn^3 = 0$$

Com isso, reorganizando a expressão e igualando os devidos termos à zero, é possível determinar que:

$$k = \sqrt{\frac{K_3 A_0^2}{2(K_1 + K_3 A_0^2)}}$$

$$\lambda = \sqrt{K_1 + K_3 A_0^2}$$

Onde corresponde a solução apresentada pelas Equações (168) e (169).