



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Carolina Rocha Fortes da Silva

**Implementação computacional de modelos constitutivos para
juntas de argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS**

Rio de Janeiro

2020

Carolina Rocha Fortes da Silva

Implementação computacional de modelos constitutivos para juntas de argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS



Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração Estruturas.

Orientadora: Prof^ª. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Carolina Rocha Fortes da.
Implementação computacional de modelos constitutivos para juntas de argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS / Carolina Rocha Fortes da Silva. – 2020.
109f.

Orientadora: Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Alvenaria - Teses. 3. Juntas (Engenharia) - Teses. 4. Juntas (Engenharia) - Teses. 5. Método dos elementos finitos - Teses. I. Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 624.078

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.



Assinatura

01 de julho de 2020

Data

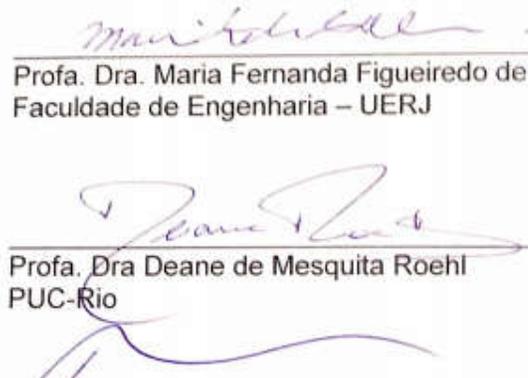
Carolina Rocha Fortes da Silva

**Implementação computacional de modelos constitutivos para juntas de
argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 09 de março de 2020.

Banca Examinadora:



Profa. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira (Orientadora)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Profa. Dra. Deane de Mesquita Roehl
PUC-Rio

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos
Faculdade de Engenharia – UERJ

Rio de Janeiro

2020

RESUMO

SILVA, Carolina Rocha Fortes da. *Implementação computacional de modelos constitutivos para juntas de argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS*. 2020. 109f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2020.

No estudo do comportamento das estruturas, é fundamental a análise tanto de resultados experimentais quanto numéricos, a partir dos quais os métodos de dimensionamento e os processos construtivos podem ser aprimorados. Para construções em alvenaria, que é um material de forte anisotropia e comportamento não linear devido as suas juntas, este ganho de eficiência é de grande importância, uma vez que sua resposta depende das cargas aplicadas, do tamanho do painel e da presença de abertura e das propriedades de seus componentes. Assim sendo, a modelagem numérica pode ser utilizada para teste de diferentes configurações de painéis. A modelagem de um painel de alvenaria difere sensivelmente do processo de modelagem de estruturas em concreto ou em aço devido às características do material compósito. Este possui propriedades de falha e deformabilidade distintas dependendo da direção tanto das tensões quanto da orientação das juntas, uma vez que as juntas horizontais agem como planos de fraqueza. A abordagem da micromodelagem simplificada é uma das muitas estratégias de modelagem numérica pelo Método dos Elementos finitos propostas para a modelagem numérica de painéis de alvenaria. Nesta abordagem, são utilizados elementos de espessura nula para a representação das juntas de argamassa e simulação dos efeitos de escorregamento e abertura das mesmas a partir de modelos constitutivos adequados. Neste trabalho será analisado o comportamento de painéis de alvenaria estrutural e de seus componentes utilizando a abordagem da micromodelagem simplificada a partir da aplicação do Método dos Elementos Finitos com o programa ANSYS. Mais especificamente, será empregado um modelo constitutivo plástico com um envelope de Mohr Coulomb, tensão de *cut off* de tração e superfície de fechamento compressiva com encruamento para representação das juntas de argamassa. Os algoritmos dessas aplicações, que utilizam métodos explícitos de correção de tensões, foram implementados no programa através da criação de sub-rotinas de usuário. Resultados numéricos foram comparados com referências obtidas na literatura. Finalmente, vantagens, desvantagens e limitações dessa abordagem foram confirmadas.

Palavras chave: Alvenaria estrutural; Método dos elementos finitos; Modelos constitutivos.

ABSTRACT

SILVA, Carolina Rocha Fortes da. *Computational implementation of constitutive models for mortar joints of masonry structures in ANSYS*. 2020. 109f. Dissertation (Master Degree in Civil Engineering) – Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, 2020.

Both experimental and numerical results are important to better understand the behavior of structures, since they may provide useful information for the improvement of design, building and repair processes. In the case of structural masonry, which is a composite material with strong anisotropy and non-linear behavior due to its mortar joints, the panel response for a given load depends on its dimensions, the presence of openings such as windows and doors, and the unit and mortar properties. In this sense, numerical simulations may be used to investigate the behavior of a variate of panel configurations. The modeling of a masonry panel differs significantly from the process of modeling concrete or steel structures due to the complex behavior of the composite material. Deformation and failure properties depend on both the stress orientation and the joint direction, since the horizontal joints act as weak surfaces. The simplified micromodeling approach is one of the several strategies that have been proposed for the numerical analysis of masonry panels in the frame of the Finite Element Method. This approach makes use of zero-thickness interface elements to represent joints and simulate their sliding and opening behavior with appropriate constitutive models. This work analyzes the behavior of structural masonry panels by using the simplified micromodeling approach with the application of the Finite Element Method software ANSYS. A plasticity constitutive model for the mortar joints could be investigated – a Mohr Coulomb envelop with tension cut-off and compressive cap with hardening. The corresponding algorithms were implemented into an ANSYS user material subroutine, by employing an implicit scheme using the return mapping algorithm. Numerical results were compared to reference results available in literature. Finally, some advantages, disadvantages and limitations of the employed modelling approach could be confirmed.

Keywords: Structural masonry; Finite element method; Constitutive models.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
UPFs	<i>User Programmable Features</i>

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Ensaio à compressão simples num bloco cerâmico (Bergami, 2007).....	17
Figura 2. Curva tensão x deformação de blocos (Lourenço, 1996).....	18
Figura 3. Curva tensão x deslocamento das juntas no modo I (Tayer, 2018).....	21
Figura 4. Curvas tensão cisalhante x deslocamento das juntas no modo II para diferentes tensões de confinamento da argamassa (Adaptado de van Noort, 2012).	22
Figura 5. Comportamento mecânico dos componentes da alvenaria (Tayer, 2018)..	24
Figura 6. Superfícies de falha para compressão biaxial da alvenaria (Page, 1981)..	24
Figura 7. Planos de falha para diferentes direções do carregamento (Massart, 2003)	25
Figura 8. Mecanismos de ruptura (Lourenço, 1994).....	26
Figura 9. Ensaio de compressão diagonal em mini-painéis (Galleguillos e Valenzuela, 2009).....	26
Figura 10. Tipos de modelagem (Adaptado de Lourenço, 1996).....	28
Figura 11. Técnicas de homogeneização de meios em camadas.....	29
Figura 12. Homogeneização dos blocos com juntas verticais para cada fiada.....	31
Figura 13. Elemento de interface INTER202 (Manual do ANSYS, 2016).....	33
Figura 14. Critério de falha de juntas de argamassa traçado a partir de resultados de ensaio (Adaptado de Page, 1978).....	35
Figura 15. Critério de escoamento hiperbólico (Adaptado de Lotfi and Shing, 1994).	37
Figura 16. Superfície de Mohr-Coulomb com superfície de fechamento de compressão (Adaptado de Lourenço, 1994).....	38
Figura 17. Mohr-Coulomb com superfície de fechamento e encruamento em todas as regiões (Adaptado de Lourenço, 1996).....	39
Figura 18. Critério de escoamento com dano (Adaptado de Gambarotta and Lagomarsino, 1997).....	40
Figura 19. Variação da resistência com o fator de dano (Gambarotta and Lagomarsino, 1997).....	41

Figura 20. Critério de escoamento com descarregamento em compressão (Adaptado de Oliveira <i>et al.</i> , 2004)	41
Figura 21. Superfície de Mohr-Coulomb com superfície de fechamento de compressão (Lourenço, 1994).	46
Figura 22. Evolução do parâmetro de encruamento/amolecimento (Manual do Diana, 2015)	48
Figura 23. Regiões do algoritmo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com <i>cut-off</i> na tração e superfície de fechamento na compressão	51
Figura 24. Modelo de dano bilinear.	61
Figura 25. Regiões do algoritmo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com <i>cut-off</i> na tração e superfície de fechamento na compressão	63
Figura 26. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 1 do exemplo 1	67
Figura 27. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 2 do exemplo 1	68
Figura 28. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 3 do exemplo 1	68
Figura 29. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 4 do exemplo 1	69
Figura 30. Validação da convergência quadrática em $\Delta\kappa$	71
Figura 31. Modelo do exemplo 2	72
Figura 32. Retorno para caso de plastificação com o modelo de dano.	76
Figura 33. Exemplo do modelo de Mohr Coulomb com endurecimento	77
Figura 34. Deformada do exemplo 2	78
Figura 35. Modelos elaborados para o painel de alvenaria	79
Figura 36. Casos de carga considerados (Lourenço, 1996)	80
Figura 37. Modelo elaborado com alinhamento das juntas verticais	82
Figura 38. Estudo de malha para o modelo A	83
Figura 39. Tensões ao longo dos painéis (horizontal)	86
Figura 40. Tensões ao longo dos painéis (vertical)	86
Figura 41. Comparação entre as deformadas	88
Figura 42. Gráfico força aplicada x deslocamento do painel	89
Figura 43. Versões dos compiladores (ANSYS, 2019)	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Propriedades do modelo constitutivo da junta de argamassa do exemplo 1	66
Tabela 2. Incremento de tensões e estado de tensões inicial e final para cada região	67
Tabela 3. Convergência dos valores de tensão pelo método de Newton Raphson na região 4 do exemplo 1	70
Tabela 4. Características dos blocos modelados	72
Tabela 5. Características das interfaces modeladas com modelo de dano	73
Tabela 6. Características das interfaces modeladas com modelo de encruamento ..	73
Tabela 7. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0$) ..	74
Tabela 8. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0,5$)	74
Tabela 9. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0,95$)	75
Tabela 10. Características das interfaces modeladas com modelo de dano (plastificação)	75
Tabela 11. Interfaces modeladas com modelo de superfície de fechamento	77
Tabela 12. Propriedades de deformabilidade	80
Tabela 13. Propriedades homogeneizadas	81
Tabela 14. Propriedades de resistência	81
Tabela 15. Resultados do estudo de malha para o modelo A	83
Tabela 16. Resultados do estudo de malha para o modelo B	84
Tabela 17. Resultados dos diferentes modelos para carga compressiva	85
Tabela 18. Resultados dos diferentes modelos para carga lateral	87

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
Objetivos	12
Metodologia	12
Justificativa	13
Organização do trabalho.....	13
1. ALVENARIA ESTRUTURAL	15
1.1 Comportamento mecânico	15
1.2 Blocos	16
1.3 Argamassa	19
1.4 Juntas.....	20
1.5 Alvenaria	23
2. MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ALVENARIA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	27
2.1 Abordagens para modelagem de alvenaria.....	28
2.1.1 Abordagem de macromodelagem.....	28
2.1.2 Abordagem de micromodelagem.....	31
2.2 Modelos constitutivos de juntas de argamassa.....	35
2.4 Modelagem de alvenaria no Brasil	42
3. IMPLEMENTAÇÃO DE MODELO CONSTITUTIVO PARA JUNTAS DE ARGAMASSA NO ANSYS	45
3.1 Mohr-Coulomb com superfície de <i>cut-off</i> e superfície de fechamento na compressão com encruamento.....	46
3.1.1 Descrição do modelo	46
3.1.2 Problema elastoplástico discreto no tempo	49
3.1.3 Algoritmo de integração de tensões	50
3.2 Mohr-Coulomb com superfície de <i>cut-off</i> e dano	61
3.3 Implementação no programa ANSYS®.....	64
4. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO	66
4.1 Exemplo 1: Validação do algoritmo de integração de tensões.....	66
4.2 Exemplo 2: Bloco deslizante	71
4.3 Exemplo 3: Painel de alvenaria.....	78

4.3.1	Teste de malha	82
4.3.2	Comparação entre os modelos	85
4.3.3	Comparação com modelo sem Mohr-Coulomb.....	88
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	90
	REFERÊNCIAS.....	92
	APÊNDICE A – COMO IMPLEMENTAR UMA SUBROTINA NO ANSYS	97
	APÊNDICE B – SUBROTINA USERCZM COM DANO	100
	APÊNDICE C – SUBROTINA USERCZM COM CAP	104

INTRODUÇÃO

Uma das áreas da engenharia civil que tem apresentado maior potencial de crescimento nos últimos anos é a execução de edifícios em alvenaria estrutural. A alvenaria como material de construção tem sido utilizada extensivamente ao longo da história da humanidade, devido a sua facilidade de fabricação e abundância de materiais que podem ser empregados, mas apenas por volta da década de 1920 que se passou a estudá-la com base em princípios científicos e experimentação laboratorial (Dickey e Schneider, 1994). É comum a utilização de procedimentos puramente experimentais para o desenvolvimento dos projetos, apesar de que a experimentação sem uma modelagem teórica prévia pode resultar numa estrutura bastante cara.

A previsão do comportamento da estrutura, incluindo padrões de fissuração até sua falha completa, e identificação dos mecanismos de falha através de métodos matemáticos ou computacionais é uma grande ferramenta para se aliar aos resultados experimentais, o que torna o desenvolvimento de tecnologias de análise voltadas para essas estruturas de alvenaria bastante relevante. A modelagem numérica, desde que bem feita, reduz o número de corpos-de-prova necessários a serem ensaiados e o número de pontos a serem instrumentados, gerando uma redução de custos e prazos e maior eficiência na obtenção de resultados (Peleteiro, 2002).

A modelagem de um painel de alvenaria difere sensivelmente do processo de modelagem de estruturas em concreto ou em aço devido às características do material. A alvenaria é um material heterogêneo, anisotrópico, semi-frágil e com comportamento não linear devido às suas juntas. Os resultados obtidos dependem da escala em que o problema foi analisado (Lourenço, 1995, 2013): em microescala, é obtido o desempenho local do painel e detalhes sobre o funcionamento das juntas, enquanto em macroescala é obtido o desempenho global da estrutura de uma maneira mais generalizada.

O avanço dos programas computacionais de modelagem permite que a análise de tensões possa ser utilizada para se entender o comportamento de estruturas em alvenaria para diversas configurações de geometria, propriedades de deformabilidade e resistência dos materiais constituintes e natureza do carregamento. No entanto, as

opções disponíveis em programas de elementos finitos conhecidos como o ANSYS ou o ABAQUS são limitadas e muitas vezes não são programadas especificamente para a alvenaria, sem a possibilidade de introduzir parâmetros de resistência dos componentes como dado de entrada.

É nesse contexto que este trabalho procura apresentar um modelo constitutivo para representação das juntas de argamassa para ser implementado no programa de elementos finitos ANSYS (2017) para sua melhor adequação à análise de estruturas de alvenaria em microescala.

Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é analisar o comportamento das juntas de argamassa que compõe a alvenaria, investigando os modelos constitutivos e escalas de modelagem, ambos aplicados ao Método dos Elementos Finitos. Em particular, serão investigados modelos constitutivos para simulação do comportamento elasto-plástico não linear das juntas de argamassa com implementação computacional no programa ANSYS (2016).

Especificamente, neste trabalho pretende-se analisar o modelo constitutivo implementado, comparando os resultados obtidos com os da literatura e com os que seriam obtidos se tivesse sido utilizado o modelo de interface existente do programa escolhido.

Metodologia

Será realizada pesquisa bibliográfica quanto ao comportamento mecânico e parâmetros de deformabilidade dos componentes da alvenaria, procurando incluir trabalhos na área voltados para a realidade brasileira.

Posteriormente, serão estudados modelos constitutivos e as vantagens e limitações das diferentes abordagens utilizadas para representação das juntas de argamassa, dando um maior destaque para o modelo de Mohr-Coulomb com

superfície de fechamento para a tensão de compressão e *cut off* para a tensão de tração.

O funcionamento do programa de análise por elementos finitos, ANSYS (2017), seu elemento de interface e sua linguagem FORTRAN também serão estudados, a fim de implementar o modelo de Mohr-Coulomb estudado para uso.

Justificativa

No Brasil, após a sua implantação em 1966, quando em São Paulo foram construídos alguns prédios de quatro pavimentos, o uso da alvenaria estrutural começou a se desenvolver de maneira lenta e reservada (Sabbatini, 1984). Desde então, este sistema construtivo tem se consagrado no país, principalmente, como solução para construção de habitações de interesse popular, uma vez que o déficit habitacional ainda é grande no país (Miranda, 2012).

Por muitos anos a alvenaria estrutural foi pouco utilizada devido a muitos fatores tais como: preconceito, maior domínio da tecnologia do concreto armado por parte de construtores e projetistas e pouca divulgação do assunto nas universidades durante o processo de formação do profissional (Peleteiro, 2002). Um sistema em alvenaria, no entanto, tende ser mais econômico em relação ao concreto armado, por propiciar uma maior racionalização na execução da obra, reduzindo-se o consumo e o desperdício dos materiais.

Para um maior crescimento nesta área, portanto, faz-se necessário um aumento no número de pesquisas nacionais na área, principalmente quanto a resposta não linear do compósito. A maior parte da bibliografia é estrangeira e baseada em recomendações normativas desses países estrangeiros, o que em muitas vezes não é condizente com a realidade brasileira. Isso se reflete na própria normalização nacional, que ainda se mostra pobre e insuficiente para execução de projetos em alvenaria de maneira mais eficiente, rápida e segura.

Organização do trabalho

No capítulo 1 será feita uma revisão bibliográfica sobre o comportamento mecânico e particularidades de cada um dos componentes do material compósito.

No capítulo 2 será feita uma introdução à modelagem computacional de estruturas de alvenaria e ao Método dos Elementos Finitos, apresentando as diferentes escalas de abordagem, modelos constitutivos e aplicações encontradas na literatura, tanto estrangeira quanto nacional.

No capítulo 3 um destaque maior será dado para o modelo de Mohr-Coulomb e as equações necessárias para sua implementação computacional. Para isso, será também apresentado o elemento finito de interface e testes iniciais no programa de análises ANSYS (2016) desta formulação. Será introduzido um fator para contabilizar o efeito de dano, em um primeiro momento utilizando-se de um gráfico bilinear e posteriormente através de parâmetros de encruamento.

No capítulo 4, serão expostos exemplos de aplicação dessa implementação e seus resultados serão confrontados com experimentos obtidos na literatura e os resultados obtidos utilizando as formulações disponíveis no programa escolhido.

No capítulo 5, serão apresentadas as conclusões e ideias para prosseguimentos dos estudos.

Nos apêndices, poderão ser encontrados resumo de como se implementar uma nova rotina qualquer no programa ANSYS e as rotinas para modelos constitutivos aqui elaboradas.

1. ALVENARIA ESTRUTURAL

A alvenaria é um material compósito, cujos componentes principais são os blocos e a argamassa que preenchem as juntas entre eles. Os blocos são os principais responsáveis pela resistência da estrutura como um todo, enquanto a argamassa é responsável por unir os blocos, transferir esforços e acomodar pequenas deformações (Ramalho e Corrêa, 2003). A cerâmica e o concreto são as duas matérias-primas mais utilizadas na fabricação de blocos e tijolos, sendo ambos materiais frágeis e que apresentam baixa resistência à tração (Holanda Jr., 2002).

Os sistemas em alvenaria estrutural podem ser divididos em armados ou não-armados. Segundo a NBR 15961-1 (ABNT, 2011), os sistemas armados utilizam armaduras passivas para resistir os esforços solicitantes junto com as unidades da alvenaria, formando elementos com funcionamento similar a pilares e vigas. Neste caso, a existência do graute e da armadura devem ser levadas em conta na formação do compósito. Já na alvenaria não armada, não há a armadura passiva e apenas a alvenaria resiste aos esforços em sua totalidade.

1.1 Comportamento mecânico

Devido à diferença de propriedades de seus constituintes, a alvenaria é considerada um material heterogêneo e anisotrópico, principalmente por causa das juntas horizontais e verticais que atuam como planos de falha (Page, 1981). Estas propriedades, juntamente com a influência das características físicas de seus componentes e do arranjo das juntas no comportamento da estrutura, dificultam a modelagem do compósito (Lourenço, 1994). Dependendo da orientação das juntas em relação aos esforços aplicados, a falha pode se dar apenas nas juntas ou no conjunto junta-bloco.

Os critérios de falha, entretanto, não podem ser definidos apenas em termos das tensões principais, uma vez que a alvenaria exibe propriedades distintas dependendo da direção dessas juntas. Dependendo da orientação dos esforços

aplicados, a falha pode ocorrer apenas nas juntas ou no conjunto argamassa-bloco (Page, 1981).

1.2 Blocos

Os blocos são os principais responsáveis pela resistência, durabilidade a agentes agressivos, estabilidade e precisão dimensional da alvenaria (Mata, 2011). Seu comportamento pode ser considerado elástico e frágil, podendo apresentar grande variabilidade em suas propriedades. Existe uma grande disponibilidade de blocos de diferentes resistências, materiais e formas no mercado, podendo citar os blocos cerâmicos, de concreto, de pedra ou vidro, além de tijolos maciços, tijolos perfurados e blocos vazados. Independentemente de seu tipo suas propriedades mecânicas variam também com a direção analisada e se eles estão atuando sob tração ou compressão (Barraza, 2012).

As propriedades dos blocos podem ser obtidas de maneira independente através de ensaios experimentais. A norma NBR15270, partes 1 a 3 (ABNT, 2005), trata da caracterização e descrição dos procedimentos de ensaio para blocos cerâmicos estruturais e de vedação, enquanto a NBR16522 (ABNT, 2016) trata dos ensaios de blocos de concreto para alvenaria.

Geralmente, a caracterização dos blocos é feita por um ensaio à compressão simples (Figura 1); porém para uma caracterização mais completa e detalhada é necessário que os ensaios sejam realizados nas três direções ortogonais do bloco (Barraza, 2012). A partir desses resultados, a curva tensão-deformação associada à direção ensaiada é traçada e a resistência à compressão obtida. A norma brasileira não especifica a determinação da resistência à tração do bloco; no entanto, sendo necessária, podem ser feitos ensaios como o de tração uniaxial ou o de tração na flexão.



Figura 1. Ensaio à compressão simples num bloco cerâmico (Bergami, 2007)

A curva tensão x deformação (σ x δ) para compressão dos blocos, ilustrada na Figura 2 (a), se inicia com um trecho linear elástico que se mantém até a tensão atingir seu valor máximo f_c e a formação das primeiras microfissuras. Neste momento, o processo de amolecimento se inicia e o material começa a perder rigidez mesmo com o aumento da carga. Durante esta etapa as microfissuras se tornam maiores e mais numerosas, até que estas se conectam formando microfissuras. A partir do ponto de formação destas, o material entra no trecho de amolecimento, onde o material começa a perder resistência até alcançar seu valor mínimo. Tal valor pode ser obtido observando a formação de um patamar no fim da curva tensão x deformação, onde a deformação δ aumenta sem ocorrer mudança nas tensões (van Noort, 2012).

Na curva de tração, ilustrada na Figura 2 (b), o trecho de amolecimento se inicia após o pico de tensão f_t e a aparição das primeiras microfissuras, seguido de redução de resistência com taxa menor que a observada nos resultados à compressão (van Noort, 2012).

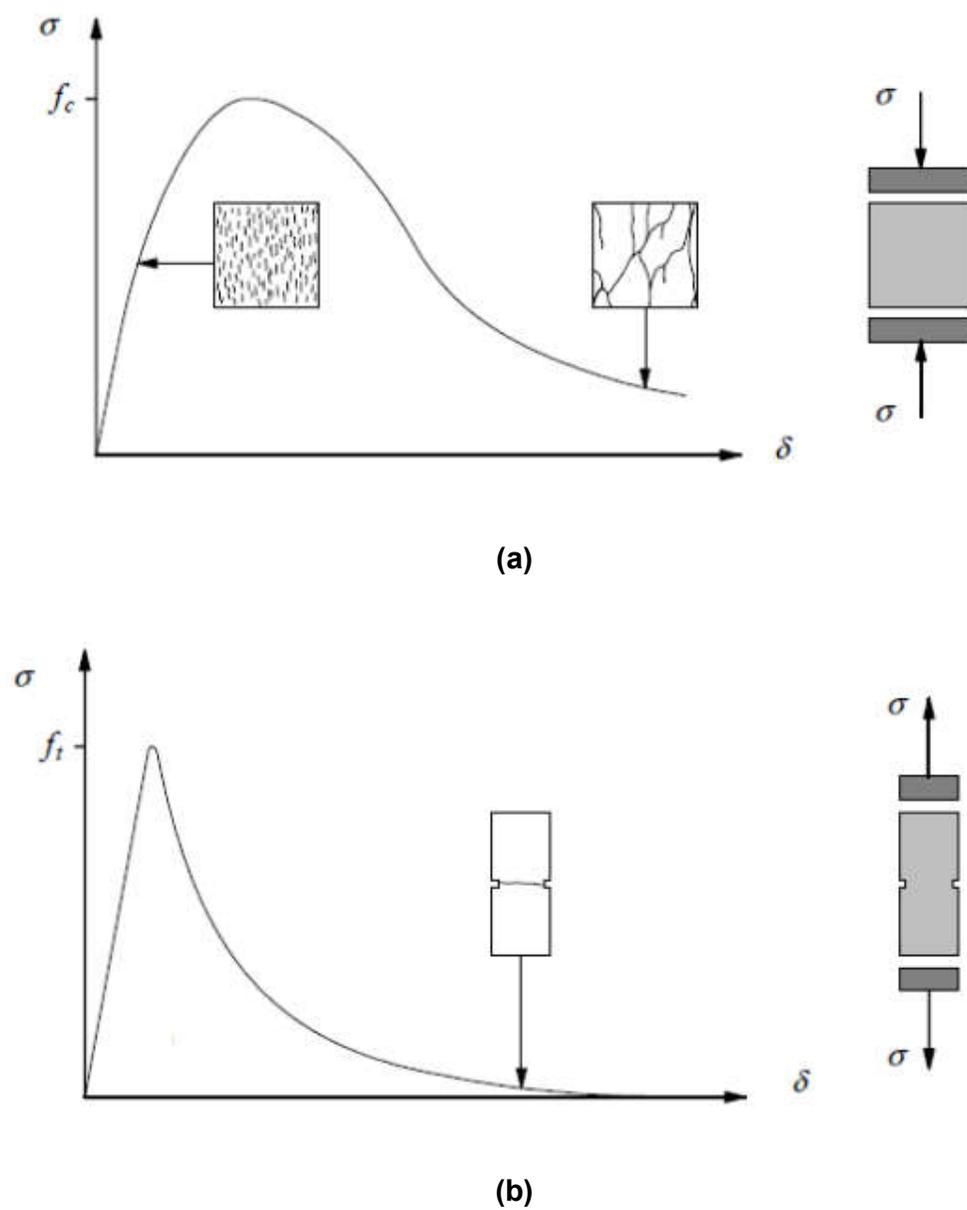


Figura 2. Curva tensão x deformação de blocos (Lourenço, 1996)

Legenda: (a) bloco submetido à compressão; (b) bloco submetido à tração.

1.3 Argamassa

As argamassas são compostas de uma mistura de cimento, agregado miúdo e aditivos, similarmente aos concretos, mas a diferença em suas proporções gera diferenças em suas propriedades mecânicas. As principais funções da argamassa são: unir as unidades da alvenaria, transmitir e uniformizar as tensões atuantes ao longo das seções dos blocos, acomodar as pequenas deformações provenientes de carregamentos externos e promover ajustes das tolerâncias geométricas dos blocos (Santos, 2014).

Assim como os blocos, existe uma grande diversidade de produtos disponíveis no mercado brasileiro para várias situações, notando também que a argamassa pode ainda ser confeccionada na própria obra. A norma NBR13276 (ABNT, 2005) descreve os procedimentos para preparação de argamassa e obtenção de seu índice de consistência, enquanto a norma NBR13279 (ABNT, 2005) discorre sobre os ensaios para determinação das resistências à compressão e à tração. Segundo Solórzano (1994), no entanto, a resistência da alvenaria deve ser utilizada mais para o controle da produção da argamassa do que para controle da resistência do painel como um todo, uma vez que os dados são obtidos a partir de ensaios uniaxiais que não representam o estado triaxial causado pelo confinamento da argamassa quando dentro da parede.

A argamassa, geralmente, é muito mais flexível e começa a se deformar de maneira inelástica mais rapidamente quando comparada aos blocos (Page, 1978). Seu principal papel é acomodar as deformações da estrutura e ajudar na distribuição dos esforços (Juste, 2001). Para isso, atenção especial deve ser dada a parâmetros como módulo de elasticidade e ductilidade. Além disso, de acordo com Sabbatini (1984) e Mohamad (1998), a espessura da junta de argamassa deve ser o suficiente para acomodar a fissuração, se atentando que o aumento no tamanho das juntas provoca maior diferencial de deformação entre bloco e argamassa, diminuindo a resistência da alvenaria.

1.4 Juntas

A interface entre bloco e argamassa, de certa forma, não constitui um material da alvenaria, e sim uma região formada pela união desses componentes, logo suas propriedades são influenciadas tanto por características do bloco quanto da argamassa (Santos, 2014). Além das juntas de argamassa constituírem caminhos principais de propagação de fissura, o comportamento das mesmas é um fator importante no modo de falha da alvenaria como um todo. Numa escala de detalhamento em nível microscópico, é fundamental a caracterização destas. Para este fim, van der Pluijm (1999) realizou ensaios de deformação em corpos de prova com dois blocos e uma junta horizontal para avaliar as propriedades da junta e suas interações com os blocos, caracterizando então dois modos de falha para as juntas de argamassa.

A Figura 3 apresenta a curva tensão x deslocamento ($\sigma \times u$) do modo I, associado à abertura da junta. Nesta situação, o material é considerado linear-elástico até atingir a resistência à tração (f_t). Após esse pico, a curva demonstra um decréscimo da carga com o aumento do deslocamento (u), que está ligado com a coalescência das microfissuras até elas se tornarem macrofissuras. Esse comportamento pode ser aproximado por um decaimento exponencial (Massart, 2003). A área abaixo do gráfico a seguir é relacionada com a energia de fratura do modo (G_f^I). A configuração de falha da alvenaria nesse modo de falha é de descolamento das fiadas.

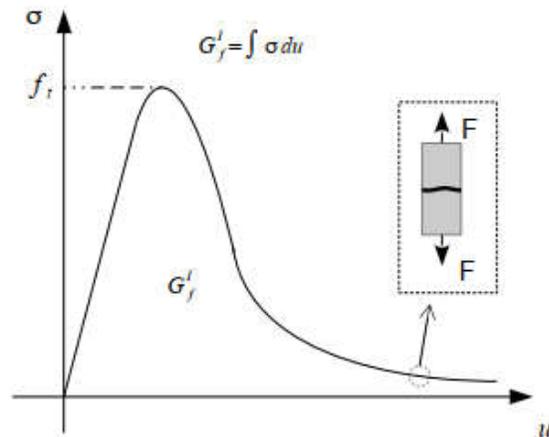


Figura 3. Curva tensão x deslocamento das juntas no modo I (Tayer, 2018).

A Figura 4 apresenta a curva tensão x deslocamento ($\tau \times \Delta u_z$) do modo II, associado ao deslizamento das juntas. A curva representa o comportamento ao cisalhamento das mesmas, observado mais expressivamente quando a carga de compressão é aplicada paralelamente às juntas. Este modo também pode ser observado quando há uma pré-compressão dos blocos (van der Pluijn, 1999). Similarmente ao que ocorre no modo I, há uma gradual diminuição da tensão com o aumento do deslocamento a partir de um pico de tensão. Neste modo, no entanto, a resistência ao cisalhamento apresenta um patamar residual e deslocamentos irreversíveis para níveis constantes de tensão. Além disso, a resistência máxima ao cisalhamento, o pico da curva, aumenta proporcionalmente com a tensão de confinamento da argamassa (Massart, 2003). Os parâmetros ângulo de atrito $\mu = \tan \phi$ e coesão c , usados para caracterizar materiais friccionais, podem ser obtidos diretamente da curva (Lourenço, 1996). A configuração da estrutura após esse modo de falha é de deslizamento de uma fiada sobre a outra. Na maioria dos casos o modo II é acompanhado pelo modo I (Tayer, 2018).

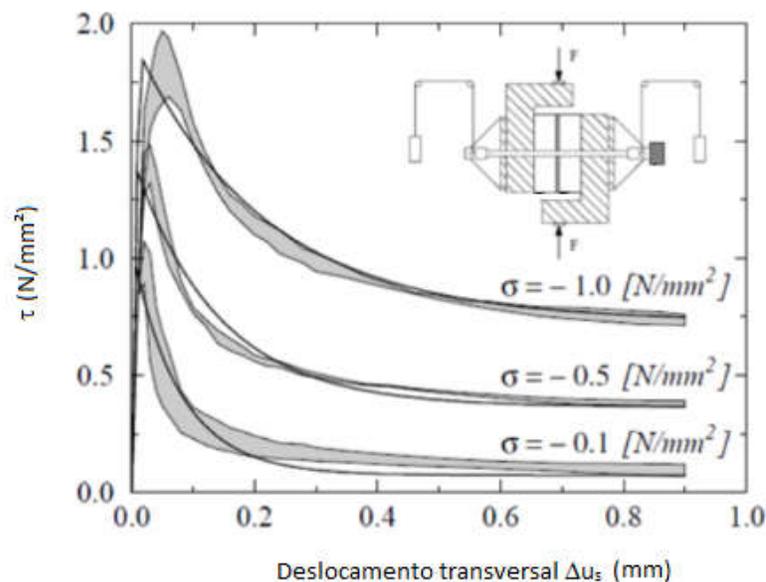


Figura 4. Curvas tensão cisalhante x deslocamento das juntas no modo II para diferentes tensões de confinamento da argamassa (Adaptado de van Noort, 2012).

Outro fenômeno que caracteriza o comportamento da interface em cisalhamento é a dilatância. Este fenômeno pode ser atribuído à argamassa e está associado a uma tendência de aumento do volume quando a mesma se deforma sob solicitações tangenciais (Nascimento Neto, 2003). O parâmetro usado para considerar tal fenômeno é chamado de ângulo de dilatância (ψ). O valor deste parâmetro depende das tensões de confinamento. Segundo Mata (2011), para baixas tensões de confinamento o valor de $\tan \psi$ varia entre 0,2 e 0,7, a depender da rugosidade da superfície do bloco, enquanto para altas tensões de confinamento o valor cai para zero.

A consideração do efeito da dilatância requer bastante sensibilidade quanto ao seu valor de ψ , pois a adoção de um valor inadequado não só pode superestimar a resistência do painel, como inclusive alterar o mecanismo de ruptura deste (Lourenço, 1996). Caso não seja possível considerar adequadamente tal efeito, ou não haja dados experimentais suficientes para a situação estudada, recomenda-se utilizar ângulos de dilatância igual a zero como uma aproximação segura, de modo a desconsiderar o ganho de resistência e de rigidez (Nascimento Neto, 2003).

Existe ainda um modo III, denominado modo de rasgamento, onde o deslizamento da fiada e o cisalhamento ocorrem para fora do plano, de grande importância para análise de modelos tridimensionais (Uva e Salerno, 2006).

1.5 Alvenaria

O material compósito alvenaria possui propriedades de falha distintas dependendo da direção analisada por conta da presença das juntas que agem como planos de fraqueza. A orientação das juntas em relação às tensões principais é uma variável adicional para a determinação dos planos de falha (Page, 1981). Não só essas juntas são as regiões mais comuns para o aparecimento de fissuras, como também são superfícies bastante suscetíveis à separação, uma vez que a resistência à tração nesses locais é muito pequena.

Para a determinação da resistência à compressão da alvenaria, utiliza-se o ensaio de resistência à compressão uniaxial em prismas. Em geral, este ensaio fornece o diagrama tensão x deformação, a partir do qual são obtidas a resistência à compressão de pico, a energia de fratura na compressão e a deformação plástica (Santos, 2014). A diferença entre as propriedades é esquematizada no gráfico tensão x deformação ($\sigma \times \varepsilon$) apresentado na Figura 5.

Segundo ensaios realizados por de Bellis (2010), o bloco apresenta resposta aproximadamente linear seguida de uma ruptura frágil, enquanto as juntas de argamassa apresentam um comportamento altamente não linear e dúctil. Dessa maneira, podemos perceber que a resistência do compósito alvenaria tem um valor intermediário em relação à resistência individual do bloco e da argamassa, não existindo necessariamente uma proporcionalidade entre as propriedades do compósito e de suas partes. Segundo Hendry (1981), a resistência do material compósito é aproximadamente proporcional à raiz quadrada da resistência do bloco, enquanto Mendes (1998) demonstra que a parcela de resistência da argamassa é menos significativa para blocos de baixa resistência.

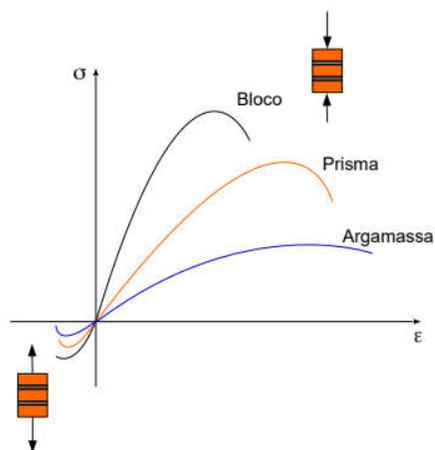


Figura 5. Comportamento mecânico dos componentes da alvenaria (Tayer, 2018)

Quanto ao comportamento biaxial, Page (1981) realizou diversos ensaios de compressão biaxial para diferentes ângulos de aplicação de carga, obtendo assim as diferentes superfícies de ruptura de pequenos painéis de alvenaria apresentadas na Figura 6. Os valores foram plotados no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, sendo estas as tensões aplicadas.

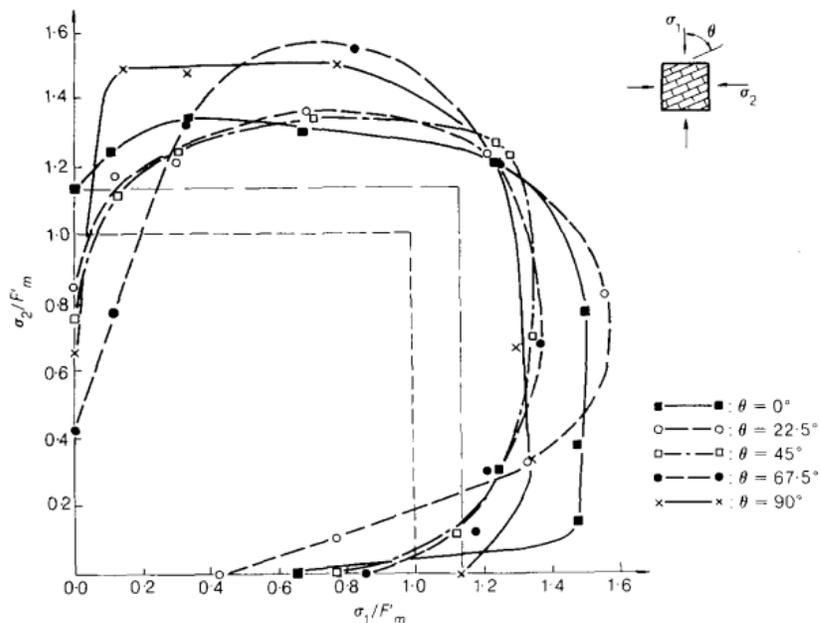


Figura 6. Superfícies de falha para compressão biaxial da alvenaria (Page, 1981)

Quanto à fissuração em painéis, as fissuras podem se apresentar nas direções horizontal, vertical, diagonal ou uma combinação destas, atravessando unidades e juntas, ou com aspecto escalonado, passando apenas pelas juntas. A forma da fissura é influenciada por vários fatores, incluindo a rigidez relativa das juntas com relação às unidades, a presença de aberturas ou outros pontos de fragilidade, as restrições da parede e a causa da fissura (Holanda Jr., 2002). Os possíveis planos de falha para diferentes orientações de carregamento foram esquematizados por Page (1981) e estão expostos na Figura 7.

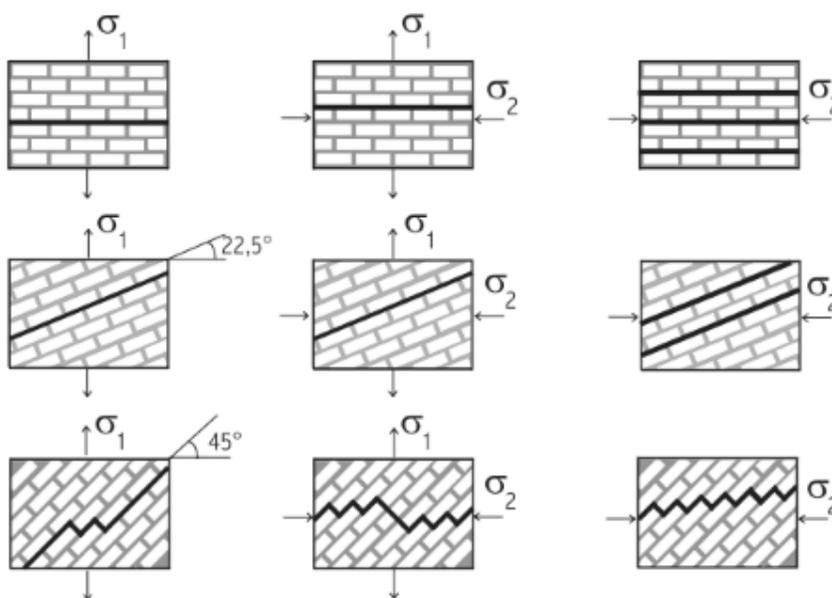


Figura 7. Planos de falha para diferentes direções do carregamento (Massart, 2003)

De acordo com Lourenço (1994), os cinco possíveis mecanismos de ruptura característicos da alvenaria são fissuração da junta por tração direta (Figura 8 (a)), escorregamento ao longo das juntas horizontal ou vertical sob tensão normal (Figura 8 (b)), fissuração nos blocos por tração (Figura 8 (c)), fissuração diagonal nos blocos quando há valores de tensão normal suficientes para desenvolver atrito nas juntas (Figura 8 (d)) e esmagamento da alvenaria devido à dilatação da argamassa submetida a elevados valores de tensão normal (Figura 8 (e)).

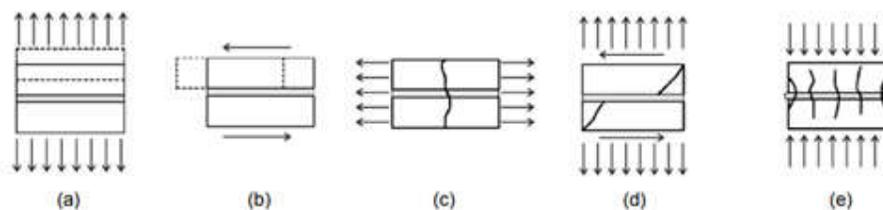


Figura 8. Mecanismos de ruptura (Lourenço, 1994)

Legenda: (a) tração na junta; (b) cisalhamento na junta; (c) tração no bloco; (d) fissuração diagonal do bloco; (e) esmagamento da alvenaria.

Seguindo a legenda da figura anterior, (a) e (b) são mecanismos de ruptura das juntas, (c) é um mecanismo do bloco, e (d) e (e) são mecanismos combinados de ambos os materiais, ou seja, mecanismos da alvenaria.

A norma brasileira que descreve ensaios para determinação da resistência da alvenaria é a NBR14321 (ABNT, 2016). Essa norma, no entanto, trata apenas da resistência ao cisalhamento, visto que há uma grande contribuição da resistência ao cisalhamento da alvenaria nas resistências à tração e à compressão (Atkinson *et al.*, 1989). O ensaio descrito na norma é o de compressão diagonal, ilustrado na Figura 9, em que se pode também obter o módulo de deformação transversal G do painel.



Figura 9. Ensaio de compressão diagonal em mini-painéis (Galleguillos e Valenzuela, 2009)

2. MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ALVENARIA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) é um dos mais difundidos métodos de simulação matemática do comportamento de estruturas. A grande utilização deste método é justificada por sua flexibilidade em representar qualquer geometria, carregamentos ou condições de contorno, além de sua facilidade de implementação computacional em comparação com outros métodos como o método dos elementos de contorno ou o método das diferenças finitas (Mata, 2011).

Com o MEF, utiliza-se de um conjunto de equações capazes de descrever o equilíbrio de forças, a compatibilidade de deslocamentos e a relação entre tensão e deformação do material, sendo possível obter a resposta aproximada da estrutura discreta para determinado carregamento com rapidez e acurácia uma vez o modelo numérico validado. Obter o modelo constitutivo mais adequado para cada material, que contemple seus possíveis modos de falha, no entanto, não é uma tarefa simples. No caso da alvenaria, devido à existência de diversos mecanismos de ruptura, além de sua anisotropia, o nível de detalhamento e complexidade do modelo a ser empregado deve ser elevado para uma representação mais fiel da realidade e uma compatibilidade com resultados de ensaios existentes. Por se tratar de um método numérico, deve-se observar ainda se o modelo constitutivo introduzido é possível de ser resolvido com o método de integração aplicado e tratar possíveis problemas de convergência.

Diversos são os estudos e propostas de modelos que satisfaçam o maior número de mecanismos possível para a alvenaria, citando, por exemplo, Lourenço (1994), Gambarotta e Lagomarsino (1997), Giambanco *et al.* (2001) e Massart (2003).

As modelagens numéricas de alvenaria possuem ainda limitações devido à falta de dados experimentais relativos às propriedades não lineares dos materiais que a compõe, principalmente a respeito do comportamento pós-pico (Lourenço, 1996).

2.1 Abordagens para modelagem de alvenaria

A depender do nível de detalhamento necessário para a análise, a modelagem de estruturas de alvenaria pode ser feita em três níveis: macromodelagem, micromodelagem detalhada e micromodelagem simplificada (Lourenço, 1996), como esquematizado Figura 10.

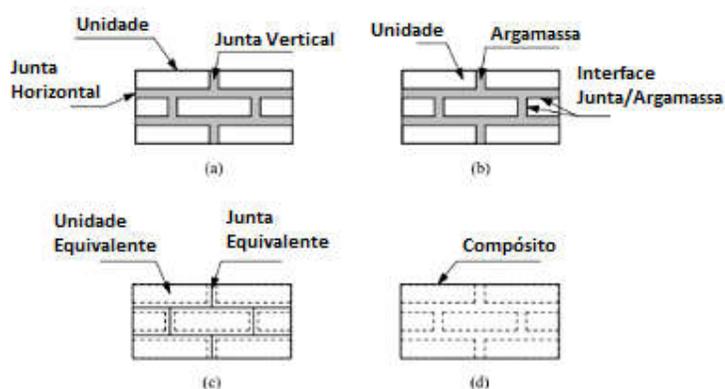


Figura 10. Tipos de modelagem (Adaptado de Lourenço, 1996)

Legenda: (a) modelo real, (b) micromodelagem detalhada, (c) micromodelagem simplificada, (d) macromodelagem.

2.1.1 Abordagem de macromodelagem

Na macromodelagem (Figura 10 (d)), bloco, argamassa e juntas são tratados como um meio único homogêneo e contínuo. A alvenaria é discretizada com elementos finitos contínuos, sendo possível obter os parâmetros de deformabilidade do material compósito por ensaios experimentais ou técnicas de homogeneização. Para esta abordagem, é comum a utilização de modelos constitutivos contínuos, com a mesma relação tensão x deformação para qualquer ponto do domínio homogeneizado. Além disso, a ruptura e formação de fissuras na alvenaria pode ser representada no elemento finito pela degradação de seu modelo constitutivo, se

atentando para o refinamento da malha nestes casos, pois tal degradação é calculada a partir do volume elementar representativo (Tayer, 2018).

Com relação às técnicas de homogeneização empregadas, destaca-se o trabalho pioneiro de Pande *et al.* (1989). A partir da técnica de homogeneização proposta por Salamon (1968), pode-se obter as propriedades de meio em camadas isotrópicas, resultando num compósito transversalmente isotrópico (Figura 11 (a)). Pande *et al.* (1989) aplicou essa técnica de homogeneização de maneira sucessiva para as camadas horizontais e verticais, considerando as hipóteses simplificadoras de alinhamento e continuidade das juntas verticais (Figura 11 (b)), continuidade das componentes de tensão atuando ao longo da direção vertical e aderência perfeita entre tijolos e argamassa. Como resultado, é possível obter os parâmetros de deformabilidade do material compósito anisotrópico resultante a partir do módulo de elasticidade, do coeficiente de Poisson e das dimensões geométricas dos blocos e da argamassa.

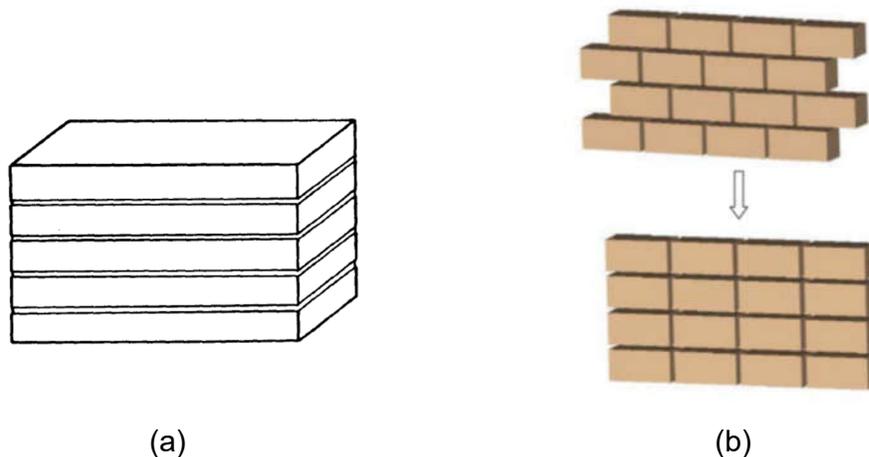


Figura 11. Técnicas de homogeneização de meios em camadas

Legenda: (a) meio transversalmente isotrópico formado por camadas horizontais (Pande *et al.* 1989); (b) meio anisotrópico formado por camadas horizontais e verticais, com juntas de argamassa alinhadas (Barreto, 2002).

Neste trabalho, emprega-se a técnica de homogeneização proposta por Salamon (1968) na homogeneização entre blocos e argamassa vertical para cada fiada (Figura 12). Para um meio homogeneizado transversalmente isotrópico, tem-se as seguintes expressões:

$$\nu_{yz} = \nu_{zy} = \frac{\sum \frac{p_i \nu_i E_i}{1 - \nu_i^2}}{\sum \frac{p_i E_i}{1 - \nu_i^2}} \quad (1)$$

$$\nu_{yx} = \nu_{zx} = (1 - \nu_{yz}) \sum \frac{p_i \nu_i}{1 - \nu_i} \quad (2)$$

$$E_y = E_z = (1 - \nu_{yz}^2) \sum \frac{p_i E_i}{1 - \nu_i^2} \quad (3)$$

$$E_x = \frac{1}{\sum \frac{p_i}{E_i} \left(1 - \frac{2\nu_i^2}{1 - \nu_i}\right) + \frac{2\nu_{yx}^2}{(1 - \nu_{yz})E_y}} \quad (4)$$

$$G_{yz} = \frac{E_{yz}}{2(1 + \nu_{yz})} = \sum p_i G_i \quad (5)$$

$$G_{yx} = G_{zx} = \frac{1}{\sum \frac{p_i}{G_i}} \quad (6)$$

em que E_i é o módulo de Young, G_i é o módulo de elasticidade transversal, ν_i é o coeficiente de Poisson de cada material. Os somatórios são realizados com relação ao índice i e são expandidos apenas em dois termos, referentes ao bloco e à argamassa. A geometria do bloco e da junta vertical é considerada pelo parâmetro p_i expresso por

$$p_i = \frac{b_i}{\sum b_i} \quad (7)$$

onde b_i refere-se à largura do bloco e à espessura da junta vertical de argamassa, a depender do valor assumido pelo índice i (ver Figura 12).

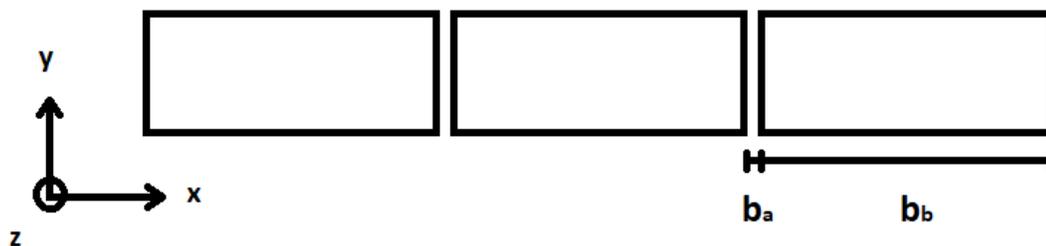


Figura 12. Homogeneização dos blocos com juntas verticais para cada fiada

A abordagem de macromodelagem tem menor nível de detalhamento, por conta da simplificação do problema e do reduzido número de variáveis consideradas, mas possui aplicações práticas para estruturas de grandes dimensões para as quais se tem interesse em analisar o comportamento global. Os modelos em macroescala são os mais simples de se implementar computacionalmente e geralmente demandam um menor tempo de processamento. No entanto, os modelos mais simples não são capazes de simular a separação e o escorregamento entre fiadas.

2.1.2 Abordagem de micromodelagem

Na micromodelagem, as juntas são representadas como descontinuidades entre os blocos, possibilitando o deslizamento relativo dos mesmos. Como consequência, obtém-se uma melhor resposta sobre os efeitos localizados, promovendo uma aproximação mais realista da propagação das fissuras. Com isso, é possível identificar a origem de patologias (Lourenço, 1996), a carga inicial de fissuração, a carga última e o padrão de ruptura com boa representatividade (Peleteiro, 2002).

Segundo Giambanco *et al.* (2001), esta abordagem comumente utiliza elementos de interface para representar as descontinuidades entre bloco e argamassa. Esses elementos podem ser do tipo ligação (*link elements*), de pequena espessura (*thin elements*) e de espessura nula (*zero thickness elements*), que são diferenciados pela geometria e pelos modelos constitutivos empregados (Tayer, 2018).

A micromodelagem pode ser simplificada ou detalhada. No caso da micromodelagem simplificada (Figura 10 (c)), realizada na mesoescala, as juntas entre os blocos são representadas como um material homogeneizado a partir das propriedades da argamassa e da interface (Lourenço, 1996). Não há um elemento específico representando a argamassa. Considerando que os elementos finitos de interface possuem espessura pequena ou nula, as dimensões dos blocos são expandidas para se manter a geometria original do modelo. Os elementos finitos de interface são aplicados então entre as faces de dois blocos expandidos. Utilizando modelos constitutivos que representem a não-linearidade nessas juntas, é possível descrever o surgimento e propagação de fraturas ao longo destes elementos (Lourenço, 1996). No entanto, essa abordagem não consegue representar o efeito de Poisson na argamassa (Mata, 2011).

Já no caso da micromodelagem detalhada (Figura 10 (b)), a argamassa é modelada separadamente das juntas, representando a geometria e as propriedades de cada material em separado. O elemento finito de interface que representa a junta neste caso é aplicado entre a face do bloco e a argamassa, enquanto um elemento contínuo convencional é utilizado para representar a argamassa. O comportamento referente à deformação e ruptura dos materiais constituintes a serem utilizados nestes modelos podem ser determinados em ensaios individuais, sendo tal caracterização complexa e não abundante na literatura no que diz respeito às juntas. Como o nível de detalhamento desta abordagem é o maior das três, sendo o que melhor se aproxima do modelo físico real, o seu grau de complexidade também é o mais elevado.

Tanto na micromodelagem simplificada quanto na detalhada, as malhas de elementos finitos resultam mais complexas, e por possuírem maior número de elementos necessitam de maior tempo de processamento, tornando-se inviável para estruturas de grande porte.

Verifica-se também que a escolha do modelo constitutivo a ser empregado no elemento de interface é primordial para simular adequadamente o comportamento da alvenaria. Diversos modelos baseados nas teorias de dano e plasticidade foram propostos na literatura e um resumo é apresentado na Seção 2.2. No entanto, são comuns problemas de convergências atrelados a esses modelos (Tayer, 2018).

Uma simplificação possível para modelos discretos é a adoção de comportamento elástico linear para os blocos, se atentando, no entanto, para a perda na simulação da fissuração dos mesmos (Peleteiro, 2002).

Neste trabalho, emprega-se o programa de análise por elementos finitos ANSYS® com a abordagem de micromodelagem simplificada no estado plano de tensões, usando elementos de interface com espessura nula INTER202. A Figura 13 representa a geometria e o sistema local (x,y) deste tipo de elemento, que é linear e possui 2 graus de liberdade por nó.

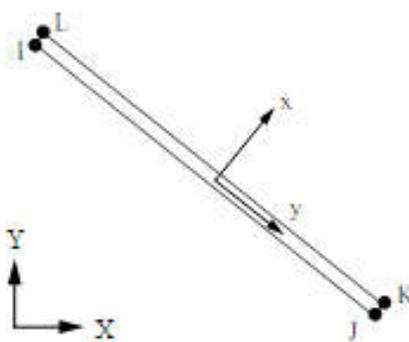


Figura 13. Elemento de interface INTER202 (Manual do ANSYS, 2016)

A deformação do elemento é avaliada segundo os deslocamentos relativos entre o topo (segmento LK) e a base (segmento IJ),

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x^{topo} - u_x^{base} \\ u_y^{topo} - u_y^{base} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

em que u_x e u_y são deslocamentos no sistema local do elemento, ε_N é a deformação na direção normal (x) e ε_S é a deformação na direção tangencial (y).

A relação tensão-deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^E \begin{Bmatrix} \varepsilon_N \\ \varepsilon_S \end{Bmatrix} \quad (9)$$

em que σ é a parcela de tensão normal (na direção x , associada à separação entre topo e base), τ é a parcela de tensão tangencial ou cisalhante (na direção y , associada ao deslizamento entre topo e base), e D^E é a matriz constitutiva elástica desacoplada

$$D^E = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os coeficientes de rigidez K_N e K_S presentes na Eq. (10) contemplam as propriedades da interface bloco-argamassa e espessura de argamassa que não são aqui representadas. Lourenço (1996) aplicou uma técnica de contínuo equivalente e propôs expressões simplificadas para os coeficientes de rigidez de elementos de interface de espessura nula, dadas por:

$$K_N = \frac{E_b E_a}{h_a (E_b - E_a)} \quad (11)$$

$$K_S = \frac{G_b G_a}{h_a (G_b - G_a)} \quad (12)$$

sendo E o módulo de Young, G o módulo de elasticidade transversal e h_j a espessura da junta de argamassa. Os subscritos a e b referem-se à argamassa e ao bloco, respectivamente.

Uma das limitações do uso de elementos sem espessura, único tipo de elemento de interface disponível no ANSYS®, é a restrição quanto à aplicação: os blocos devem ser mais rígidos que a argamassa, caso contrário os coeficientes de rigidez dados pelas Eqs. (11) e (12) resultariam em valores negativos. Nessa situação, o uso de elementos de interface com espessura é mais apropriado.

Cada abordagem possui vantagens e desvantagens e campos de aplicação. A escolha da abordagem mais apropriada dada uma aplicação deve depender dos objetivos propostos e, independente da escolha, os resultados serão satisfatórios desde que haja descrição adequada do comportamento dos materiais.

2.2 Modelos constitutivos de juntas de argamassa

Uma das primeiras propostas de utilização de modelos em microescala foi de Page (1978). Em seu trabalho, Page modela as unidades como elementos contínuos elásticos unidos por elementos de interface representando as juntas, cuja envoltória de ruptura que delimita a região de regime elástico foi traçada a partir de resultados de ensaio. A forma dessa envoltória traçada no plano tensão normal (σ) x cisalhante (τ) é de três retas: uma para situação de tração e duas para compressão (Figura 14). A mudança de inclinação na área de compressão representa a mudança de um modo de falha por cisalhamento nas juntas para um modo de falha conjunto entre a junta e o bloco (Lourenço, 1994).

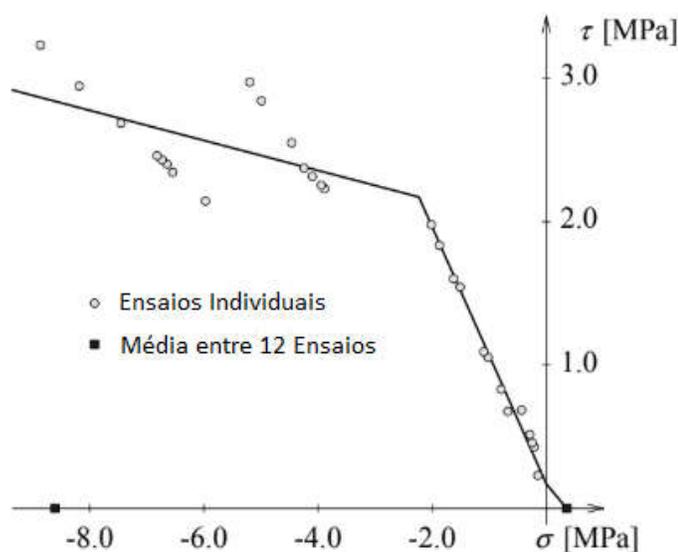


Figura 14. Critério de falha de juntas de argamassa traçado a partir de resultados de ensaio (Adaptado de Page, 1978)

Esse modelo, embora tenha grande valor histórico como um dos pioneiros na área, foi verificado como deficiente para verificação de todos os modos de falha da alvenaria, uma vez que o efeito de encruamento foi considerado de maneira muito simplista, assumindo que a rigidez permanece constante, o efeito de amolecimento não é considerado e, conseqüentemente, o modo de falha por compressão não foi contemplado (Lourenço, 1994).

Lotfi e Shing (1994) propuseram um modelo constitutivo elastoplástico para as juntas de argamassa capaz de simular o início da propagação das fraturas sob tensão normal e cisalhante atuando em conjunto, tanto para tração quanto para compressão. Além disso, o modelo proposto também representa o efeito de dilatação das juntas. O critério de Mohr-Coulomb hiperbólico com três parâmetros e *cutoff* de tensão de tração foi adotado como superfície de escoamento, expressa por

$$f(\sigma, \mathbf{q}) = \tau^2 - \mu^2(\sigma - s)^2 + 2r(\sigma - s) = 0 \quad (13)$$

sendo s a tensão limite à tração, c a coesão da junta e r o raio da curvatura da superfície de escoamento no vértice da hipérbole, dado por

$$r = (c^2 - \mu^2 s^2) / 2s \quad (14)$$

O parâmetro μ refere-se à inclinação das assíntotas da hipérbole, como demonstrado na Figura 15. A variável $\mathbf{q} = \{s \ r \ \mu\}^T$ controla a evolução da superfície de escoamento, que é governada por uma série de regras de amolecimento baseadas no trabalho plástico. Uma regra de fluxo não associado também é incluída neste modelo para evitar excesso de deformação plástica.

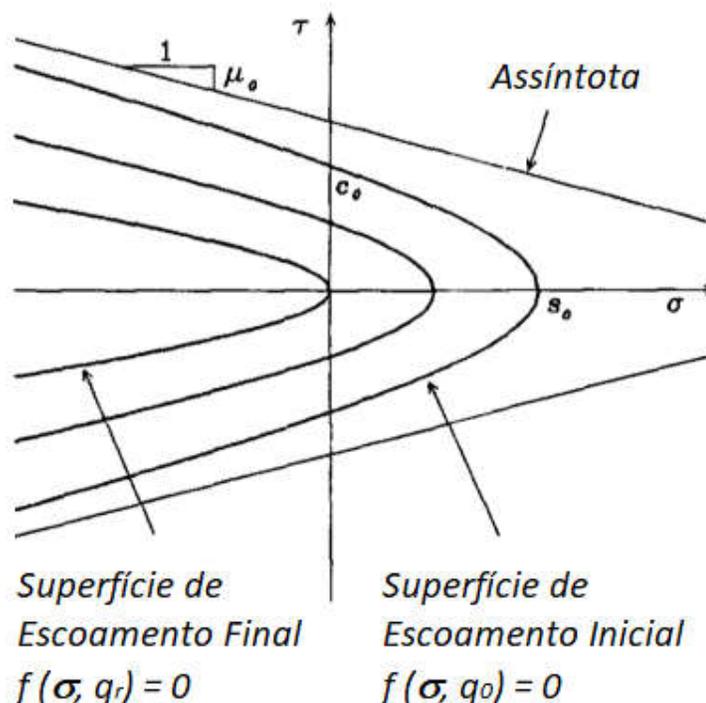


Figura 15. Critério de escoamento hiperbólico (Adaptado de Lotfi and Shing, 1994).

Lourenço (1994) propõe um modelo de Mohr-Coulomb com superfície de fechamento esférico compressivo (*cap model*) e *cut off* para a tensão de tração. Este modelo inclui também uma regra de encruamento misto apenas para a superfície de fechamento. Sendo assim, não só o raio da superfície (r) aumenta de tamanho proporcionalmente com o parâmetro de encruamento (κ), mas também o centro da superfície (σ_M) se desloca ao longo do eixo hidrostático, de maneira que a superfície seja sempre tangente a superfície de Mohr-Coulomb e não venha a cruzá-la por conta do aumento do raio. A Figura 16 mostra a forma deste modelo no plano $\sigma \times \tau$.

Nestes modelos, a superfície de Mohr-Coulomb serve como um envelope para falhas por cisalhamento (modo II), o *cut off* de tensão de tração para limitar a tensão máxima de tração de falha (modo I) enquanto a superfície de fechamento limita a tensão de compressão.

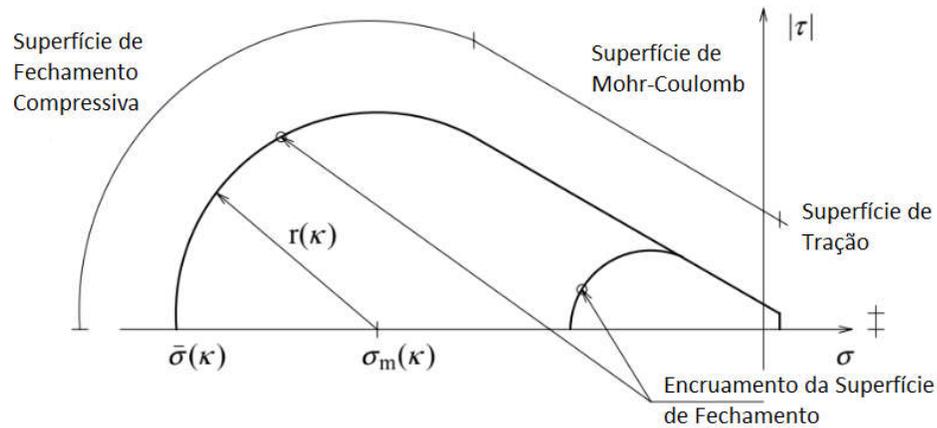


Figura 16. Superfície de Mohr-Coulomb com superfície de fechamento de compressão (Adaptado de Lourenço, 1994).

As Eqs. (15), (16) e (17) expressam as superfícies de escoamento de *cut-off*, Mohr Coulomb, e de fechamento compressiva, respectivamente.

$$f_1(\sigma) = \sigma - \bar{\sigma} \quad (15)$$

$$f_2(\sigma) = |\tau| + \sigma \tan \phi - c \quad (16)$$

$$f_3(\sigma, \kappa) = (\sigma - \sigma_M(\kappa))^2 + \tau^2 - r^2(\kappa) \quad (17)$$

sendo $\bar{\sigma}$ a tensão de escoamento de tração, $\tan \phi$ o ângulo de atrito da junta e c a coesão da junta.

Posteriormente, Lourenço (1996) propôs um modelo mais sofisticado, que combina Mohr-Coulomb com fluxo não associado e uma regra de encruamento e amolecimento para todas as três envoltórias: de tração (κ_1), de cisalhamento (κ_2) e compressão (κ_3). Este novo modelo está ilustrado na Figura 17.

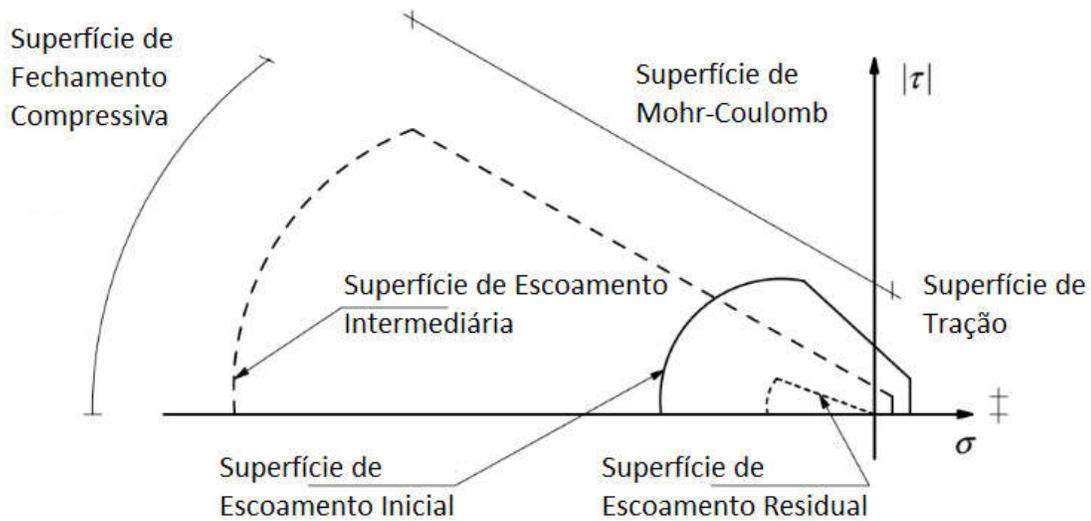


Figura 17. Mohr-Coulomb com superfície de fechamento e encruamento em todas as regiões (Adaptado de Lourenço, 1996)

As Eqs. (18), (19) e (20) expressam as superfícies de escoamento de *cut-off*, Mohr Coulomb, e de fechamento compressiva, respectivamente para este novo modelo.

$$f_1(\sigma, \kappa_1) = \sigma - \bar{\sigma}_1(\kappa_1) \quad (18)$$

$$f_2(\sigma, \kappa_2) = |\tau| + \sigma \tan \phi(\kappa_2) - \bar{\sigma}_2(\kappa_2) \quad (19)$$

$$f_3(\sigma, \kappa_3) = C_{nn}\sigma^2 + C_{ss}\tau^2 + C_n\sigma - (\bar{\sigma}_3(\kappa_3))^2 \quad (20)$$

sendo $\bar{\sigma}_i$ a tensão máxima de tração, compressão e cisalhamento, quando i assume valores de 1 a 3 respectivamente. O parâmetro $\tan \phi(\kappa_2)$ contabiliza tanto o ângulo de atrito quanto a coesão da junta. Já os parâmetros C_{nn} , C_{ss} e C_n controlam respectivamente a posição do centro da superfície de fechamento, a contribuição do cisalhamento para a falha e o ponto onde a superfície de fechamento cruza com o *cut off* de tração.

Este modelo também inclui o efeito de dilatação das juntas através do parâmetro ângulo de dilatação (ψ) considerado na superfície de fluxo

$$g_2 = |\tau(\kappa_2)| + \sigma(\kappa_2) \tan \psi - c \quad (21)$$

resultando num modelo não-associado. Para efeitos de implementação computacional, o ângulo de dilatação é considerado como função do deslocamento plástico cisalhante relativo e da pressão normal de confinamento (Lourenço, 1996).

Existem também modelos que levam em conta a perda de coesão na interface por meio de um coeficiente de dano, como o critério proposto por Gambarotta e Lagomarsino (1997), ilustrado na Figura 18. Neste modelo, as componentes de deformação plástica dependem de uma variável α_m que representa o dano (abertura e escorregamento) da interface entre bloco e argamassa.

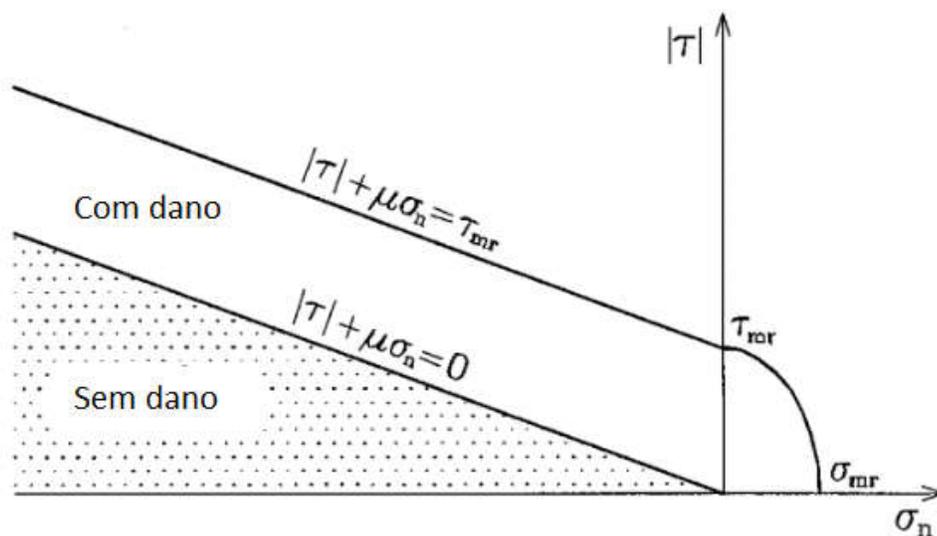


Figura 18. Critério de escoamento com dano (Adaptado de Gambarotta and Lagomarsino, 1997)

A evolução dessa variável se dá de acordo com a abordagem da curva R , utilizado na mecânica da fratura, impondo que a taxa de energia liberada pela junta Y_m deve ser menor do que a resistência R_m da mesma (Gambarotta and Lagomarsino, 1997). A Figura 19 ilustra essa relação e a variação da resistência com o aumento da variável de dano.

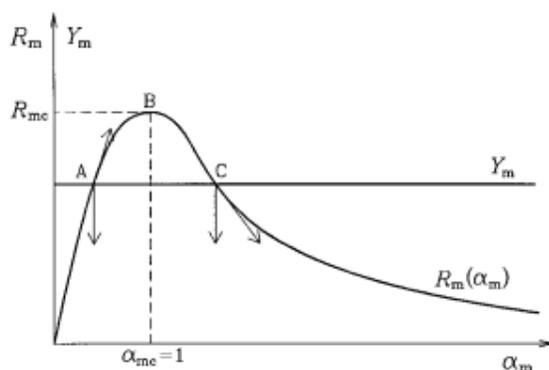


Figura 19. Variação da resistência com o fator de dano (Gambarotta and Lagomarsino, 1997)

O modelo constitutivo proposto por Lourenço (1996) é um dos mais comumente utilizados, inclusive como base para outros modelos mais sofisticados. Oliveira e Lourenço (2004), por exemplo, aprimoraram o modelo de Lourenço (1996) com uma envoltória que contempla não só o carregamento como também o descarregamento, como mostrado na Figura 20.

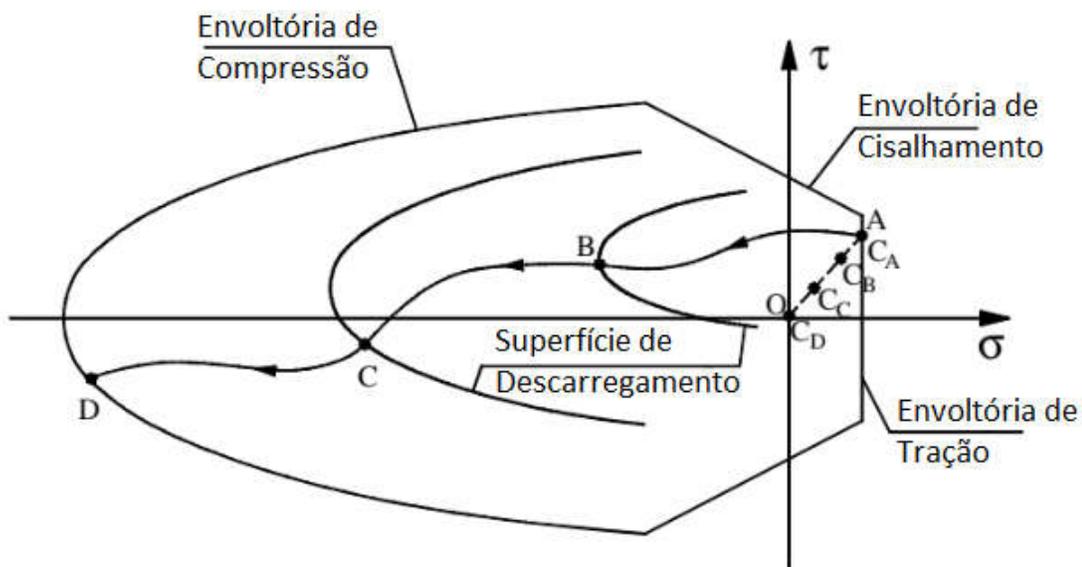


Figura 20. Critério de escoamento com descarregamento em compressão (Adaptado de Oliveira *et al.*, 2004)

A escolha do modelo constitutivo tem de levar em conta a representação do material da maneira mais fiel à realidade o possível, desde que sejam observadas as limitações das ferramentas de análise e resultados experimentais disponíveis. No programa ANSYS®, por exemplo, os únicos modelos compatíveis com o elemento de interface são modelos coesivos de dano linear e exponencial, modelos esses que não aceitam propriedades como coesão e ângulo de atrito das juntas como dado de entrada nem descrevem o encruamento e plastificação destas.

Dada a importância do comportamento das juntas de argamassa no estudo dos modos de falha e modelagem de estruturas em alvenaria, neste trabalho será realizada a implementação de um modelo baseado no de Lourenço (1994) representado na Figura 16. A escolha deste modelo ao invés do proposto por Lourenço (1996) é por conta do primeiro ser mais simples de implementar por depender de apenas um parâmetro de encruamento, parâmetro este de difícil obtenção experimental ou mesmo na literatura, onde poucos são os estudos sobre seus valores. Algumas simplificações adicionais serão aqui impostas, no entanto, como a não consideração do efeito do amolecimento, também pela dificuldade de se obter os parâmetros relacionados a esse efeito.

2.4 Modelagem de alvenaria no Brasil

Nas últimas décadas, é crescente o número de estudos na área de modelagem de alvenaria no Brasil, podendo citar os seguintes trabalhos.

Santos (2001) realizou a análise numérica de paredes de contraventamento, avaliando o desempenho da global da estrutura como um todo e a influência do preenchimento das juntas verticais. A abordagem de macromodelagem com técnicas de homogeneização isotrópica e ortotrópica foram empregadas para analisar painéis com o programa computacional de elementos finitos ABAQUS® (1999). A análise realizada considerou o comportamento linear e não linear dos materiais.

Gomes (2001) estudou o comportamento da interface através da modelagem numérica de prismas de alvenaria usados em ensaios de compressão. Foram utilizados os programas computacionais de elementos finitos DIANA® e FEMGV para analisar prismas pela abordagem de micromodelagem com modelos tridimensionais. Empregou-se o modelo constitutivo de Drucker-Prager para os blocos, argamassa e graute e modelo de Mohr-Coulomb para representar o comportamento não linear das interfaces.

Peleteiro (2002) investigou as ferramentas e recursos disponíveis nos programas computacionais ANSYS® e ABAQUS® para a análise de alvenaria estrutural para suporte teórico a pesquisas experimentais. Foram realizadas análises tridimensionais considerando não-linearidade dos materiais com a abordagem de modelagem detalhada para a simulação de mini-paredes.

Nascimento Neto (2003), a partir de suas próprias análises experimentais, simulou painéis de alvenaria com abertura e lintéis utilizando como base o estudo desenvolvido por Peleteiro (2002). Empregou uma abordagem intermediária entre a micromodelagem detalhada e simplificada para realizar análises tridimensionais considerando não-linearidade dos materiais, usando modelo constitutivo de Mohr-Coulomb para as interfaces, utilizando o programa ABAQUS®. Nesta abordagem intermediária, as características geométricas como o comprimento dos blocos e a espessura das juntas são mantidas intactas, mas as propriedades de deformabilidade da junta incorporam as propriedades da argamassa embutidas.

Mata (2011) investigou a influência das juntas de argamassa no comportamento estrutural de painéis de contraventamento de alvenaria estrutural submetidos à pré-compressão e força lateral. Painéis foram ensaiados experimentalmente e analisados no estado plano de tensões pelo emprego do programa de elementos finitos DIANA®, empregando a micromodelagem simplificada. Para representar o comportamento não-linear das unidades foi utilizado o modelo constitutivo de Drucker-Prager combinado com Rankine, para o comportamento das juntas de argamassa foi utilizado modelo de dano à tração e ao cisalhamento.

Oliveira (2014) desenvolveu um estudo experimental e numérico que teve como objetivo principal analisar o comportamento das juntas de argamassa considerando a presença de armaduras na região. As simulações tridimensionais foram realizadas no

programa computacional DIANA®. Inicialmente, foi realizada uma avaliação do efeito de pré-compressão pela abordagem de macromodelagem. O comportamento das juntas de argamassa foi avaliado pela abordagem de micromodelagem simplificada. Para representar o comportamento não-linear das unidades e do graute foi utilizado o modelo constitutivo de deformação total com fissuras fixas, enquanto para o comportamento das juntas foi utilizado o modelo de interface do compósito.

3. IMPLEMENTAÇÃO DE MODELO CONSTITUTIVO PARA JUNTAS DE ARGAMASSA NO ANSYS

Como apresentado no capítulo anterior, um modelo constitutivo apropriado para a junta de argamassa é essencial para simular o correto comportamento da alvenaria. Na micromodelagem simplificada, as juntas de argamassa são representadas por elementos de interface, disponíveis no programa comercial ANSYS® para análises no estado plano de tensões como INTER202 (linear) e INTER203 (quadrático). No entanto, no programa ANSYS, apenas modelos constitutivos de dano bilinear e exponencial estão disponíveis para utilização com esses elementos, sendo, portanto, insuficientes para uma adequada representação do comportamento das juntas de argamassa.

Esse trabalho implementa via rotinas de usuário do ANSYS dois modelos constitutivos para os elementos de interface: Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off*, superfície de fechamento compressiva e encruamento proposta por Lourenço (1994); e Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* e dano. As implementações foram previamente realizadas em wxMaxima (2015) e em seguida programadas em FORTRAN na subrotina de usuário USERCZM. O Apêndice A descreve sucintamente os procedimentos para a implementação de subrotinas de usuário no ANSYS®.

A subrotina USERCZM é chamada para cada iteração nos pontos de Gauss dos elementos de interface, recebendo como dados de entrada valores de tensão (σ_i) e deformação (ε_i) do passo anterior i e o incremento de deformação do passo corrente ($\Delta\varepsilon$). Como resultado, a subrotina deve fornecer os valores atualizados de tensão (σ_{i+1}) e a matriz Jacobiana tangente $D^{EP} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{i+1}}$ no passo corrente $i + 1$.

Os modelos constitutivos implementados foram formulados no âmbito da teoria clássica da plasticidade como modelos associados, utilizando algoritmo de retorno do tipo corretor-preditor para a resolução implícita do problema discreto. Os modelos foram propostos por Lourenço (1994) e a formulação de integração de tensões é apresentada a seguir.

3.1 Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* e superfície de fechamento na compressão com encruamento

3.1.1 Descrição do modelo

Modelos baseados na teoria da plasticidade limitam a região governada pela teoria da elasticidade com a introdução de um critério de plastificação, que varia de acordo com o modelo. No caso da alvenaria, e mais particularmente de suas juntas, por se tratar de um material frágil esse critério de escoamento deve ser dependente da pressão hidrostática (Chen, 1988). Um dos critérios que satisfaz essa condição é o critério de Mohr-Coulomb, utilizado como base no modelo proposto por Lourenço (1994) para as juntas de argamassa (Figura 21), implementado nesse trabalho.

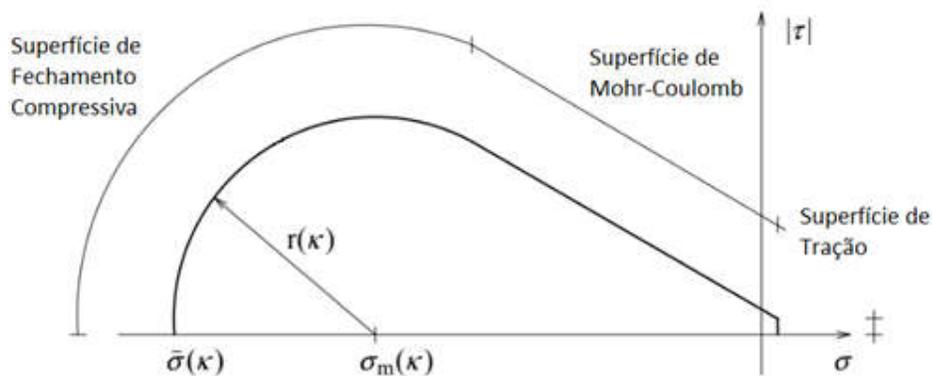


Figura 21. Superfície de Mohr-Coulomb com superfície de fechamento de compressão (Lourenço, 1994).

O modelo de Mohr-Coulomb parte do princípio de que o escoamento do plano ocorre quando a tensão de cisalhamento (τ) atinge um valor limite que depende da tensão normal atuante. Trata-se de um modelo elastoplástico cuja envoltória de resistência no plano cartesiano ($\sigma \times \tau$) é representada por uma função linear, como pode ser observado na Figura 21.

Considerando que a superfície de Mohr-Coulomb é aberta na direção de compressão do eixo hidrostático, adiciona-se uma superfície de fechamento (*cap*) para a representação da tensão última e do efeito de encruamento e amolecimento. Dessa maneira, é possível impor um limite aos estados de tensão de compressão do material, não permitindo que estes evoluam infinitamente. O mesmo pode ser feito com a tensão última de tração, uma vez que materiais frágeis apresentam menor resistência à tração do que a representada pelo vértice da pirâmide da superfície de Mohr-Coulomb (Chen, 1988).

Dessa maneira, o critério elastoplástico proposto por Lourenço (1994) apresenta três superfícies de escoamento, dadas por

$$f_1 = |\tau| + \sigma \operatorname{tg} \phi - c \quad (22)$$

$$f_2 = \sigma - \sigma_T \quad (23)$$

$$f_6(\kappa) = (\sigma - \sigma_M(\kappa))^2 + \tau^2 - r^2(\kappa) \quad (24)$$

em que f_1 é a envoltória de Mohr-Coulomb, f_2 é a superfície de *cut-off* de tração e f_6 é a superfície de fechamento circular na compressão. Nas expressões acima, σ e τ são as componentes de tensão normal e cisalhante atuantes na junta de argamassa. As superfícies de Mohr-Coulomb (f_1) e de *cut-off* (f_2) de tração seguem a plasticidade perfeita e necessitam de três parâmetros obtidos experimentalmente: coesão c , ângulo de atrito ϕ e tensão máxima de tração σ_T . Já a superfície de fechamento circular na compressão pode sofrer encruamento/amolecimento e é definida pela coordenada do seu centro σ_M e o raio r do círculo, dados por

$$\sigma_M(\kappa) = \frac{-\bar{\sigma}(\kappa) + c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (25)$$

$$r(\kappa) = \frac{\bar{\sigma}(\kappa) \sin \phi + c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (26)$$

sendo $\bar{\sigma}$ o valor da tensão ruptura à compressão da junta de argamassa, obtida experimentalmente.

A depender do valor de $\bar{\sigma}$, a superfície de fechamento pode expandir-se (encruamento) ou contrair-se (amolecimento), com modificações no raio (r) do círculo

e deslocamento de seu centro ($\bar{\sigma}_M$) ao longo do eixo hidrostático, caracterizando um encruamento/amolecimento do tipo misto. A tensão de ruptura à compressão $\bar{\sigma}$ depende da evolução de um parâmetro de encruamento/amolecimento κ , como ilustrado na Figura 22.

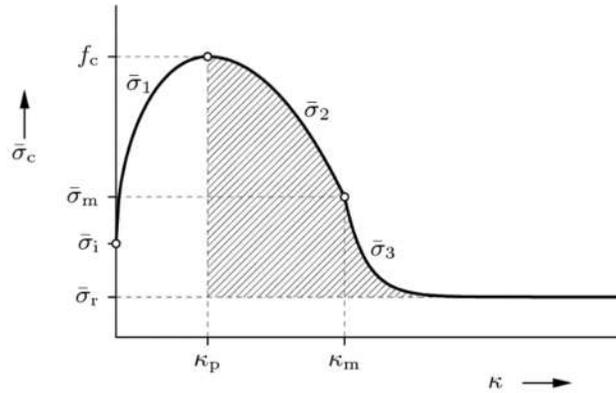


Figura 22. Evolução do parâmetro de encruamento/amolecimento (Manual do Diana, 2015)

Observa-se que, com o crescimento do valor de κ , o raio da superfície de fechamento aumenta e o centro é deslocado em direção a valores maiores de tensão de compressão, até um valor máximo de $\bar{\sigma} = f_c$ ser alcançado em $\kappa = \kappa_p$, caracterizando uma região de encruamento. A partir deste ponto, o valor do raio diminui e o centro é deslocado até o valor mínimo de $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_R$ ser alcançado quando $\kappa \rightarrow \infty$, caracterizando uma região de amolecimento.

A regra de encruamento aqui utilizada é descrita por um padrão parabólico no encruamento e um padrão parabólico/exponencial no amolecimento (Lourenço, 1996). A curva é definida em três trechos,

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_i + (f_c - \bar{\sigma}_i) \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa_p} - \frac{\kappa^2}{\kappa_p^2}} \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_2 = f_c + (\bar{\sigma}_M - f_c) \left(\frac{\kappa - \kappa_p}{\kappa_M - \kappa_p} \right)^2 \quad (28)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_R + (\bar{\sigma}_M - \bar{\sigma}_R) \exp\left(2 \left(\frac{\bar{\sigma}_M - f_c}{\kappa_M - \kappa_p}\right) \left(\frac{\kappa - \kappa_M}{\bar{\sigma}_M - \bar{\sigma}_R}\right)\right) \quad (29)$$

Os valores de $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\sigma}_M$ e $\bar{\sigma}_R$ podem ser estimados a partir do valor máximo f_c de resistência à compressão: $\bar{\sigma}_i = \frac{f_c}{3}$, $\bar{\sigma}_M = \frac{f_c}{2}$ e $\bar{\sigma}_R = \frac{f_c}{7}$. (Lourenço, 1996).

3.1.2 Problema elastoplástico discreto no tempo

Considere que, para um problema discreto não-linear, são conhecidos os valores de tensão, (σ_i), deformação (ϵ_i), deformação plástica (ϵ_i^P) e parâmetro de encruamento κ_i do passo anterior i . Dado o incremento de deformação do passo corrente ($\Delta\epsilon$), deseja-se obter os valores atualizados de tensão (σ_{i+1}) e a matriz jacobiana tangente $\mathbf{D}^{EP} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \epsilon_{i+1}}$ no passo corrente $i + 1$.

Esse problema pode ser resolvido no âmbito da teoria clássica de plasticidade associada, aplicando o método implícito de Euler (*backward*) para a discretização e considerando: a lei de decomposição de deformações

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_{i+1}^E + \epsilon_{i+1}^P \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{N_i} \\ \epsilon_{S_i} \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \epsilon_N^E \\ \epsilon_S^E \end{Bmatrix}_{i+1} + \begin{Bmatrix} \epsilon_N^P \\ \epsilon_S^P \end{Bmatrix}_{i+1}, \quad (30)$$

a lei linear elástica do material

$$\sigma_{i+1} = \mathbf{D}^E \epsilon_{i+1}^E \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_N^E \\ \epsilon_S^E \end{Bmatrix}_{i+1}, \quad (31)$$

os critérios de escoamento dados pelas Eqs. (22) a (24) e a lei de fluxo plástico associado

$$\Delta \epsilon^P = \sum \Delta \gamma_j \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \Big|_{i+1} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_N^P \\ \Delta \epsilon_S^P \end{Bmatrix} = \sum \Delta \gamma_j \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \tau} \end{Bmatrix} \Big|_{i+1}, \quad (32)$$

em que $\Delta \gamma_j$ é o multiplicador plástico associado à função de escoamento ativa f_j . Nas expressões acima, os sobrescritos E e P referem-se às parcelas elásticas e plásticas,

respectivamente. O encruamento da superfície de fechamento na compressão segue a lei em deformações plásticas

$$\Delta\kappa = (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^P)^{1/2}. \quad (33)$$

Observe que se optou pelo método implícito de Euler, logo as derivadas presentes na Eq. (32) devem ser calculadas no passo corrente $i + 1$. Dessa maneira, mantém-se a convergência quadrática do sistema não-linear global do ANSYS®, que emprega o método de Newton-Raphson, além de se garantir uma solução convergente. No entanto, como as derivadas no passo corrente envolvem incógnitas, a dedução das expressões a serem implementadas é mais trabalhosa.

A resolução deve respeitar as condições de carregamento e descarregamento. Quando o incremento de deformações mantém o estado de tensões no regime elástico, então $f_i < 0$ e $\Delta\gamma_i = 0$. Caso contrário, quando o estado de tensões entra no regime de plastificação, tem-se $f_i = 0$ e $\Delta\gamma_i > 0$. É válido ressaltar que basta uma superfície de escoamento se tornar ativa ($f_i = 0$) para gerar deformações plásticas. No entanto, apenas a superfície de fechamento na compressão leva à evolução do parâmetro de encruamento κ .

As incógnitas do problema discreto são as tensões atualizadas ($\boldsymbol{\sigma}_{i+1}$), os multiplicadores plásticos ($\Delta\gamma_i$) e a variação do parâmetro de encruamento ($\Delta\kappa$).

3.1.3 Algoritmo de integração de tensões

O algoritmo preditor-corretor foi empregado para a integração das tensões do modelo constitutivo implementado.

Numa primeira etapa, calcula-se as tensões preditoras ou *trial* ($\boldsymbol{\sigma}^{TRIAL}_{i+1}$), considerando que o incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é elástico, ou seja, não há plastificação no passo corrente. Assim, considerando

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^{E\ TRIAL} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^E + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (34)$$

e aplicando a Eq. (31) tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{TRIAL} = \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{D}^E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_i + K_N \Delta \varepsilon_N \\ \tau_i + K_S \Delta \varepsilon_S \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Com os valores preditores, avalia-se as funções de escoamento dadas pelas Eqs. (22) a (24). Se $f_i < 0$ para todas as superfícies, o estado de tensão encontra-se na região do regime elástico, ilustrada na Figura 23.

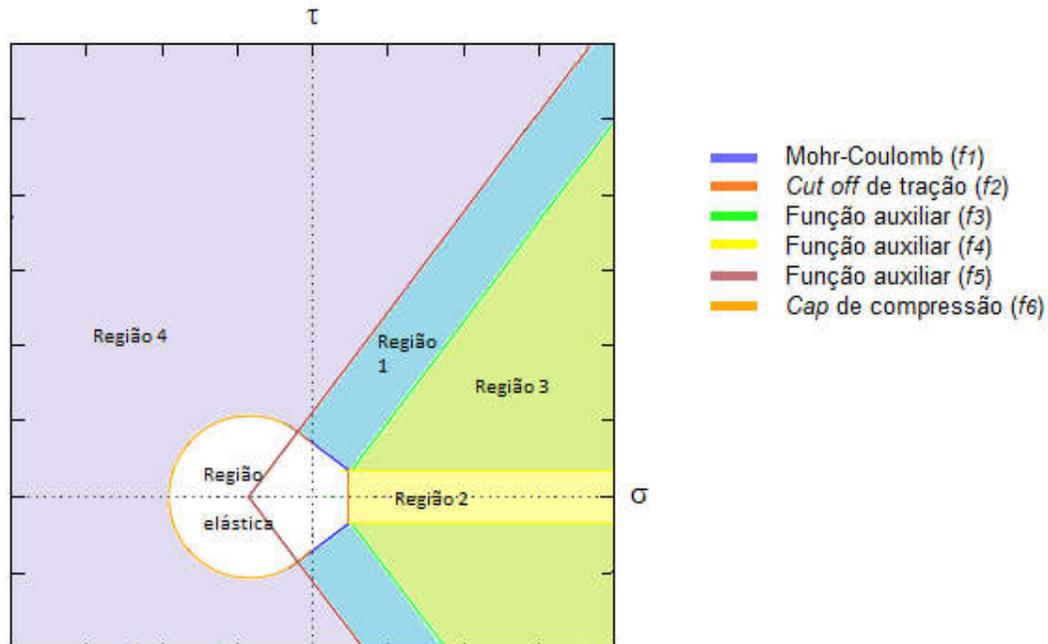


Figura 23. Regiões do algoritmo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com *cut-off* na tração e superfície de fechamento na compressão

Nesse caso, tem-se $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{0}$ e as tensões e deformações na iteração $i + 1$ são atualizadas diretamente, sem a necessidade de se passar por uma etapa de retorno,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^E = \boldsymbol{\varepsilon}_i^E + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^P = \boldsymbol{\varepsilon}_i^P \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{TRIAL} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

A partir dos valores atualizados, a matriz Jacobiana tangente pode ser calculada por:

$$\mathbf{D}^{EP} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{i+1}} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{i+1}^{E\ TRIAL}} \quad (39)$$

resultando em

$$\mathbf{D}^{EP} = \mathbf{D}^E = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix} \quad (40)$$

Caso a tensão preditora esteja fora da região elástica, faz-se necessária a etapa de retorno. Como o modelo é associado, as retas definidas pelas funções auxiliares f_3 , f_4 e f_5 , traçadas perpendicularmente às superfícies de escoamento, delimitam as 4 regiões possíveis de retorno (Figura 23). As expressões dessas retas auxiliares são dadas por:

$$f_3 = |\tau| - c - \sigma \cot \phi + \sigma_T (tg \phi + \cot \phi) \quad (41)$$

$$f_4 = |\tau| - c + \sigma_T tg \phi \quad (42)$$

$$f_5 = |\tau| + \sigma \cot \phi + \sigma_M \cot \phi \quad (43)$$

Nota-se que a função auxiliar f_5 passa pelo centro da superfície de fechamento circular, logo também será deslocada com a mudança no valor de κ .

Dessa maneira, as regiões do algoritmo de integração de tensões são estabelecidas como:

- a) Região elástica (nenhuma superfície ativa, é dividida em duas áreas, a depender do valor de f_5)
 - i. $f_1 \leq 0$, $f_2 \leq 0$ e $f_5 \leq 0$;
 - ii. $f_5 > 0$ e $f_6 \leq 0$;
- b) Região 1 (retorno para a superfície de Mohr-Coulomb, f_1 ativa):

$$f_1 > 0, f_3 > 0 \text{ e } f_5 \leq 0;$$
- c) Região 2 (retorno para a superfície de *cut-off*, f_2 ativa):

$$f_2 > 0 \text{ e } f_4 \leq 0;$$

d) Região 3 (retorno para o ponto de interseção entre a superfície de Mohr-Coulomb e *cut-off*, de coordenadas $[\sigma_T, |\tau| = c - \sigma_T \tan \phi]$, f_1 e f_2 ativas):

$$f_2 > 0, f_3 \leq 0 \text{ e } f_4 > 0;$$

e) Região 4 (retorno para a superfície de fechamento na compressão, f_6 ativa):

$$f_5 > 0 \text{ e } f_6 > 0.$$

Verifica-se que, como há descontinuidade na direção normal à superfície no ponto de interseção entre f_1 e f_2 , a região 3 de retorno deve ser incluída. O mesmo não acontece no ponto de interseção entre f_1 e f_6 , que apresenta continuidade na normal à superfície.

A etapa de correção do algoritmo preditor-corretor alterar os valores de tensão e deformação preditoras previamente calculados. Para as regiões 1 a 4, retira-se a parcela do incremento plástico de deformações $\Delta \varepsilon^P$ (Eq. (32)) da deformação preditora $\varepsilon_{i+1}^{E\ TRIAL}$ (Eq. (34)), obtendo:

$$\varepsilon_{i+1}^E = \varepsilon_i^E + \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^P = \varepsilon_{i+1}^{E\ TRIAL} - \sum \Delta \gamma_j \left. \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right|_{i+1} \quad (44)$$

Aplicando a equação acima na lei elástica dada pela Eq. (31), chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_N \sum \Delta \gamma_j \left. \frac{\partial f_j}{\partial \sigma^{TRIAL}} \right|_{i+1} \\ K_S \sum \Delta \gamma_j \left. \frac{\partial f_j}{\partial \tau^{TRIAL}} \right|_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

sendo que apenas as superfícies ativas devem ser computadas no somatório. Impondo $f_j = 0$, é possível calcular os valores dos multiplicadores plásticos $\Delta \gamma_j$. Note que, para as regiões 1, 2 e 3, não há encruamento nas superfícies ativas, logo $\Delta \kappa = 0$.

A partir das expressões das tensões atualizadas, a matriz Jacobiana tangente pode ser obtida por:

$$D^{EP} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{N\ i+1}^{E\ TRIAL}} & \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{S\ i+1}^{E\ TRIAL}} \\ \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial \varepsilon_{N\ i+1}^{E\ TRIAL}} & \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial \varepsilon_{S\ i+1}^{E\ TRIAL}} \end{bmatrix} \quad (46)$$

A seguir, são apresentadas as equações do algoritmo de retorno para as regiões 1 a 4.

Região 1:

Para o caso específico da região 1, tem-se

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial \sigma^{TRIAL}} \right|_{i+1} = tg\phi \quad (47)$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial \tau^{TRIAL}} \right|_{i+1} = sig(\tau) \quad (48)$$

Aplicando na Eq. (45) e impondo $f_1(\sigma_{i+1}, \tau_{i+1}) = 0$, obtém-se

$$\Delta\gamma_1 = \frac{sig(\tau)f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N tg^2\phi} \quad (49)$$

A partir da expressão de $\Delta\gamma_1$, chega-se às equações das tensões atualizadas e da matriz tangente dessa região de retorno,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_N \frac{sig(\tau)f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N tg^2\phi} tg\phi \\ K_S \frac{sig(\tau)f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N tg^2\phi} sig(\tau) \end{Bmatrix} \quad (50)$$

$$D^{EP} = \begin{bmatrix} \frac{K_N K_S}{K_S + K_N tg^2\phi} & -\frac{K_N K_S tg\phi sig(\tau)}{K_S + K_N tg^2\phi} \\ -\frac{K_N K_S tg\phi sig(\tau)}{K_S + K_N tg^2\phi} & \frac{K_N K_S tg^2\phi}{K_S + K_N tg^2\phi} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Região 2:

Para o caso da região 2, tem-se:

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial \sigma^{TRIAL}} \right|_{i+1} = 1 \quad (52)$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial \tau^{TRIAL}} \right|_{i+1} = 0 \quad (53)$$

Aplicando $f_2(\sigma_{i+1}, \tau_{i+1}) = 0$, obtém-se:

$$\Delta\gamma_2 = \frac{f_2^{TRIAL}}{K_N} \quad (54)$$

que substituído na Eq. (45) leva à seguinte expressão para as tensões atualizadas

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Substituindo na Eq. (46), chega-se à matriz tangente dessa região de retorno

$$D^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix} \quad (56)$$

Região 3:

Para o caso da região 3, há duas funções de escoamento ativas, f_1 e f_2 . Uma vez que as duas superfícies foram ativadas, é necessário calcular dois multiplicadores plásticos, $\Delta\gamma_1$ e $\Delta\gamma_2$, para resolver o sistema. Desta forma, a Eq. (45) resulta em

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_N \Delta\gamma_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma^{TRIAL}} \Big|_{i+1} + K_N \Delta\gamma_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma^{TRIAL}} \Big|_{i+1} \\ K_S \Delta\gamma_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau^{TRIAL}} \Big|_{i+1} + K_S \Delta\gamma_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau^{TRIAL}} \Big|_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Impondo $f_1(\sigma_{i+1}, \tau_{i+1}) = 0$ e $f_2(\sigma_{i+1}, \tau_{i+1}) = 0$ simultaneamente e resolvendo o sistema de equações, chega-se a

$$\Delta\gamma_1 = \frac{f_2^{TRIAL} - K_N \Delta\gamma_2}{K_N tg\phi} = \frac{(\tau_{i+1}^{TRIAL} - c_0 + \sigma_T tg\phi) sig(\tau_{i+1})}{K_S + K_N tg^2\phi} \quad (58)$$

$$\Delta\gamma_2 = \frac{f_2^{TRIAL}}{K_N} - \frac{(\tau_{i+1}^{TRIAL} - c_0 + \sigma_T tg\phi) sig(\tau_{i+1}) tg\phi}{K_S + K_N tg^2\phi} \quad (59)$$

A partir da expressão de $\Delta\gamma_1$ e $\Delta\gamma_2$, chega-se às equações das tensões atualizadas e da matriz tangente dessa região de retorno,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ c_0 - \sigma_T tg\phi \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$D^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Note que as tensões atualizadas dadas pela Eq. (60) são as coordenadas do ponto de interseção entre as superfícies de escoamento f_1 e f_2 , como esperado.

Região 4:

Para o caso da região 4, apenas a função de escoamento f_6 é ativada. No entanto, é necessário calcular o multiplicador plástico ($\Delta\gamma_4$) e o incremento do parâmetro de encruamento ($\Delta\kappa$). As derivadas da função de escoamento são

$$\left. \frac{\partial f_6}{\partial \sigma^{TRIAL}} \right|_{i+1} = 2(\sigma_{i+1} - \sigma_M) \quad (62)$$

$$\left. \frac{\partial f_6}{\partial \tau^{TRIAL}} \right|_{i+1} = 2\tau \quad (63)$$

Substituídas na Eq. (45), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_{i+1}^{TRIAL} + 2K_N \Delta\gamma_6 \sigma_M}{1 + 2K_N \Delta\gamma_6} \\ \frac{\tau_{i+1}^{TRIAL}}{1 + 2K_S \Delta\gamma_6} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Quando se impõe $f_6 = 0$ empregando as expressões acima, é possível perceber a dependência tanto de $\Delta\gamma_6$ quanto de κ_{i+1} , este dado por:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa \quad (65)$$

As variáveis $\Delta\gamma_6$ e $\Delta\kappa$ devem então ser resolvidas pelo sistema não-linear de equações formado por $f_6 = 0$ e pela lei de encruamento em deformações (Eq. (33)). No entanto, pode-se ainda substituir as derivadas dadas pelas Eqs. (62) e (63) na Eq. (33) e considerando $f_6 = 0$, chega-se à relação (Lourenço, 1994)

$$\Delta\gamma_6 = \frac{\Delta\kappa}{2r_{i+1}} \quad (66)$$

Utilizando a expressão acima e a Eq. (65), é possível reescrever a equação de $f_6 = 0$ em função de $\Delta\kappa$ apenas. Dada a não linearidade da equação resultante, a mesma é resolvida iterativamente pelo método de Newton-Raphson, em que se emprega a relação de recorrência

$$\Delta\kappa_{k+1} = \Delta\kappa_k - \frac{f_6^{i+1}}{\left(\frac{\partial f_6^{i+1}}{\partial \Delta\kappa_k}\right)} \quad (67)$$

sendo que o índice k refere-se a esse processo iterativo local. O chute inicial assume os valores convergidos de passos anteriores i do sistema não-linear global, sendo que no primeiro passo em que ocorre o encruamento, empregou-se um valor muito pequeno (aqui adotado como 10^{-8}).

A derivada da função f_6 em relação à $\Delta\kappa$ é dada por

$$\frac{\partial f_6^{i+1}}{\partial \Delta\kappa_k} = 2 \left[(\sigma_{i+1} - \sigma_M) \left(\frac{d\sigma_{i+1}}{d\Delta\kappa_k} - \frac{d\sigma_M^{i+1}}{d\Delta\kappa_k} \right) + \tau_{n+1} \left(\frac{d\tau_{i+1}}{d\Delta\kappa_k} \right) \right] - 2r_{i+1} \frac{\partial r_{i+1}}{\partial \Delta\kappa_k} \quad (68)$$

sendo as demais derivadas

$$\frac{d\sigma_{i+1}}{d\Delta\kappa_k} = \frac{K_N}{r_{i+1} \left(1 + K_N \frac{\Delta\kappa_k}{r_{i+1}} \right)} \left[\Delta\kappa_k \frac{d\sigma_M^{i+1}}{d\Delta\kappa_k} - \sigma_M^{i+1} (M - 1) - \sigma_{i+1} (1 - M) \right] \quad (69)$$

$$\frac{d\tau_{i+1}}{d\Delta\kappa_k} = - \frac{K_S \tau_{i+1}}{r_{i+1} \left(1 + K_S \frac{\Delta\kappa_k}{r_{i+1}} \right)} (1 - M) \quad (70)$$

$$\frac{d\sigma_M^{i+1}}{d\Delta\kappa_k} = - \frac{1}{1 + \sin \phi} \frac{d\bar{\sigma}_k}{d\Delta\kappa_k} \quad (71)$$

$$\frac{\partial r_{i+1}}{\partial \Delta\kappa_k} = \frac{\sin \phi}{1 + \sin \phi} \frac{\partial \bar{\sigma}_k}{\partial \Delta\kappa_k} \quad (72)$$

onde

$$M = \frac{\Delta\kappa_k}{r_{i+1}} \frac{dr_{i+1}}{d\Delta\kappa_k} \quad (73)$$

No presente trabalho é implementado, no entanto, apenas o trecho regido pelas regras de encruamento da Figura 22, ou seja, o trecho de amolecimento não é contemplado. Para a implementação do trecho de amolecimento onde $\kappa_i > \kappa_p$, se faz necessária a formulação do problema no espaço das deformações, uma vez que o incremento negativo de tensões nesta fase do carregamento viola o postulado de estabilidade de Drucker, enquanto incrementos positivos de deformação mantêm a regra de normalidade e linearidade (Chen, 1988).

Assim, para esta implementação, o valor de $\bar{\sigma}$ só pode assumir o valor $\bar{\sigma}_1$ dado pela Eq. (27), cuja derivada é dada por

$$\frac{d\bar{\sigma}_{1k}}{d\Delta\kappa_k} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa_p} - \frac{2\kappa_k}{\kappa_p^2}\right)(f_c - \bar{\sigma}_i)}{2\sqrt{\frac{2\kappa_k}{\kappa_p} - \frac{\kappa_k^2}{\kappa_p^2}}} \quad (74)$$

Com todas as derivadas calculadas, basta substituir os valores na expressão de recorrência de Newton-Raphson (Eq. (67)) e repetir as iterações até que o valor de f_6 seja o mais próximo possível de zero, de valor absoluto menor do que uma estipulada tolerância.

A partir do valor de $\Delta\kappa_k$ convergido, o valor do multiplicador plástico $\Delta\gamma_6$ pode ser obtido pela Eq. (66) e em seguida, as tensões atualizadas conforme a Eq. (64). Finalmente, a matriz tangente da região 4 é dada por

$$D^{EP} = \begin{bmatrix} \frac{K_N}{1 + 2\Delta\gamma_6 K_N} & 0 \\ 0 & \frac{K_S}{1 + 2\Delta\gamma_6 K_S} \end{bmatrix} \quad (75)$$

É importante lembrar que a condição $\Delta\gamma \geq 0$ não é imposta no algoritmo de integração, como de praxe. Deve, portanto, ser verificada e monitorada durante a resolução de problemas e seu não atendimento deve ser reportado, podendo sinalizar a não convergência da solução.

O quadro 1 esquematiza o algoritmo de integração de tensões do tipo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* na tração e superfície de fechamento na compressão.

Entrada: $\sigma_i, \tau_i, \phi, c, \mathbf{D}^E, \sigma_T, \Delta\varepsilon_N, \Delta\varepsilon_S, \Delta\kappa_0, \kappa_p, \kappa_M$.

- Calcular as tensões preditoras σ_{i+1}^{TRIAL} e τ_{i+1}^{TRIAL} (Eq.(35));
- Calcular os as funções f_2, f_3 e f_4 (Eq. (23), (41) e (42)) para σ_{i+1}^{TRIAL} e τ_{i+1}^{TRIAL} ;
- Calcular σ_M e r iniciais (Eq. (25) e (26)), utilizando $\Delta\kappa_k$;
- Calcular f_1, f_5 e f_6 (Eq. (22), (43) e (24)) para σ_{i+1}^{TRIAL} e τ_{i+1}^{TRIAL} :
 - Se $[f_1 \leq 0, f_2 \leq 0 \text{ e } f_5 \leq 0]$ ou $[f_5 > 0 \text{ e } f_6 \leq 0]$, região elástica:
Saída: $\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{TRIAL}$ e $\mathbf{D}^{EP} = \mathbf{D}^E$ (Eq. (38) e (40));
 - Se $f_1 > 0, f_3 > 0$ e $f_5 \leq 0$, região 1 (Eq. (50) e (51)):

$$\text{Saída: } \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_N \frac{\text{sig}(\tau) f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N t g^2 \phi} t g \phi \\ K_S \frac{\text{sig}(\tau) f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N t g^2 \phi} \text{sig}(\tau) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} \frac{K_N K_S}{K_S + K_N t g^2 \phi} & -\frac{K_N K_S t g \phi \text{sig}(\tau)}{K_S + K_N t g^2 \phi} \\ \frac{K_N K_S t g \phi \text{sig}(\tau)}{K_S + K_N t g^2 \phi} & \frac{K_N K_S t g^2 \phi}{K_S + K_N t g^2 \phi} \end{bmatrix}$$

- Se $f_2 > 0$ e $f_4 \leq 0$, região 2 (Eq. (55) e (56)):

$$\text{Saída: } \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix}$$

- Se $f_2 > 0, f_3 \leq 0$ e $f_4 > 0$, região 3 (Eq. (60) e (61)):

$$\text{Saída: } \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ c_0 - \sigma_T t g \phi \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Se nenhuma das opções anteriores, estado final de tensões depende da posição da superfície de fechamento, utilizar Newton-Raphson:

- Calcular $\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa$ (Eq. (65)) e seu respectivo $\bar{\sigma}$:

Se $\kappa_i < \kappa_p$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$ (Eq. (27));

Se $\kappa_i > \kappa_p$, ativar amolecimento (outra formulação).

- Calcular σ_M, r, f_5 e f_6 (Eq. (25), (26), (43) e (24))

- Se $f_1 > 0, f_3 > 0$ e $f_5 \leq 0$, região 1: $\Delta\kappa = 0$

- Se $f_5 > 0$ e $f_6 > \text{tol}$, região 4:

Calcular $\frac{d\bar{\sigma}}{d\Delta\kappa}, \frac{d\sigma_M}{d\Delta\kappa}, \frac{\partial r}{\partial\Delta\kappa}, \frac{d\sigma_{i+1}}{d\Delta\kappa}, \frac{d\tau_{i+1}}{d\Delta\kappa}, \frac{\partial f_6}{\partial\Delta\kappa}$ (Eq. (68) à (73));

Atualizar $\Delta\kappa_{k+1} = \Delta\kappa_k - \frac{f_6^{i+1}}{\left(\frac{\partial f_6}{\partial\Delta\kappa}\right)}$ (Eq. (67));

- Repetir Newton-Raphson até $f_6 \leq \text{tol}$;

Saída: $\Delta\gamma_{i+1} = \frac{\Delta\kappa_{i+1}}{2r_{i+1}}, \sigma_{i+1} = \frac{\sigma_{i+1}^{TRIAL} + 2K_N \Delta\gamma_6 \sigma_M}{1 + 2K_N \Delta\gamma_6}, \tau_{i+1} = \frac{\tau_{i+1}^{TRIAL}}{1 + 2K_S \Delta\gamma_6}$ e $\mathbf{D}^{EP} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{K_N}{1 + 2\Delta\gamma K_N} & 0 \\ 0 & \frac{K_S}{1 + 2\Delta\gamma K_S} \end{bmatrix} \text{ (Eq. (66), (64) e (75));}$$

- Saída: Atualizar deformações elástica e plástica (se houver).

Quadro 1. Algoritmo de integração de tensões para o modelo de Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* na tração e superfície de fechamento compressiva.

3.2 Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* e dano

O modelo de dano é uma alternativa simples para se incluir a diminuição da rigidez após o início da fissuração da junta de argamassa e representar a falha do material. Este é o modelo padrão adotado pelo software ANSYS® para modelagem de zonas coesivas para os elementos de interface, com a opção de dano bilinear e exponencial.

Neste trabalho, implementa-se o dano bilinear com o modelo elastoplástico de Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* na tração. A Figura 24 (a) e (b) ilustra o dano bilinear para o modo I e modo II, respectivamente. Por simplicidade, os danos do modo I e modo II foram considerados desacoplados, ou seja, as variáveis de dano são independentes para as direções normal e tangencial da junta de argamassa. Adota-se um mesmo valor de tensão normal máxima σ_0 para a tração e a compressão.

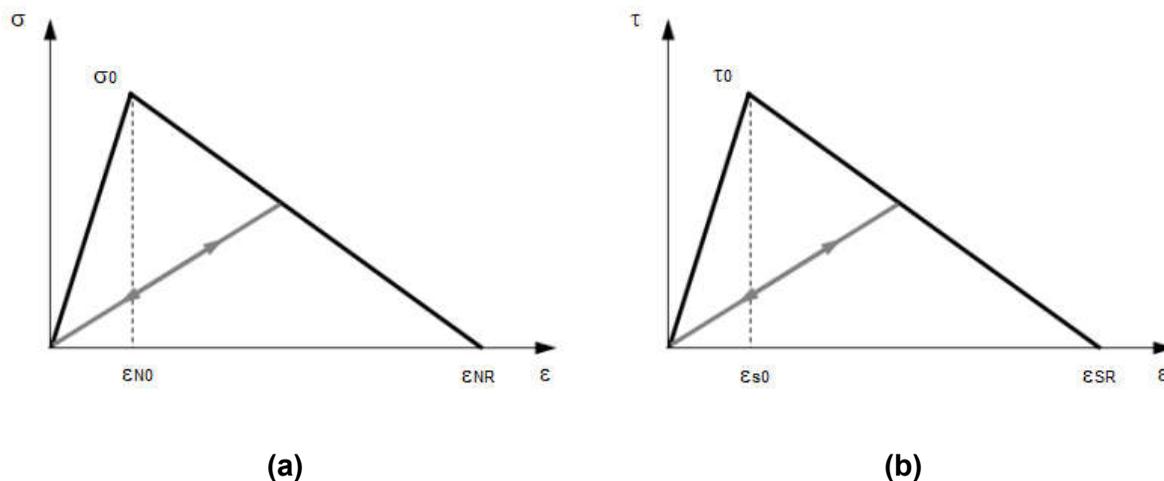


Figura 24. Modelo de dano bilinear.

Legenda: (a) modo I; (b) modo II.

A partir de dados experimentais, valores máximos de tensão σ_0 e τ_0 são obtidos. Aplicando os coeficientes de rigidez K_N e K_S e a lei constitutiva linear (Eq. (9),

calcula-se os valores de ε_{N_0} e ε_{S_0} . Os valores de ε_{N_R} e ε_{S_R} são ajustados para que o modelo numérico represente o mesmo valor de energia de fratura obtido experimentalmente.

Neste tipo de modelo, é utilizado um parâmetro de dano (D_k) para cada modo de fratura, que penaliza a rigidez correspondente (K_k) quando sua deformação ultrapassa certo limite (ε_{k_0}). O índice k refere-se ao modo de fratura considerado, ou seja, “N” para o modo I ocorrendo na direção normal, “S” para o modo II ocorrendo na direção tangencial. Para a formulação bilinear, este parâmetro pode ser calculado por

$$D_k = \max\{0, \min\{1, \bar{D}_k\}\} \quad (76)$$

$$\bar{D}_k = 1 - \frac{\eta_k}{\eta_k - 1} \frac{\varepsilon_{k_0}}{|\varepsilon_k|} + \frac{1}{\eta_k - 1} \quad (77)$$

onde o parâmetro η é chamado de coeficiente de deformação residual dado por

$$\eta_k = \frac{\varepsilon_{k_R}}{\varepsilon_{k_0}} \quad (78)$$

O valor de \bar{D}_k pode ser calculado de maneira explícita (no passo i) ou de maneira implícita (no passo $i + 1$). Considerando que o valor de \bar{D} depende de uma incógnita do problema ε_k , por simplicidade, o método explícito foi o escolhido para este caso. Desta maneira, para um passo $i + 1$, as tensões finais podem ser obtidas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 - D_{N_i}) K_N \varepsilon_{N_{i+1}} \\ (1 - D_{S_i}) K_S \varepsilon_{S_{i+1}} \end{Bmatrix} \quad (79)$$

sendo D_{N_i} e D_{S_i} calculados a partir das Eqs. (76) a (78), empregando valores de ε_{N_i} e $\varepsilon_{S_{i+1}}$ convergidos do passo anterior.

Observe que, quando $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon_{k_0}$, tem-se $D_k = 0$ e a Eq. (79) assume a forma da lei elástica. Quando $\varepsilon_{0k} < |\varepsilon_k| < \varepsilon_{k_R}$, tem-se $0 < D_k < 1$ e a Eq. (79) fornece valores progressivamente menores com o aumento do valor de D_k . Quando $|\varepsilon_k| > \varepsilon_{k_R}$, tem-se $D_k = 1$ e as tensões correspondentes são zeradas, indicando dano total do material.

O modelo elastoplástico foi implementado de modo similar ao já apresentado na Seção 3.1, utilizando algoritmo de integração de tensões do tipo preditor- corretor. A Figura 25 ilustra as regiões de retorno do algoritmo de integração, cujas expressões de tensão atualizada e matriz Jacobiana tangente são semelhantes às deduzidas anteriormente, com exceção da existência do parâmetro de dano. Por brevidade, a dedução das expressões será suprimida.

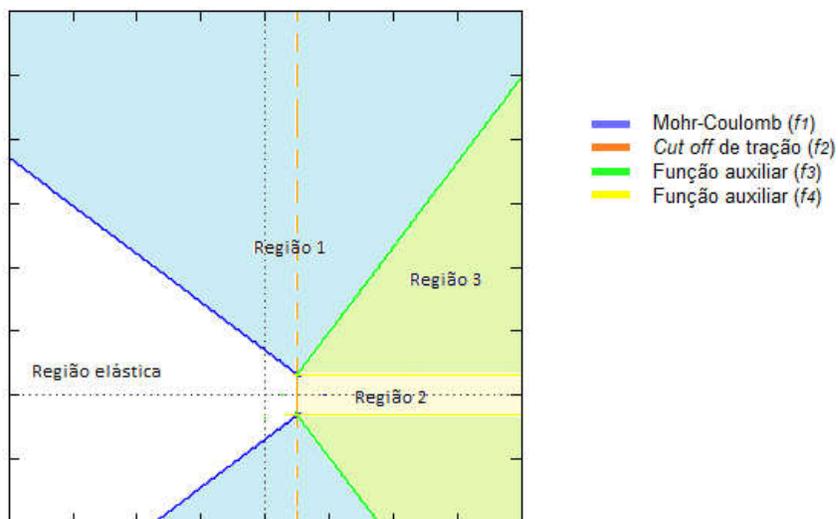


Figura 25. Regiões do algoritmo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com *cut-off* na tração e superfície de fechamento na compressão

O quadro 2 esquematiza o algoritmo de integração de tensões do tipo preditor-corretor para o modelo de Mohr-Coulomb com superfície de cut-off na tração e dano bilinear.

Entrada: $\sigma_i, \tau_i, \phi, \mathbf{c}, \mathbf{D}^E, \sigma_T, \Delta \varepsilon_N, \Delta \varepsilon_S, \varepsilon_{N0}, \varepsilon_{S0}, \varepsilon_{NR}, \varepsilon_{SR}$.

- Calcular $\eta_N, \eta_S, \bar{D}_N, \bar{D}_S, D_N$ e D_S (Equações 48 a 50);
- A partir dos valores de D , fazer $K_N = (1 - D_N) K_N$ e $K_S = (1 - D_S) K_S$;
- Calcular as tensões preditoras σ_{i+1}^{TRIAL} e τ_{i+1}^{TRIAL} (Eq.(35));
- Calcular os as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 (Eq. (22), (23), (41) e (42) para σ_{i+1}^{TRIAL} e τ_{i+1}^{TRIAL} ;
 - Se $f_1 \leq 0$ e $f_2 \leq 0$, região elástica:
Saída: $\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{TRIAL}$ e $\mathbf{D}^{EP} = \mathbf{D}^E$ (Eq. (38) e (40));
 - Se $f_1 > 0$ e $f_3 > 0$, região 1 (Eq. (50) e (51)):
Saída: $\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{i+1}^{TRIAL} \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_N \frac{\text{sig}(\tau) f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N t g^2 \phi} t g \phi \\ K_S \frac{\text{sig}(\tau) f_1^{TRIAL}}{K_S + K_N t g^2 \phi} \text{sig}(\tau) \end{Bmatrix}$ e
$$\mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} \frac{K_N K_S}{K_S + K_N t g^2 \phi} & -\frac{K_N K_S t g \phi \text{sig}(\tau)}{K_S + K_N t g^2 \phi} \\ \frac{K_N K_S t g \phi \text{sig}(\tau)}{K_S + K_N t g^2 \phi} & \frac{K_N K_S t g^2 \phi}{K_S + K_N t g^2 \phi} \end{bmatrix}$$
 - Se $f_2 > 0$ e $f_4 \leq 0$, região 2 (Eq. (55) e (56)):
Saída: $\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ \tau_{i+1}^{TRIAL} \end{Bmatrix}$ e
$$\mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_S \end{bmatrix}$$
 - Se $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 \leq 0$ e $f_4 > 0$, região 3 (Eq. (60) e (61)):
Saída: $\begin{Bmatrix} \sigma_{i+1} \\ \tau_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ c_0 - \sigma_T t g \phi \end{Bmatrix}$ e
$$\mathbf{D}^{EP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Saída: Atualizar deformações elástica e plástica (se houver).

Quadro 2. Algoritmo de integração de tensões para o modelo de Mohr-Coulomb com superfície de *cut-off* na tração e dano bilinear.

3.3 Implementação no programa ANSYS®

Os modelos apresentados nesse capítulo foram implementados no programa ANSYS utilizando as ferramentas de criação de rotinas de usuário (que podem ser encontradas sob o nome de UPF, do inglês *User Programmable Features*). Essas novas rotinas foram escritas em FORTRAN e uma vez compiladas geraram um novo arquivo executável do programa ANSYS.

As rotinas de usuário podem ser utilizadas para a implementação de novos elementos finitos e modelos constitutivos no programa ANSYS. Devem ser codificadas segundo as recomendações do manual do programa (Manual do ANSYS, 2016), seguindo formato de cabeçalho pré-estabelecido e atualizando obrigatoriamente algumas variáveis de saída requeridas para o correto funcionamento do programa. O Apêndice A descreve os procedimentos realizados para a incorporação da subrotina no programa ANSYS.

Nesta dissertação foram programados modelos do usuário do tipo zona coesiva na rotina USERCZM, empregada para a implementação de modelos constitutivos para os elementos de interface INTER202 e INTER203. O modelo constitutivo programado na USERCZM é chamado quando os comandos de entrada de dados do material TB e TBDATA forem utilizados no arquivo de entrada do modelo de elementos finitos a ser analisado.

As rotinas foram escritas conforme as formulações apresentadas neste capítulo e encontram-se reproduzidas nos Apêndices B e C.

4. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO

4.1 Exemplo 1: Validação do algoritmo de integração de tensões

Com a finalidade de validar o algoritmo de tensões apresentado na seção 3.1, foi verificada a integração de tensões do estado de tensões de um ponto, para cada região de retorno, quando este é submetido a um incremento de deformações. A Tabela 1. Propriedades do modelo constitutivo da junta de argamassa do exemplo 1 apresenta as propriedades elásticas da interface bem como os parâmetros das envoltórias de escoamento adotadas.

Parâmetro	Valor
K_N	90 MPa
K_S	90 MPa
σ_T	0,25 MPa
c	0,35 MPa
ϕ	37°
f_c	1,2 MPa
κ_p	0,002 mm
κ_m	0,015 mm

Tabela 1. Propriedades do modelo constitutivo da junta de argamassa do exemplo 1

A Tabela 2 apresenta, para cada região de retorno testada, o estado de tensões inicial (σ_i, τ_i) , o incremento de deformações imposto $(\Delta\varepsilon_{Ni}, \Delta\varepsilon_{Si})$ e o estado de tensões final $(\sigma_{i+1}, \tau_{i+1})$ retornado pelo algoritmo de tensões. Para o algoritmo de Newton-Raphson da região 4, empregou-se um $\Delta\kappa_0 = 10^{-8}$ e tolerância de 10^{-8} . Os incrementos de deformação foram escolhidos de modo que as tensões predictoras ativasse cada uma das quatro regiões de retorno possíveis para validação.

Variável	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
σ_i (MPa)	-0,25	0	0	0
τ_i (MPa)	0	0	0	0
$\Delta\varepsilon_{Ni}$	0,02	0,02	0,02	-0,008
$\Delta\varepsilon_{Si}$	0,025	0,001	0,02	0,007
σ_{i+1} (MPa)	0,075420	0,25	0,25	-0,691787
τ_{i+1} (MPa)	0,293167	0,09	0,161611	0,548833
κ	-	-	-	0,00095475

Tabela 2. Incremento de tensões e estado de tensões inicial e final para cada região

As figuras Figura 26 a Figura 29 mostram o caminho das tensões durante o algoritmo de preditor-corretor para cada região de retorno.

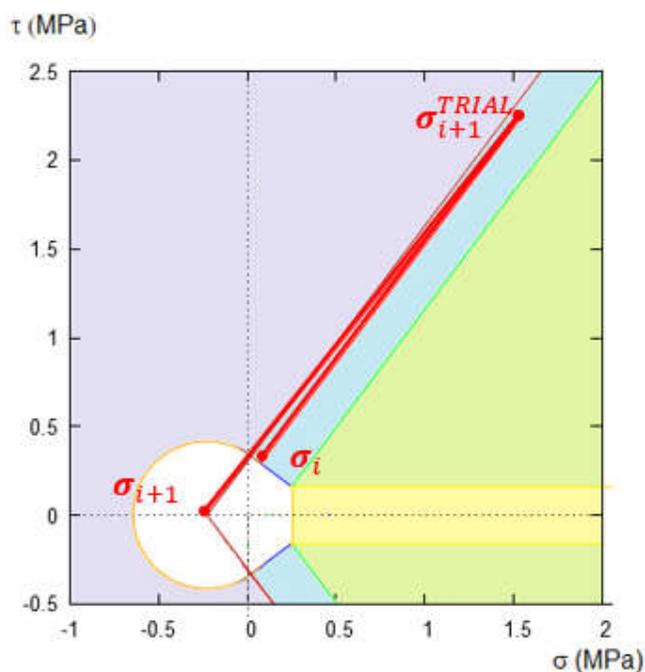


Figura 26. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 1 do exemplo 1

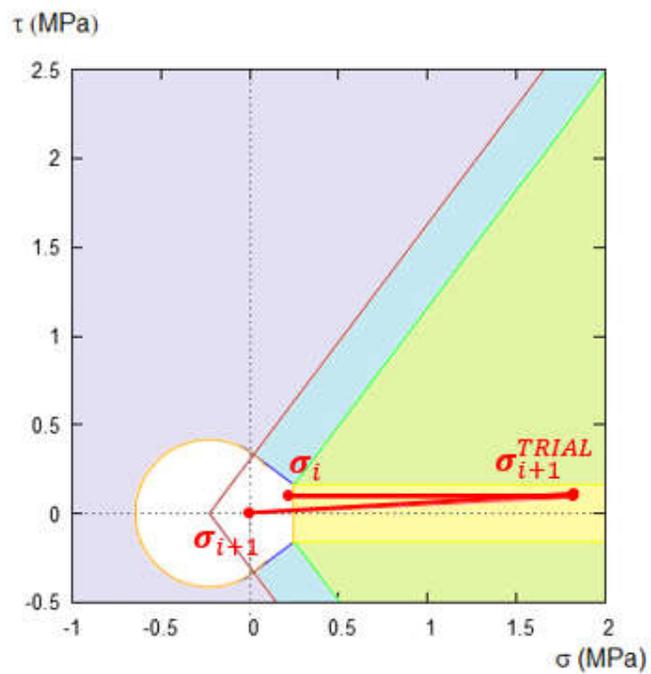


Figura 27. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 2 do exemplo 1

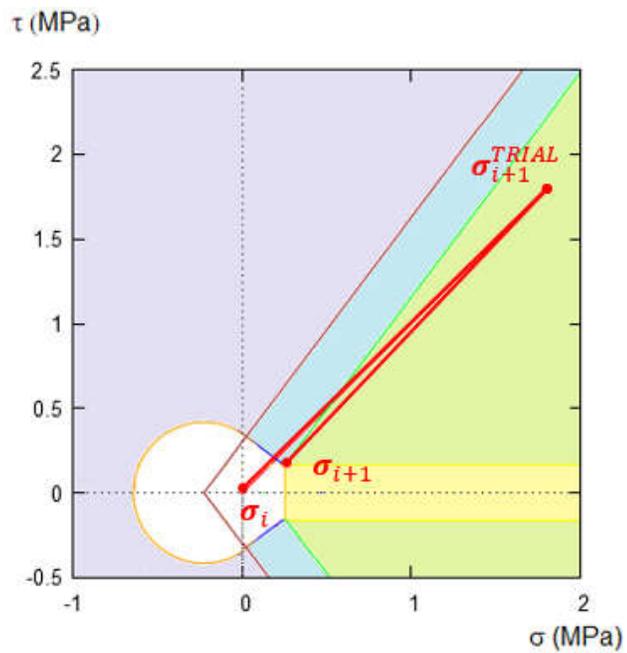


Figura 28. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 3 do exemplo 1

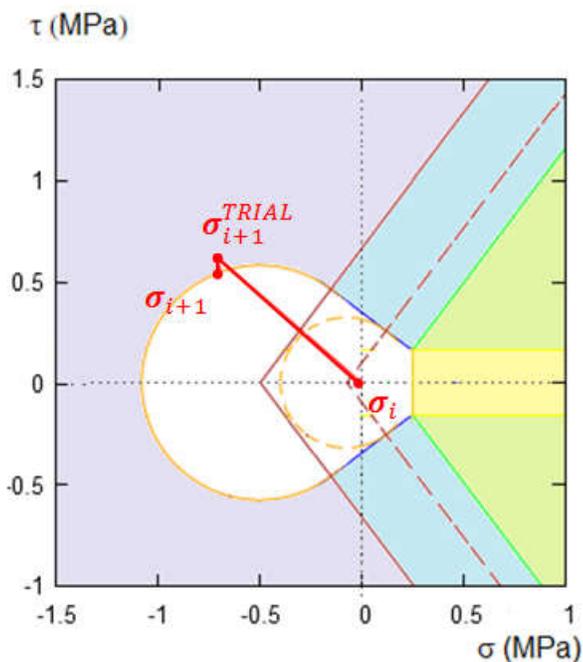


Figura 29. Tensão inicial, tensão preditora e tensão corrigida para a região 4 do exemplo 1

Nota-se que, para a região 4 (Figura 29), a superfície de fechamento de compressão aumenta de tamanho na iteração $i+1$ por conta do efeito do endurecimento (tamanho inicial representado pela linha tracejada). Percebe-se que não só a superfície aumenta de tamanho, mas também a região de plastificação 1 (em azul) devido à mudança na posição do centro da superfície.

A Tabela 3 apresenta os valores de tensão e a evolução da envoltória durante as iterações do método de Newton-Raphson. As iterações 0 e 7 são as plotadas Figura 29.

Iteração	r	σ_M	σ_{i+1}	τ_{i+1}	$\Delta\kappa$
0	0,32573731	-0,07679251	$\sigma^{TRIAL} = -0,720$	$\tau^{TRIAL} = -0,630$	$1,00 \times 10^{-8}$
1	0,34666911	-0,11157362	-0,71916282	-0,62913314	$5,31 \times 10^{-6}$
2	0,42457542	-0,24102588	-0,70875252	-0,61520607	$1,13 \times 10^{-4}$
3	0,51519779	-0,39160763	-0,69594183	-0,58384593	$4,53 \times 10^{-4}$
4	0,56563031	-0,47540835	-0,69227496	-0,55858801	$8,03 \times 10^{-4}$
5	0,57978812	-0,49893353	-0,69181661	-0,54968237	$9,41 \times 10^{-4}$
6	0,58103221	-0,50100075	-0,69178712	-0,54883938	$9,55 \times 10^{-4}$
7	0,58104226	-0,50101746	-0,69178689	-0,54883252	$9,55 \times 10^{-4}$

Tabela 3. Convergência dos valores de tensão pelo método de Newton Raphson na região 4 do exemplo 1

A fim de validar a implementação do método iterativo foi verificada a convergência quadrática do algoritmo para a variável $\Delta\kappa$.

Conhecendo as soluções parciais $\Delta\kappa^i$ e a solução convergida $\overline{\Delta\kappa}$, a taxa de convergência fornece uma garantia de redução da distância $|\Delta\kappa^{i+1} - \overline{\Delta\kappa}|$ em relação a $|\Delta\kappa^i - \overline{\Delta\kappa}|$ quando i é suficientemente grande. Assim sendo, podemos dizer que o método converge segundo uma taxa de convergência p quando

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\Delta\kappa^{i+1} - \overline{\Delta\kappa}|}{|\Delta\kappa^i - \overline{\Delta\kappa}|^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\text{erro}^{i+1}|}{|\text{erro}^i|^p} = c \quad (80)$$

onde c é uma constante. Assim, ao traçar o gráfico em escala logarítmica $|\text{erro}^i| \times |\text{erro}^{i+1}|$, chega-se a uma reta, cujo módulo do coeficiente angular corresponde à taxa de convergência p . Para o método de Newton-Raphson, espera-se uma taxa de convergência quadrática com $p = 2$.

A partir dos resultados da presente validação, assumindo como solução convergida $\overline{\Delta\kappa}$ o valor $9.547890767435424 \times 10^{-4}$ calculado numericamente para uma tolerância de 10^{-16} , o gráfico em escala logarítmica $|\text{erro}^i| \times |\text{erro}^{i+1}|$ foi traçado a partir dos dados de cada iteração i , como mostrado na Figura 30. Nota-se que a curva

resultante é linear, o que comprova a convergência do método segundo a Eq. (80). Por mínimos quadrados, pode-se encontrar a equação da reta plotada, obtendo-se como módulo do coeficiente angular o valor $p = 2.03833$, comprovando que a taxa de convergência é quadrática.

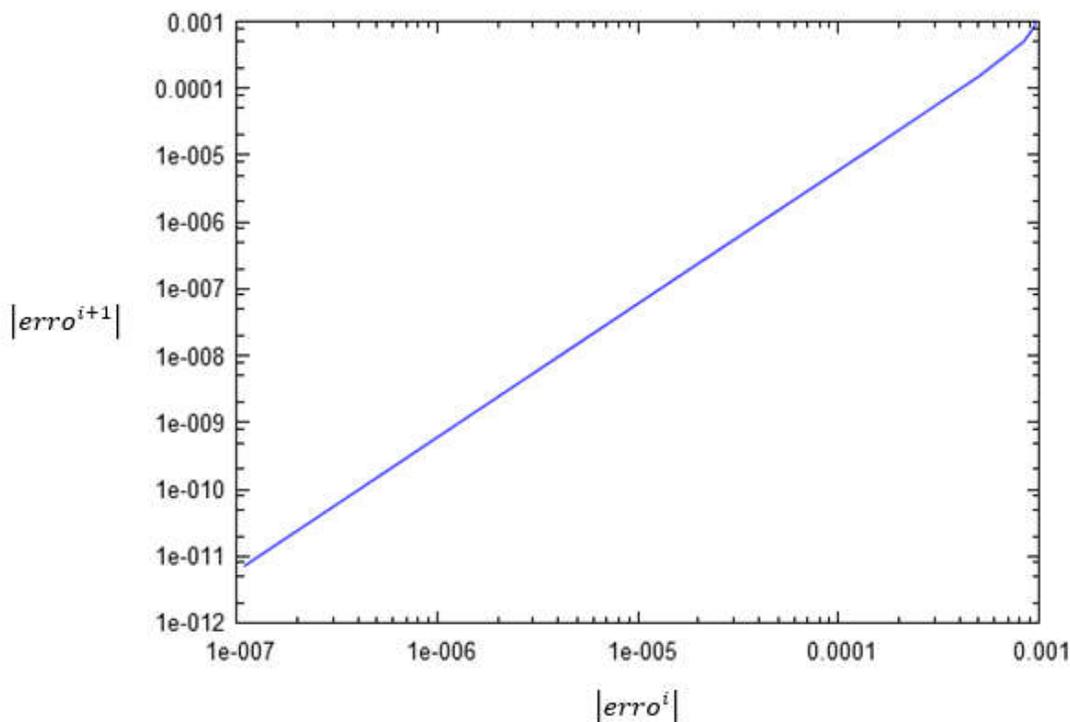


Figura 30. Validação da convergência quadrática em $\Delta\kappa$

4.2 Exemplo 2: Bloco deslizante

Para avaliar o comportamento do elemento finito de interface do programa ANSYS, e para servir de modelo base para comparação com o modelo proposto posteriormente nesta dissertação, foi criado um modelo de validação de dois blocos, um sobre o outro, com duas pressões aplicadas no bloco superior: uma em sua face superior, empurrando-o contra o bloco inferior, e uma em sua lateral, fazendo com este bloco deslize sobre o outro. Como serão avaliados os efeitos no plano, foram utilizados na modelagem apenas elementos bidimensionais. Para os blocos foi escolhido o elemento quadrangular PLANE182.

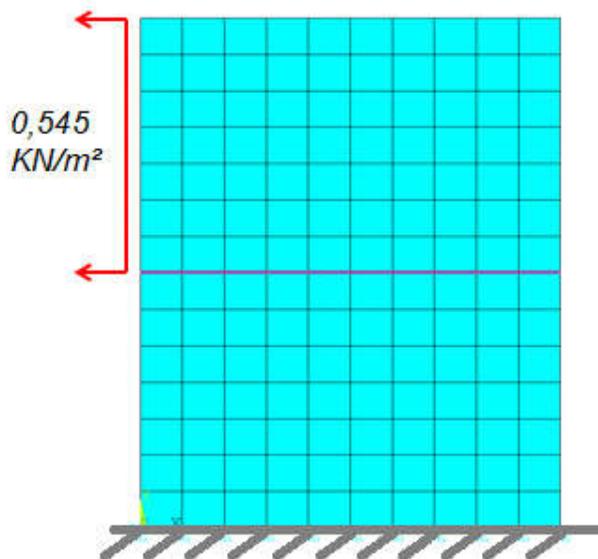


Figura 31. Modelo do exemplo 2

As dimensões dos blocos foram extraídas de Holanda Jr. (2002), assim como suas propriedades. No entanto, o valor do módulo de Young do bloco foi majorado para que a energia de deformação do sistema seja gasta apenas pela interface, o elemento a qual se deseja avaliar, e não com a deformação do bloco.

Parâmetro	Valor
Altura	6,37 cm
Comprimento	9,76 cm
Módulo de Young	10554 MPa x 10 ⁶
Coefficiente de Poisson	0,1

Tabela 4. Características dos blocos modelados

Os parâmetros das interfaces utilizados em cada um dos modelos podem ser vistos nas tabelas a seguir. Foi considerado para esta validação $K_N = K_S$, apesar de ser observado que K_S chega a cerca de metade do valor de K_N (Lourenço, 1997). Esta decisão foi tomada para melhor representação visual do algoritmo de retorno, cuja

trajetória é perpendicular à superfície de escoamento plotada no plano $\sigma \times \tau$ se $K_N = K_S$.

Parâmetro	Valor
K_N	90 MPa
K_S	90 MPa
σ_T	0,25 MPa
c	0,35 MPa
ϕ	37°
ε_{N_0}	0,002 mm
ε_{S_0}	0,002 mm
ε_{N_R}	0,015 mm
ε_{S_R}	0,015 mm

Tabela 5. Características das interfaces modeladas com modelo de dano

Parâmetro	Valor
K_N	90 MPa
K_S	90 MPa
σ_T	0,25 MPa
c	0,35 MPa
ϕ	37°
f_c	12 MPa
κ_p	0,002 mm
κ_m	0,015 mm

Tabela 6. Características das interfaces modeladas com modelo de encruamento

Os resultados obtidos com a rotina de usuário de dano, criada a partir da formulação descrita na seção 2.2, serão confrontados com aqueles obtidos com o elemento de interface bilinear padrão do ANSYS. Ressalta-se que o modelo de material do ANSYS é elástico com dano e, portanto, não considera a presença de

deformação plástica. Já para o caso do modelo com superfície de fechamento, os resultados serão somente apresentados, considerando que não há modelos similares inicialmente no programa.

Para o modelo de dano foram consideradas tensão e deformações iniciais nulas e aplicação de uma carga lateral distribuída na face esquerda do bloco.

Parâmetro	userCZM	Interface padrão ANSYS
Q	-0,3 KN/m ²	-0,3 KN/m ²
D_N	0	0
D_S	0	0
σ_{i+1}	0 MPa	0 MPa
τ_{i+1}	-0,1958 MPa	-0,1950 MPa
ε_N	0 mm	0 mm
ε_S	-0,0021755 mm	-0,0021701 mm
Erro no deslocamento	0,4103%	

Tabela 7. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0$)

Parâmetro	userCZM	Interface padrão ANSYS
q	-0,4125 KN/m ²	-0,4125 KN/m ²
D_N	0	0
D_S	0,50194	0,50067
σ_{i+1}	0 Mpa	0 MPa
τ_{i+1}	-0,2692 Mpa	-0,2692 MPa
ε_N	0 mm	0 mm
ε_S	-0,0060061 mm	-0,0059902 mm
Erro no deslocamento	0,2537%	

Tabela 8. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0,5$)

Parâmetro	userCZM	Interface padrão ANSYS
Q	-0,5225 KN/m ²	-0,5225 KN/m ²
D_N	0	0
D_S	0,95119	0,94667
σ_{i+1}	0 MPa	0 MPa
τ_{i+1}	-0,3410 MPa	-0,3410 MPa
ε_N	0 mm	0 mm
ε_S	-0,077626 mm	-0,071045 mm
Erro no deslocamento	0,4775%	

Tabela 9. Características das interfaces modeladas com modelo de dano ($D_k = 0,95$)

Em todos os resultados apresentados acima, ocorre apenas deformação elástica, uma vez que o modelo padrão do ANSYS não calcula deformação plástica para interface. A diferença pode ser observada entre os dois modelos quando se força a interface a plastificar antes de o dano atingir seu valor total. Para que isso ocorresse, no exemplo a seguir, o valor da coesão foi reduzido para 0,25 MPa para que isto ocorresse sem que fosse ativado primeiro o dano total. A carga utilizada foi a mesma da tabela (6) para 50% de dano.

Parâmetro	Resultados userCZM
Q	-0,4125 KN/m ²
D_N	0
D_S	0,50194
σ_{i+1}	-0,0255 MPa
τ_{i+1}	-0,2692 MPa
ε_N	0 mm
ε_S	-0,0063822 mm
ε_N^{PL}	0,0002834 mm
ε_S^{PL}	-0,0003761 mm

Tabela 10. Características das interfaces modeladas com modelo de dano (plastificação)

Os resultados do teste apresentado na tabela 8 foram plotados no plano $\sigma \times \tau$ e dispostos na Figura 32.

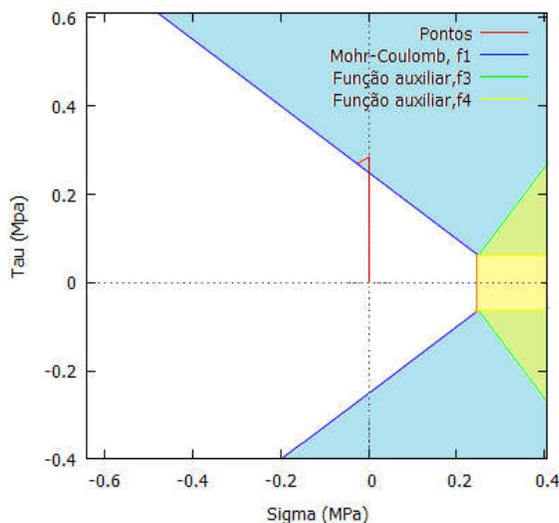


Figura 32. Retorno para caso de plastificação com o modelo de dano.

Para o caso do modelo com superfície de fechamento, considerou-se tensão e deformações iniciais nulas e aplicação de uma carga lateral distribuída na face esquerda do bloco superior no valor de $-0,55 \text{ KN/m}^2$. O erro corresponde ao valor da função de escoamento se afastou do seu valor esperado (zero). Dados de saída e entrada são apresentados na tabela 11.

Graficamente, os resultados são expostos na Figura 33. A deformada deste exemplo está exposta na Figura 34, aumentada em 500 vezes.

Parâmetro	Resultados userCZM_Cap
Q	-0,545 KN/m ²
ε_N	0 mm
ε_S	-0,0040592 mm
$\bar{\sigma}_i$	-0,4 MPa
$\bar{\sigma}_{i+1}$	-0,69246701 MPa
σ_{Mi}	-0,07521316 MPa
σ_{Mi+1}	-0,25779792 MPa
r_i	0,32478684
r_{i+1}	0,43466909
$\Delta\gamma$	0,00015971
σ_{i+1}	-0,007190 MPa
τ_{i+1}	-0,35516 MPa
$\varepsilon_{i+1}^{P,N}$	-0,00011299 mm
$\varepsilon_{i+1}^{P,S}$	0 mm
Iterações Newton-Raphson	6
Erro	$2,35645 \times 10^{-9}$

Tabela 11. Interfaces modeladas com modelo de superfície de fechamento

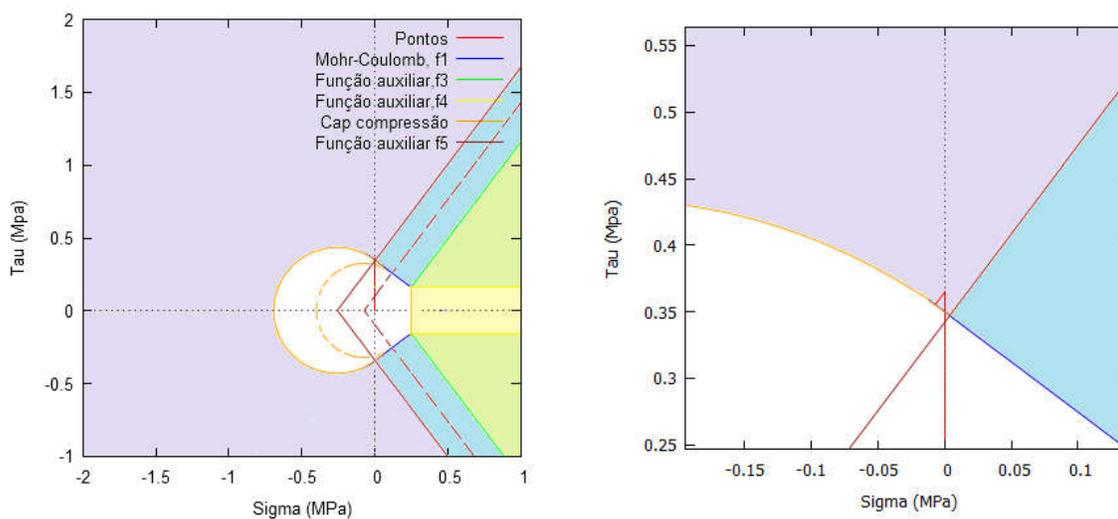


Figura 33. Exemplo do modelo de Mohr Coulomb com endurecimento

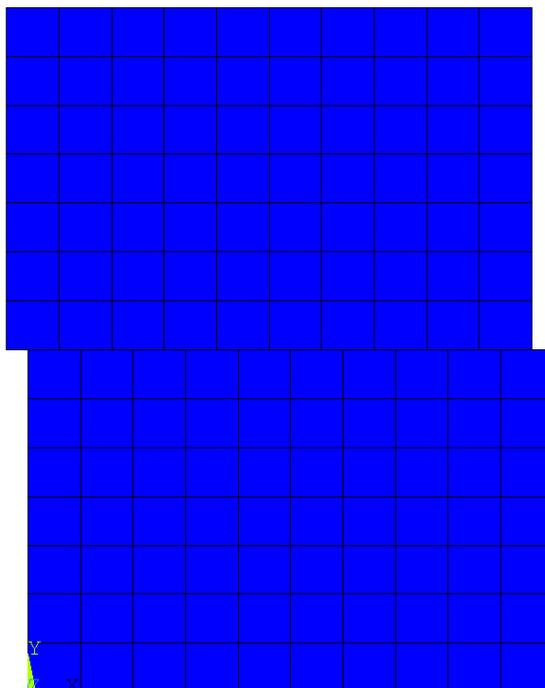


Figura 34. Deformada do exemplo 2

4.3 Exemplo 3: Painel de alvenaria

Nesta seção os modelos constitutivos implementados serão testados num painel completo, baseado na configuração testada por Lourenço (1996). A partir de tal configuração, três modelos distintos em termos de nível de detalhamento serão elaborados e comparados (Figura 35).

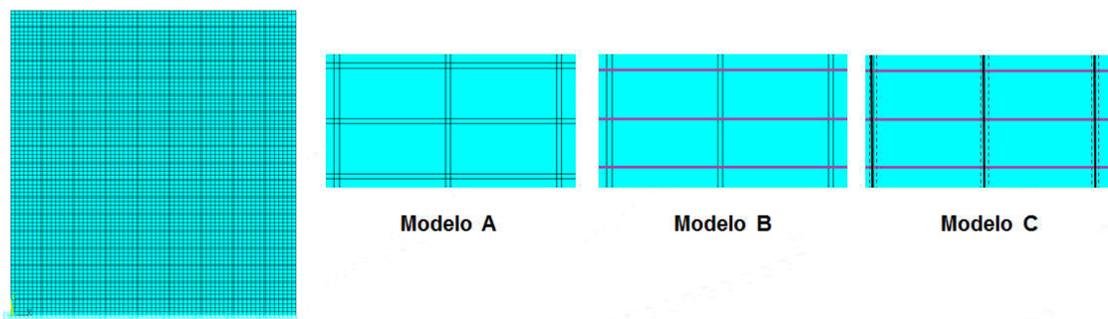


Figura 35. Modelos elaborados para o painel de alvenaria

- Modelo A - Modelagem contínua detalhada, onde as juntas serão representadas como elementos contínuos, porém cada material é modelado com suas respectivas propriedades;
- Modelo B - Modelagem das juntas horizontais com elementos de interface e Mohr Coulomb, porém as juntas verticais serão modeladas com elementos contínuos. A abordagem utilizada será a da micromodelagem simplificada, uma vez que o *software* não possui opções de elemento de interface com espessura;
- Modelo C - Modelagem das juntas horizontais com elementos de interface e Mohr Coulomb, porém o efeito das juntas verticais será contabilizado a partir da técnica de homogeneização proposta por Salamon (1968).

Além disso, um teste de malha será realizado primeiramente nos modelos A e B. Os resultados do teste serão aplicados em todos os modelos. Os dois casos de carga que serão aqui aplicados serão: uma carga vertical distribuída no topo do painel, de valor 770 kN (Figura 36 (a)) e uma carga horizontal pontual no valor de 250 kN aplicada no canto superior esquerdo do painel (Figura 36 (b)). Nestes modelos, foi considerado estado plano de tensões e as dimensões no plano (x,y) dos blocos é 210 mm x 100 mm e as juntas, tanto horizontais como verticais, foram consideradas como de espessura 10 mm.

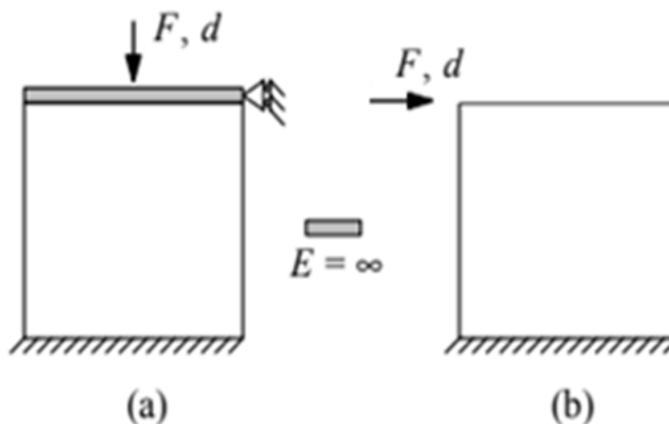


Figura 36. Casos de carga considerados (Lourenço, 1996)

Legenda: (a) carga horizontal pontual; (b) carga vertical distribuída.

As propriedades de deformabilidade e de resistência dos componentes da alvenaria dadas como dado de entrada para o programa de elementos finitos para cada situação estão dispostas nas tabelas Tabela 12 a Tabela 14. Os valores referentes às juntas valem tanto para as juntas horizontais como verticais. As propriedades de deformabilidade foram extraídas de Lourenço (1996), com exceção das propriedades homogeneizadas, que foram calculadas segundo Salamon (1968). Enquanto as propriedades de resistência também extraídas de Lourenço (1996), as relativas ao modelo com dano tiveram de ser calculadas a partir da energia de Griffith utilizando a expressão:

Parâmetro	Valor
E_x bloco	20000 N/mm ²
ν_{xy} bloco	0,15
E_x junta	2000 N/mm ²
ν_{xy} junta	0,125
k_n junta	222 N/mm ²
k_s junta	99 N/mm ²

Tabela 12. Propriedades de deformabilidade

Parâmetro	Valor
E_x unidade	14399 N/mm ²
E_y unidade	19182 N/mm ²
E_z unidade	19182 N/mm ²
ν_{xy} unidade	0,126
ν_{yz} unidade	0,125
ν_{xz} unidade	0,126

Tabela 13. Propriedades homogeneizadas

Parâmetro	Valor
σ_T	0,25 MPa
c	0,6 MPa
ϕ	37°
κ_p	26 MPa
κ_m	0,09 mm
σ_T	0,49 mm

Tabela 14. Propriedades de resistência

Os elementos utilizados nesta etapa foram o elemento quadrangular PLANE182 para os blocos e para as juntas no caso dos modelos contínuos e o elemento coesivo INTER202 para as juntas modeladas como interface.

Uma simplificação que foi feita na modelagem foi a consideração de alinhamento das juntas verticais, como demonstrado na Figura 37.

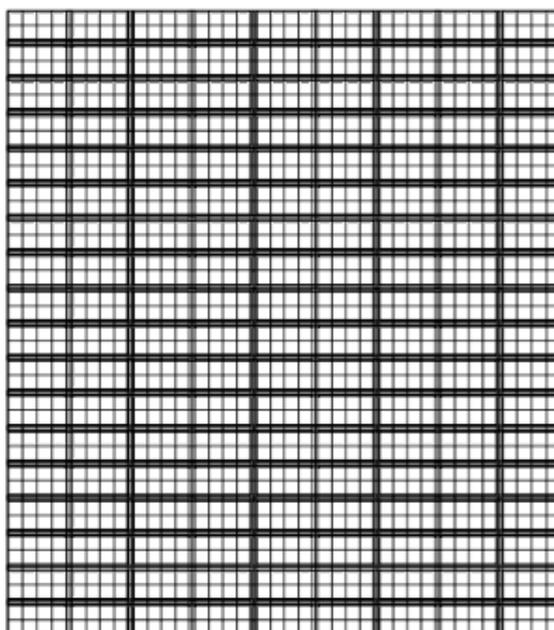


Figura 37. Modelo elaborado com alinhamento das juntas verticais

4.3.1 Teste de malha

Para o teste de malha foram utilizados elementos de lado 65 mm (Figura 38 (a)), 32,5 mm (Figura 38 (b)) e 16,25 mm (Figura 38 (c)). Estes três valores foram escolhidos de modo a possibilitar a divisão da parede em número exato de elementos regulares. Em todos os casos, o tamanho dos elementos representando as juntas foi fixado como 10 mm, a própria espessura da junta.

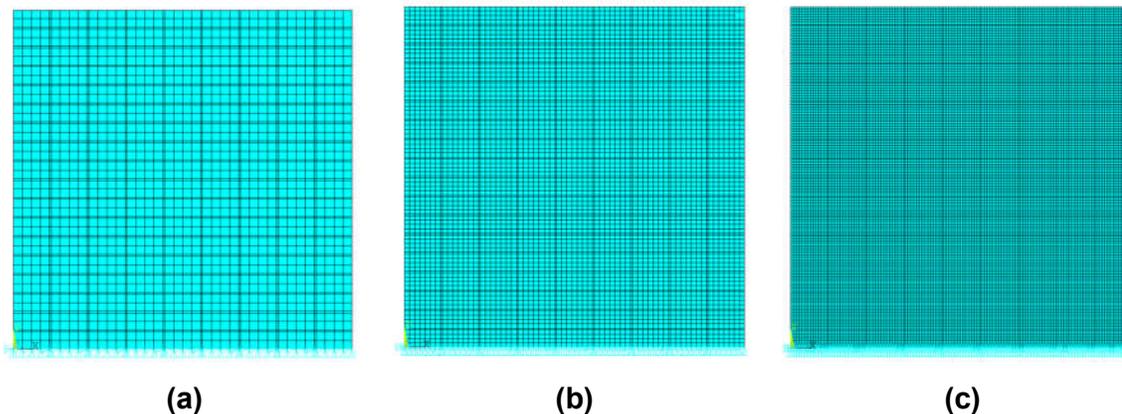


Figura 38. Estudo de malha para o modelo A

Legenda: lado do elemento (a) 65 mm; (b) 32,5 mm; (c) 16,25 mm.

Os resultados de deslocamento foram comparados para os três modelos para o caso de carga compressiva vertical, computando também o tempo de CPU gasto para cada uma das análises. O deslocamento medido foi o total do painel. Esses dados estão organizados na tabela 15. O ganho percentual foi calculado em relação aos valores de deslocamento e tempo de CPU encontrados utilizando como referência a malha menos refinada.

	Malha (1)	Malha (2)	Malha (3)
Tamanho do elemento	65 x 65 mm	32,5 x 32,5 mm	16,25 x 16,25 mm
Número de Elementos	2332	6319	17875
Deslocamento (mm)	1,34877	1,35116	1,35418
Diferença no deslocamento (%)	0	0,1769	0,3995
Tempo de processamento (s)	3,40082145	4,77363038	7,73764992
Diferença no tempo de processamento (%)	0	40,36697	127,5229

Tabela 15. Resultados do estudo de malha para o modelo A

Nota-se que não há muito ganho no valor do deslocamento com o aumento do refino, ocorrendo mudanças apenas na terceira casa decimal. O tempo de

processamento, no entanto, mais do que dobra quando a malha possui elementos quatro vezes menores. Entretanto a diferença no tempo não chega a ser um empecilho neste problema em questão, por conta de sua pequena escala e relativa simplicidade. Isso pode ser visto na tabela a seguir, com os resultados para esse mesmo estudo de malha para o modelo B, mais complexo do que o modelo A uma vez que inclui o modelo de Mohr Coulomb com superfície de fechamento para as juntas horizontais.

	Malha (1)	Malha (2)	Malha (3)
Tamanho do elemento	65 x 65 mm	32,5 x 32,5 mm	16,25 x 16,25 mm
Número de Elementos	2332	6319	17875
Deslocamento (mm)	1,35823	1,36062	1,36287
Diferença no deslocamento (%)	0	0,175964	0,341621
Tempo de processamento (s)	11,2320719	21,0757349	48,8595134
Diferença no tempo de processamento (%)	0	87,63889	335

Tabela 16. Resultados do estudo de malha para o modelo B

Como pode ser visto o tempo de processamento da malha mais refinada para este modelo mais complexo chega a ser mais de quatro vezes maior, chegando quase a um minuto. Embora ainda um exemplo em pequena escala, o resultado exemplifica a impraticabilidade de malhas com excesso de refino.

Quanto ao resultado de deslocamento, percebe-se que houve pouca diferença com o aumento do refino, todos da ordem de 10^{-3} mm. Desta forma, a malha que será adotada nos testes das seções seguintes será a intermediária, de elemento 32,5 x 32,5 mm.

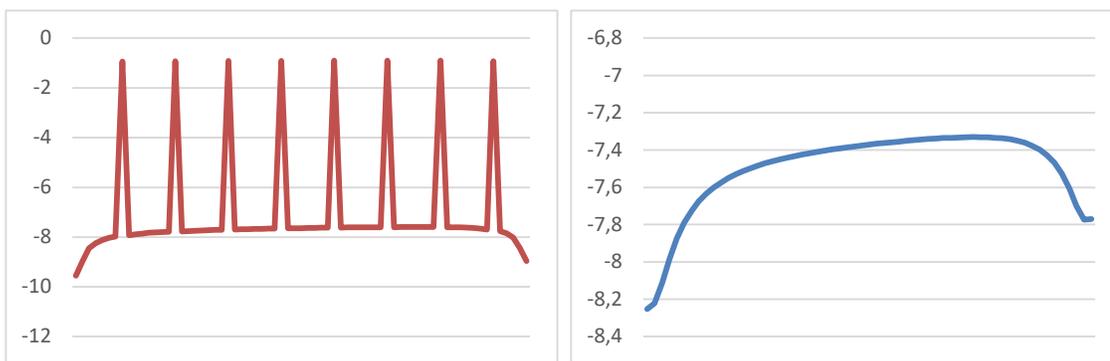
4.3.2 Comparação entre os modelos

Sem utilizar o modelo de Mohr Coulomb com superfície de fechamento, Lourenço (1996), obteve como resultado de tensão para este exemplo aproximadamente -7,75 MPa para o bloco, -7,75 MPa para as juntas horizontais e -1 MPa para as juntas verticais. Para o deslocamento total do painel, Lourenço (1996) obteve 1,35 mm para o modelo contínuo e 1,33 mm para o modelo com elementos de interface. Os quatro modelos aqui proposto foram analisados e confrontados com esses resultados. A resposta de cada um dos modelos está descrita a seguir. Os valores de tensão foram retirados da primeira fiada, no meio de um bloco no meio do painel.

Modelo	A	B	C
Tensão σ_y no bloco (MPa)	-7,4868	-7,5104	-7,6306
Tensão τ_{xy} no bloco (MPa)	-0,0685	-0,0684	-0,0402
Tensão σ_y na junta horizontal (MPa)	-7,5835	-7,6394	-7,3720
Tensão τ_{xy} na junta horizontal (MPa)	-0,0382	-0,0382	-0,0421
Tensão σ_y na junta vertical (MPa)	-0,87654	-0,87577	-0,91329
Tensão τ_{xy} na junta vertical (MPa)	-0,0857	-0,0856	-0,0402
Deslocamento no topo (mm)	1,35116	1,32722	1,33319

Tabela 17. Resultados dos diferentes modelos para carga compressiva

Os resultados de tensão no bloco para o modelo C tiveram de ser pós-processados, uma vez que os resultados obtidos diretamente através da interface do ANSYS se referem ao material homogeneizado como um todo. Os resultados de tensão do modelo C também foram traçados numa linha horizontal e numa vertical que atravessa o painel e apresentado nas figuras a seguir. As tensões na horizontais foram tiradas do meio da primeira fiada (Figura 39 (a)) e da primeira junta (Figura 39 (b)), enquanto as tensões na vertical foram tiradas do meio do painel, passando pelos blocos (Figura 40 (a)) e pelas juntas verticais (Figura 40 (b)).

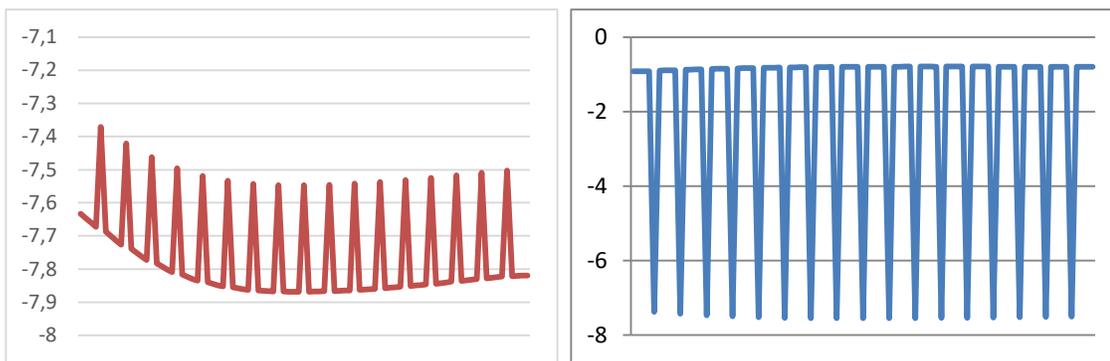


(a)

(b)

Figura 39. Tensões ao longo dos painéis (horizontal)

Legenda: (a) no meio dos blocos da primeira fiada; (b) na junta entre as duas primeiras fiadas.



(a)

(b)

Figura 40. Tensões ao longo dos painéis (vertical)

Legenda: (a) na faixa vertical no meio do painel; (b) na junta vertical. Altura cresce da esquerda para a direita.

Inicialmente, foi proposto um modelo onde tanto as juntas horizontais e verticais seriam modeladas com elementos de interface. Tal modelo, no entanto, acabou sendo descartado ao apresentar resultados não satisfatórios por conta da própria formulação do ANSYS que não descreve corretamente a interseção entre as juntas horizontais e verticais, calculando-as como independentes e atuando em planos diferentes, o que não ocorre na realidade.

Modelo	A	B	C
Tensão σ_y no bloco (MPa)	0,0008	0,0389	0,0379
Tensão τ_{xy} no bloco (MPa)	0,1565	0,0423	0,0398
Tensão σ_y na junta horizontal (MPa)	0,0004	0,25	0,25
Tensão τ_{xy} na junta horizontal (MPa)	0,1485	0,0327	0,0344
Tensão σ_y na junta vertical (MPa)	0,0023	0,0218	0,0337
Tensão τ_{xy} na junta vertical (MPa)	0,0646	0,0037	0,0398
Deslocamento no topo (mm)	0,25278	1,36079	1,44794

Tabela 18. Resultados dos diferentes modelos para carga lateral

Na Figura 41 são apresentadas as deformadas entre os modelos A e C. A representação da deformação foi aumentada em 100 vezes.

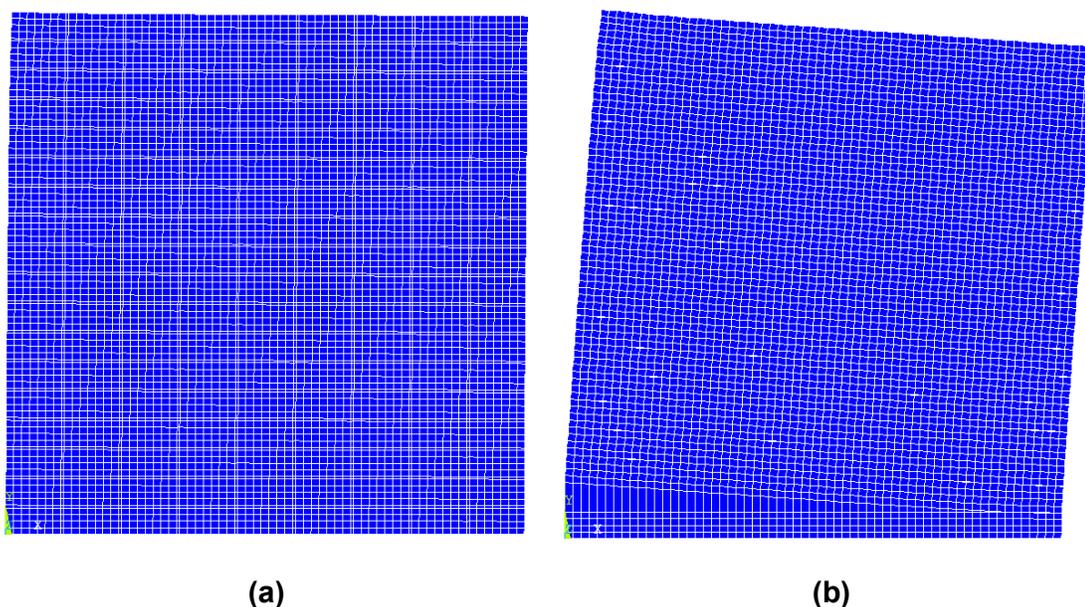
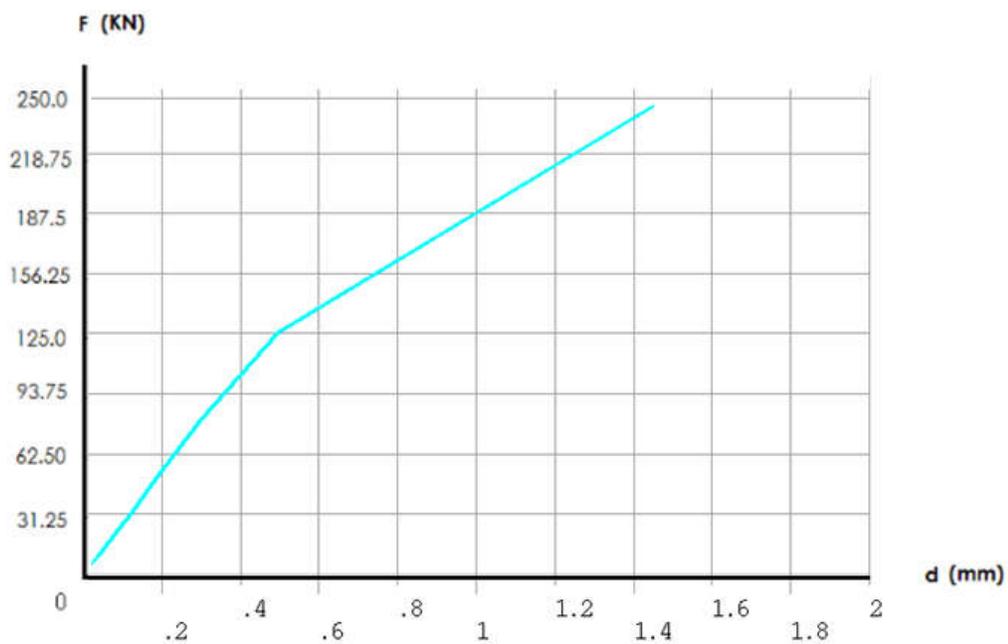


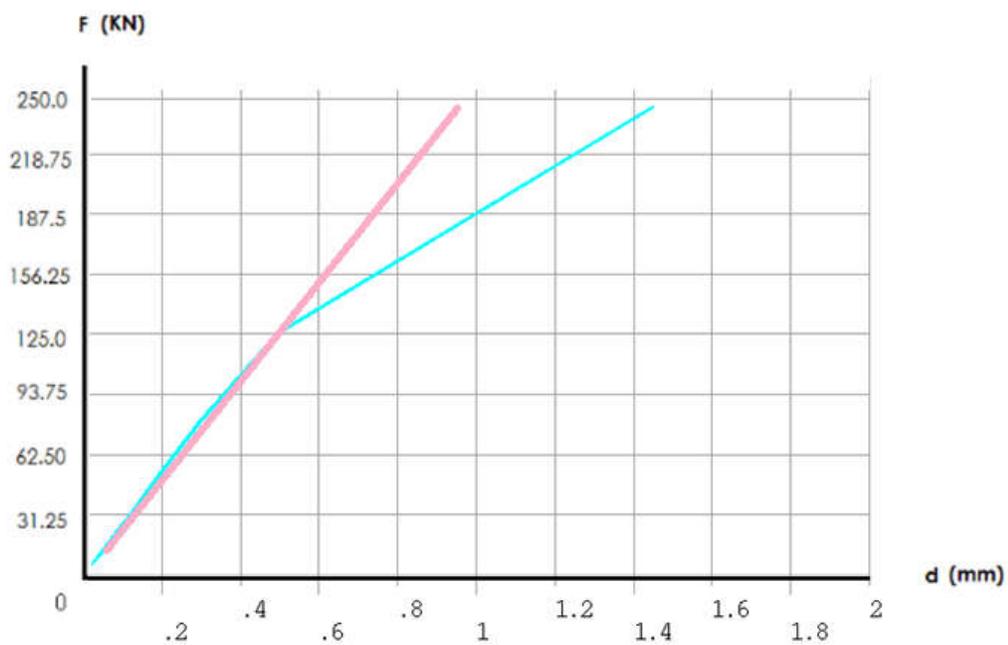
Figura 41. Comparação entre as deformadas

4.3.3 Comparação com modelo sem Mohr-Coulomb

A Figura 42 (a) a seguir mostra a curva força x deslocamento obtida com a aplicação de carga horizontal pontual no modelo C. Em seguida, para comparação, a mesma carga foi aplicada em modelo sem Mohr-Coulomb. Este efeito foi obtido considerando $c = 100$ e $\phi = 80^\circ$ para esta segunda análise do modelo C. A principal diferença que pode ser observada entre esta análise e uma considerando Mohr-Coulomb (Figura 42 (b)) é que com a formulação de Mohr-Coulomb implementada obtém-se resultados da fase plástica das juntas. Com os valores de deformação plástica sendo considerados, observa-se um incremento no valor dos deslocamentos de 30% que com a formulação que considera apenas a fase linear-elástica.



(a)



(b)

Figura 42. Gráfico força aplicada x deslocamento do painel

Legenda: (a) utilizando Mohr-Coulomb com superfície de fechamento; (b) comparativo com a curva obtida com o padrão do ANSYS (em roxo).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por ser um material compósito com diferentes propriedades a depender da direção analisada, a modelagem computacional da alvenaria difere sensivelmente da modelagem de estruturas em aço ou concreto. Durante a realização da revisão bibliográfica, verificou-se que a fissuração é mais frequente patologia da alvenaria, usualmente ocorrendo ao longo das juntas de argamassa por estas serem os planos mais fracos do compósito. A aplicação adequada do método dos elementos finitos para a análise destas estruturas deve incluir um modelo que inclua tal mecanismo básico de ruptura.

São várias as estratégias de modelagem com diferentes níveis de detalhamento. Com as ferramentas padrões do ANSYS (2017), é possível a elaboração de modelos em macroescala ou microescala simplificada, modelando as juntas como elementos contínuos ou homogeneizados. Estes modelos, apesar de terem suas vantagens e campos de aplicação no nível global da estrutura, possuem menor detalhamento em nível local por conta das simplificações empregadas em suas próprias formulações.

Foi proposto nesta dissertação um modelo mais robusto para modelagem das juntas, utilizando o modelo constitutivo de Mohr-Coulomb, um *cutoff* de tração e uma superfície de fechamento de compressão para representação do comportamento após o início da plastificação das juntas e endurecimento em microescala simplificada. O próprio programa ANSYS (2017) disponibiliza ferramentas para a inclusão de novos elementos ou materiais programados pelo usuário, sendo aqui utilizada para criar uma nova zona coesiva para modelagem das juntas a partir dos elementos de interface padrões do programa.

Algumas simplificações ainda foram consideradas, devido à complexidade do problema, como a não inclusão do efeito do amolecimento no modelo devido à diferença na formulação e na carência de resultados experimentais referentes a este trecho na literatura. Por conta disso, foi necessária a garantia do valor do multiplicador plástico ser sempre positivo, respeitando a lei de fluxo.

Observando os resultados, podemos perceber que a introdução de um modelo constitutivo para as juntas oferece uma ferramenta adicional para descrição do comportamento plástico do material. Os resultados de deslocamento e da fase elástica são compatíveis aos encontrados na literatura. Aliado a ensaios de laboratório das propriedades de deformabilidade dos componentes da alvenaria, este também pode ser utilizado para obtenção de parâmetros de resistência relativos ao encruamento e a superfície de fechamento das juntas para diferentes situações de carregamento.

Vale ressaltar que algumas limitações adicionais do programa escolhido foram encontradas na fase de testes relativas ao encontro entre as juntas verticais e horizontais.

Ainda há a possibilidade de se introduzir melhorias no modelo aqui implementado. Com a formulação do problema no espaço das deformações, é possível a implementação do trecho onde $\kappa_i > \kappa_p$, ou seja, onde se inicia o efeito do amolecimento, descrevendo assim o comportamento completo das juntas até o momento de sua falha. Com isso, estudos de convergência do algoritmo, principalmente nas regiões de mudança de inclinação no gráfico de κ precisam ser realizados.

Além disso, utilizando a mesma metodologia descrita no apêndice A, é viável a implementação de um elemento de interface com espessura, compatível com o modelo aqui criado, para utilização em análises em microescala detalhada, uma vez que a espessura da camada de argamassa é um dos principais parâmetros que regem a influência da argamassa nas propriedades do compósito como um todo. Uma adaptação das rotinas para que estas sejam compatíveis com elementos de interface tridimensionais também pode ser considerada como prosseguimento do estudo.

Quanto ao modelo de dano implementado, os próximos passos seriam a inclusão de diferentes variáveis de dano para situações de tração e compressão, tanto para tensão normal quanto para cisalhante, além de um parâmetro adicional que controla a influência dos modos I e II nos resultados, permitindo a penalidade sobre a rigidez de ser aplicada separadamente e os resultados de cada modo serem observados individualmente.

REFERÊNCIAS

ABNT. *NBR 13276: Argamassa para assentamento e revestimento de paredes e tetos - Determinação do índice de consistência*. Rio de Janeiro, 2016.

ABNT. *NBR 13279: Argamassa para assentamento e revestimento de paredes e tetos - Determinação da resistência à tração na flexão e à compressão*. Rio de Janeiro, 2005.

ABNT. *NBR 14321: Paredes de alvenaria estrutural – Determinação da resistência ao cisalhamento*. Rio de Janeiro, 2016.

ABNT. *NBR 15270-1: Componentes cerâmicos Parte 1: Blocos cerâmicos para alvenaria de vedação — Terminologia e requisitos*. Rio de Janeiro, 2005.

ABNT. *NBR 15270-2: Componentes cerâmicos Parte 2: Blocos cerâmicos para alvenaria estrutural – Terminologia e requisitos*. Rio de Janeiro, 2005

ABNT. *NBR 15270-3: Componentes cerâmicos Parte 3: Blocos cerâmicos para alvenaria estrutural e de vedação – Métodos de ensaio*. Rio de Janeiro, 2005.

ABNT. *NBR 15812-1: Alvenaria Estrutural – Blocos Cerâmicos. Parte 1: Projetos*. Rio de Janeiro, 2010.

ABNT. *NBR 15961-1: Alvenaria Estrutural – Blocos de Concreto. Parte 1: Projeto*. Rio de Janeiro, 2011.

ABNT. *NBR 16522: Alvenaria de blocos de concreto – Métodos de ensaio*. Rio de Janeiro, 2016.

ANSYS - Swanson Analysis Systems, 2016 SAS IP, Inc. Southpoint, 2600 ANSYS Drive, Canonsburg, PA 15317. Release 17.2, ANSYS Academic Research Mechanical, 2016.

ATKINSON, R.H., AMADEI, B.P., SAEB, S., STURE, S. Response of masonry bed joints in direct shear, *J. Struc. Engrg.*, ASCE, v. 115 (9), pp. 2276-2296, 1989.

BARRAZA, J. A. C. *Numerical model for nonlinear analysis of masonry walls*. RWTH Aachen, 2012.

BARRETO, A. S. Análise numérica de painéis de alvenaria estrutural utilizando técnica de homogeneização. Dissertação (Mestrado), Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, 148 pp, 2002.

De BELLIS, M. L. *Multi-scale techniques for masonry structures*. Master's thesis, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, 2010.

BERGAMI, A. V. *Implementation and experimental verification of models for nonlinear analysis of masonry infilled RC frames*. Tese (PhD), Università degli studi ROMA TER, 2007.

CHEN, W. F., HAN, D. J. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988, 606pp.

DIANA FEA BV, DIANA-10.0 User's Manual - Material Library, First ed. 2015.

DICKEY, W.L.; SCHNEIDER, R.R. *Reinforced masonry design*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1994.

GALLEGUILLOS, M., VALENZUELA, C. *Estudio experimental de muros de albañilería confinada a escala natural sometidos a carga cíclica*. La Serena, Chile, Universidad de La Serena. 2009.

GAMBAROTTA, L., LAGOMARSINO, S. *Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its application*. Earthquake Eng. Str. Dyn. v 26, pp 423–439. 1997.

GIAMBANCO, G., RIZZO, S., SPALLINO, R. Numerical analysis of masonry structures via interface models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* v 190, pp 6493-6511. 2001.

GOMES, I. R. *Simulação numérica do ensaio de compressão de prismas de alvenaria pelo método dos elementos finitos com comportamento de interface*. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 182 p, 2001.

HENDRY, A.W. *Structural Brickwork*. London, The Macmillan Press Ltd. 1981.

HOLANDA JR., O. G. *Influência de recalques em edifícios de alvenaria estrutural*. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2002. 224 p.

JUSTE, A. E. *Estudo da resistência e da deformabilidade da alvenaria de blocos de concreto submetida a esforços de compressão*. São Carlos. 229p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 2001

LOFTI, H.R.; SHING, P.B. *Interface model applied to fracture of masonry structures*. J. Struct. Eng., 120 (1), pp. 63-81. 1994.

LOURENÇO, P.B. *Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and applications*. Delft University. of Technology. 1994.

LOURENÇO, P.B; ROTS, J.G.; BLAAUWENDRAAD, J. Two approaches for the analysis of masonry structures: micro and micro-modeling. *HERON*, v. 40, n. 4, p. 313-340, 1995.

LOURENÇO, P.B. *Computational strategies for masonry structures*. Tese (Doutorado), Delft University of Technology, 1996.

LOURENÇO, P.B. Computational strategies for masonry structures: Multi-scale modeling, dynamics, engineering applications and other challenges. *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, SEMNI 2013, Bilbao, Spain. 2013.

MASSART, T.J. *Multi-scale modeling of damage in masonry structures*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven. 2003.

MATA, R. C. D. *Análise experimental e numérica do comportamento de junta em painéis de contraventamento de alvenaria estrutural*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 174 p, 2011.

MENDES, R. J. K. *Resistência à compressão de alvenarias de blocos cerâmicos estruturais*. Florianópolis. 185 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina. 1998.

MIRANDA, L. A. *Estudo do efeito do não preenchimento das juntas verticais e eficiência do graute na resistência da alvenaria estrutural de blocos cerâmicos*. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 206 p, 2012.

MOHAMAD, G. *Comportamento mecânico na ruptura de prismas de blocos de concreto*. Florianópolis. 178p. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, 1998.

NASCIMENTO NETO, J. A. Estudo de painéis com abertura constituídos por alvenaria estrutural de blocos. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 320 p, 2003.

van NOORT, J.R. *Computational modelling of masonry structures*. Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Department of Design and Construction Section of Structural Mechanics, 2012.

OLIVEIRA, L. M. F. *Estudo teórico e experimental do comportamento das interfaces verticais de paredes interconectadas de alvenaria estrutural*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 272 p, 2014.

OLIVEIRA, D., LOURENÇO, P.B. *Implementation and validation of a constitutive model for the cyclic behaviour of interface elements*. *Comput Struct* 82(17):1451–61. 2004.

PAGE, A. Finite element model for masonry. *ASCE J Struct Div.* 104. 1267-1285. 1978.

PAGE, A. The biaxial compressive strength of brick masonry. *Proc. Instn. Civ. Engrs.*, Part 2, 71, Sept., 893-906. 1981.

PANDE, G. N.; LIANG, X.; MIDDLETON, J. Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers and Geotechnics*, v. 8, p. 243-265, 1989.

PELETEIRO, S. C. *Contribuição à modelagem numérica de alvenaria estrutural*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 143 p, 2002.

van der PLUIJM, R. *Out-of-plane bending of masonry: behaviour and strength*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven. 1999.

RAMALHO, M. A., CORRÊA, M. R. S. *Projeto de edifícios de alvenaria estrutural*. São Paulo: Pini. 2003.

SABBATINI, F. H. *Processo Construtivo de edifícios de alvenaria sílico-calcaria*. São Paulo. 298p. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1984.

SALAMON, M. D. G. Elastic Moduli of a Stratified Rock Mass. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* v. 5, pp 519-527, Pergamon Press, 1968.

SANTOS, F. A. *Efeito do não-preenchimento de juntas verticais no desempenho de edifícios em alvenaria estrutural*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 154 p, 2001.

SANTOS, E. A. F. *Estudo da influência das propriedades elásticas da interface bloco-argamassa na rigidez de paredes de alvenaria*. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 277 p, 2014.

SOLÓRZANO, M. G. P. *Características e desempenho de juntas de argamassa na alvenaria estrutural de blocos de concreto*. São Paulo. 203p. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1994.

TAYER, A.D.N. *Modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas de alvenaria utilizando elementos finitos com alta razão de aspecto*. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, 90p, 2018.

UVA, G., SALERNO, G. Towards a multiscale analysis of periodic masonry brickwork: A FEM algorithm with damage and friction. *INT J SOLIDS STRUCT.* v. 43, p. 3739-3769. 2006.

WXMAXIMA, Release 16.04.2, 2015.

APÊNDICE A – COMO IMPLEMENTAR UMA SUBROTINA NO ANSYS

Existem várias rotinas de usuário do ANSYS (UPFs), para a implementação de novos elementos, materiais, ou mesmo novas funcionalidades, como cálculos mais sofisticados ou fazer um *link* do *software* com algum programa externo. Elas podem ser escritas tanto em FORTRAN como em C, sendo que a maioria das rotinas exemplos fornecidas pelo próprio ANSYS são escritas em FORTRAN. Tais exemplos, assim como as ferramentas necessárias para corretamente compilar e fazer o *link* de tais novas rotinas, gerando um novo executável do programa podem ser encontrados em %Diretório de instalação%\%Versão%\ansys\customize\user. Para o caso da versão 17.2 aqui utilizado, esse caminho seria, por exemplo, “C:\Program Files\ANSYS Inc\v172\ansys\customize\user”. Para a implementação ser bem sucedida, será necessário também o conteúdo da pasta “include”, que também se encontra na pasta “customize”.

Antes de começar, é necessário verificar se os compiladores corretos estão instalados corretamente, em suas versões apropriadas. No manual do ANSYS (2016), é possível encontrar os compiladores mais apropriados e compatíveis com a versão do ANSYS em uso (Figura 32 a seguir). Nota-se que a versão requerida para os compiladores geralmente é de ano anterior à versão do ANSYS. Esta lista recomendada pelo próprio ANSYS é garantida de compilar sem problemas, considerando que o código foi escrito corretamente. Enquanto outros compiladores podem ser utilizados, não há nenhuma certeza de que eles irão funcionar como esperado. Apesar de não estar especificado na tabela do ANSYS, o compilador de FORTRAN da Intel deve ser instalado antes do Visual Studio.

O próximo passo é escrever o código do novo material ou elemento a ser implementado. Nesta dissertação, optou-se por uma nova zona coesiva, ou *userCZM*, por conta de sua compatibilidade com elementos de interface que foram aqui utilizados. O procedimento básico é o mesmo para todas as rotinas de usuário. Para esta etapa, não só conhecimento da linguagem FORTRAN é necessário, mas também um entendimento de como o próprio *solver* do ANSYS funciona. Os tópicos de ajuda do programa podem ajudar a entender a ordem em que as rotinas são chamadas, a hierarquia destas, o nome das variáveis que são lidas e escritas depois de executada

a rotina, entre outros aspectos da parte computacional do problema. As rotinas exemplo também podem ser usadas de base para o entendimento do fluxo das operações do programa.

Ansys Release	Mechanical APDL, Ansys Workbench Compilers	CFX Compilers	Fluent Compilers	AUTODYN Compilers
19.1	VS 2015 update 3; Intel FORTRAN 17.0.4	VS 2015 update 3; Intel FORTRAN 17.0.4	VS 2013, 2015 & 2017 compilers	VS 2015 update 3; Intel FORTRAN 17.0.4
19.0	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.7 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2013, 2015 & 2017 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
18.2	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.7 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012, 2013 & 2015 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
18.1	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.7 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012, 2013 & 2015 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
18.0	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012, 2013 & 2015 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
17.2	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012, 2013 & 2015 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
17.0	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers	VS 2012, 2013 & 2015 compilers	VS 2012; Intel FORTRAN 15.0.2 compilers
16.2	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers	VS 2010 SP1 compiler	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers
16.0	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers	VS 2010 SP1 compiler	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 14.0.3 compilers
15.0	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 12.1 compilers	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 12.1 compilers	VS 2010 SP1 compiler	VS 2010 SP1; Intel FORTRAN 12.1 compilers
14.5	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers	VS 2008 SP1 compiler	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers
14.0	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers	VS 2008 SP1 compiler	VS 2008 SP1; Intel FORTRAN 11.1 compilers

Figura 43. Versões dos compiladores (ANSYS, 2019)

Uma vez que as equações matemáticas que descrevem a nova zona coesiva foram escritas na linguagem FORTRAN, o código foi testado e depurado no programa Visual Studio, até que os dados de saída fossem compatíveis com os dados de entrada fornecidos e estivessem dentro do esperado, similares aos resultados obtidos analiticamente. Nota-se que nesta etapa os resultados obtidos são referentes a um ponto de Gauss de um único elemento isolado. O resultado do elemento e

consequentemente do painel são calculados pelo ANSYS e as rotinas responsáveis por esses cálculos não serão alteradas aqui. As duas subrotinas que foram escritas e utilizadas nesta dissertação, uma para modelo com dano e outra para modelo superfície de fechamento, encontram-se nos apêndices B e C respectivamente.

Depois de a subrotina mostrar resultados satisfatórios nos testes para diferentes dados de entrada, passamos para a etapa onde compilamos e inserimos a nova subrotina no programa ANSYS de modo que este a reconheça e a utilize.

APÊNDICE B – SUBROTINA USERCZM COM DANO

```

*deck,userCZM  parallel  optimize  USERDISTRIB  me
  subroutine userCZM (matId, elemId, kMatIntPt, ldstep, isubst,
    & keycut, ncomp, nProp, nstatev,
    & Time, dTime, Temp, dTemp,
    & coords, prop, Strain, dStrain,
    & stress, dsdePl, sedEl, sedPl, statev,
    & var1, var2, var3, var4, var5)
  C
  C*****
  C
  C  input arguments
  C  =====
  C  matId  (int,sc,in)      material #
  C  elemId (int,sc,in)      element #
  C  kMatIntPt (int,sc,in)   material integration point #
  C  ldstep  (int,sc,in)     load step number
  C  isubst  (int,sc,in)     substep number
  C  ncomp   (int,sc,in)     number of stress, strain components
  C  nProp   (int,sc,in)     Number of material constants
  C  nstatev (int,sc,in)     Number of state variables
  C
  C  Temp   (dp ,sc,in)      temperature at beginning of time increment
  C  dTemp  (dp ,sc,in)      temperature increment
  C  Time   (dp ,sc,in)      time at beginning of increment (t)
  C  dTime  (dp ,sc,in)      time increment (dt)
  C
  C  prop   (dp,ar(nprop),i)  Material constants defined by TB command
  C  Strain (dp,ar(ncomp),i)  Interface separation at beginning of time increment
  C  dStrain (dp,ar(ncomp),i) Interface separation increment
  C  coords (dp,ar(3),i)      current coordinates
  C
  C  output arguments
  C  =====
  C  stress (dp,ar(nTesn),io)  Traction stress
  C  sedEl  (dp,sc,io)         elastic work
  C  sedPl  (dp,sc,io)         plastic work
  C  keycut (int,sc,io)        loading bisect/cut control
  C                                0 - no bisect/cut
  C                                1 - bisect/cut
  C                                (factor will be determined by ANSYS solution control)
  C  dsdePl (dp,ar(ncomp,ncomp),io) consistent tangent jacobian matrix
  C
  C  input output arguments
  C  =====
  C  statev (dp,ar(nstatev,io)  user defined solution state variables
  C
  C  misc.
  C  =====
  C  var1, var2, var3, var4, var5  currently not used
  C
  C*****
  C#include "impcom.inc"
  C
  C --- parametros do cabecalho
  C
  C  INTEGER
  C  & matId, elemId,
  C  & kMatIntPt, ldstep, isubst, keycut,
  C  & ncomp, nProp, nstatev
  C  DOUBLE PRECISION
  C  & Time, dTime, Temp, dTemp,

```

```

&      sedEI, sedPI
DOUBLE PRECISION coords (3),
&      prop (nProp ),
&      Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
&      stress (ncomp ), dsdePI (ncomp,ncomp),
&      statev (nstatev)
DOUBLE PRECISION var1, var2, var3, var4, var5
c
c --- parametros para resolucao
c
c      INTEGER      mcomp
DOUBLE PRECISION HALF, SMALL
PARAMETER (HALF = 0.5d0,
&      SMALL = 1.d-08,
&      mcomp = 2
&      )
c
DOUBLE PRECISION sigTrial(mcomp), ePli (ncomp ),
&      ePli1 (ncomp ), eEli1 (ncomp), N (2),
&      eETrial(ncomp), sigt, kn, ks, gamma, signum,
&      coe, fi, tfi, ctfi, f1, f2, f3, f4,
&      p1, p2, p3, p4 (ncomp )
c
DOUBLE PRECISION eRd (ncomp ), eZerod (ncomp ), neta (ncomp ),
&      sigStr (ncomp ), D (ncomp ), Dbar (ncomp )

#include "ansysdef.inc"
c
c*****
c
c sigTrial  sigma trial
c ePli      deformacao plastica no passo i
c ePli1     deformacao plastica no passo i+1
c eEli1     deformacao elastica no passo i+1
c N         direcao de volta do CPP
c eETrial   deformacao elastica trial
c sigt      tensao normal de escoamento de tracao
c kn        rigidez normal da interface
c ks        rigidez cisalhante da interface
c gamma     corretor plastico
c signum    sinal de tau
c coe       coesao do material
c fi        angulo de atrito em radianos
c tfi       tangente de fi
c ctfi      cotangente de fi (necessario para reta auxiliar f3)
c f1-4      retas que marcam as regioes de Mohr-Coulomb
c p1-3     variaveis usadas apenas para simplificar os calculos
c
c eRd       deformacao quando o dano e maximo
c eZerod    deformacao maxima para nao ocorrencia de dano
c D, Dbar   parametro de dano
c
c*****
c *** propriedades do material dadas pelo comando tldata
kn = 0.0d0
ks = 0.0d0
kn = prop(1)
ks = prop(2)
sigt = prop(3)
coe = prop(4)
fi = (prop(5)*4 *datan(1.0_8))/180
tfi = dtan(fi)
ctfi = 1.0d0/tfi
keycut = 0
c
c *** deformacao plastica do passo i
ePli(1) = statev(1)

```

```

ePli(2) = statev(2)

Strain(1) = statev(3)
Strain(2) = statev(4)
c
c *** dados relativos ao dano
eZerod(1) = prop(6)
      eZerod(2) = prop(8)
eRd(1) = prop(7)
      eRd(2) = prop(9)

neta = 0.0d0
neta = eRd/eZerod
Dbar = 0.0d0
sigStr = dsign(1.0d0,Strain)
p4 = 1/(neta-1)
Dbar = 1-(neta*p4)*sigStr*(eZerod/(Strain+dStrain))+p4
D = 0.0d0
D = max(0.0d0, min(1.0d0, Dbar))

kn = kn*(1-D(1))
ks = ks*(1-D(2))
c
c *** deformacao elastica trial
eElTrial = Strain - ePli + dStrain

c
c *** sigma e tau trial
dsdePl = 0.0d0
dsdePl (1,1) = kn
dsdePl (2,2) = ks
sigTrial = 0.0d0
sigTrial (1) = kn*eElTrial(1)
sigTrial (2) = ks*eElTrial(2)
signum = dsign(1.0d0,sigTrial(2))
c
c *** retas para as regioes de Mohr-Coulomb
f1 = signum*sigTrial(2) - coe + sigTrial(1)*tfi
f2 = sigTrial(1) - sigt
f3 = (signum*sigTrial(2))- (sigTrial(1)*ctfi)+(sigt*(tfi+ctfi))-coe
f4 = signum*sigTrial(2) - coe + sigt*tfi
c
c *** direcao de volta do CPP para calcular gamma
N = 0.0d0
N(1) = tfi
N(2) = signum
c
c *** checar regio e escoamento
IF (f1 .LE. SMALL .AND. f2 .LE. SMALL) THEN
c ***** REGIAO ELASTICA
      stress = sigTrial
      eEli1 = eElTrial
      ePli1 = ePli
      ELSE IF (f1 .GT. SMALL .AND. f3 .GT. SMALL) THEN
c ***** REGIAO I
      p3 = 1/(ks+kn*tfi)
      gamma = 0.0d0
      gamma = (signum*sigTrial(2) + tfi*sigTrial(1) - coe)*p3
      stress(1) = (sigTrial(1)- kn*gamma*N(1))
      stress(2) = (sigTrial(2)- ks*gamma*N(2))
      eEli1(1) = eElTrial(1) - gamma*N(1)
      eEli1(2) = eElTrial(2) - gamma*N(2)
      ePli1(1) = ePli(1) + gamma*N(1)
      ePli1(2) = ePli(2) + gamma*N(2)
c ***** matriz jacobiana
dsdePl = 0.0d0
p1 = kn*ks

```

```

p2      = 1/(ks + kn*tfi*tfi)
dsdePI(1,1) = p1*p2
dsdePI(2,2) = p1*tfi*tfi*p2
dsdePI(2,1) = -p1*p2*tfi*signum
dsdePI(1,2) = dsdePI(2,1)
ELSE IF (f3 .LE. SMALL .AND. f4 .GT. SMALL) THEN
c ***** REGIAO III
stress(1) = sigt
stress(2) = ((coe-sigt*tfi)*signum)
eEli1(1) = (1/kn)*stress(1)
eEli1(2) = (1/ks)*stress(2)
ePli1    = Strain + dStrain - eEli1
c ***** matriz jacobiana
dsdePI   = 0.0d0
ELSE IF (f2 .GT. SMALL .AND. f4 .LE. SMALL) THEN
c ***** REGIAO II
stress(1) = sigt
stress(2) = sigTrial(2)
gamma     = (sigTrial(1) - sigt)/kn
eEli1(1) = eETrial(1) - gamma
eEli1(2) = eETrial(2)
ePli1(1) = ePli(1) + gamma
ePli1(2) = ePli(2)
c ***** matriz jacobiana
dsdePI   = 0.0d0
dsdePI(2,2) = ks
END IF
c
c *** energia
sedEI = 0.0d0
sedEI = HALF*(stress(1)*eEli1(1)+stress(2)*eEli1(2))
sedPI = 0.0d0
sedEI = HALF*(stress(1)*ePli1(1)+stress(2)*ePli1(2))
c
c *** armazenar valores de deformacao plastica e total
statev(1) = ePli1(1)
statev(2) = ePli1(2)

Strain = ePli1 + eEli1
statev(3) = Strain (1)
statev(4) = Strain (2)
c
c
return
end

```

APÊNDICE C – SUBROTINA USERCZM COM CAP

```

*deck,userCZM parallel optimize USERDISTRIB me
  subroutine userCZM (matld, elemld, kMatIntPt, ldstep, isubst,
    & keycut, ncomp, nProp, nstatev,
    & Time, dTime, Temp, dTemp,
    & coords, prop, Strain, dStrain,
    & stress, dsdePl, sedEl, sedPl, statev,
    & var1, var2, var3, var4, var5)
c
c*****
c
c input arguments
c =====
c matld (int,sc,in) material #
c elemld (int,sc,in) element #
c kMatIntPt (int,sc,in) material integration point #
c ldstep (int,sc,in) load step number
c isubst (int,sc,in) substep number
c ncomp (int,sc,in) number of stress, strain components
c nProp (int,sc,in) Number of material constants
c nstatev (int,sc,in) Number of state variables
c
c Temp (dp ,sc,in) temperature at beginning of time increment
c dTemp (dp ,sc,in) temperature increment
c Time (dp ,sc,in) time at beginning of increment (t)
c dTime (dp ,sc,in) time increment (dt)
c
c prop (dp,ar(nprop),i) Material constants defined by TB command
c Strain (dp,ar(ncomp),i) Interface separation at beginning of time increment
c dStrain (dp,ar(ncomp),i) Interface separation increment
c coords (dp,ar(3),i) current coordinates
c
c output arguments
c =====
c stress (dp,ar(nTesh),io) Traction stress
c sedEl (dp,sc,io) elastic work
c sedPl (dp,sc,io) plastic work
c keycut (int,sc,io) loading bisect/cut control
c 0 - no bisect/cut
c 1 - bisect/cut
c (factor will be determined by ANSYS solution control)
c dsdePl (dp,ar(ncomp,ncomp),io) consistent tangent jacobian matrix
c
c input output arguments
c =====
c statev (dp,ar(nstatev),io) user defined solution state variables
c
c misc.
c =====
c var1, var2, var3, var4, var5 currently not used
c
c*****
#include "impcom.inc"
c
c --- parametros do cabeçalho
c
INTEGER

```

```

&      matld, elemld,
&      kMatIntPt, ldstep, isubst, keycut,
&      ncomp,nProp, nstatev
DOUBLE PRECISION
&      Time, dTime, Temp, dTemp,
&      sedEI, sedPI
DOUBLE PRECISION coords (3),
&      prop (nProp ),
&      Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
&      stress (ncomp ), dsdePI (ncomp,ncomp),
&      statev (nstatev)
DOUBLE PRECISION var1, var2, var3, var4, var5
c
c --- parametros para resolucao
c
c      INTEGER      mcomp
DOUBLE PRECISION HALF, SMALL
PARAMETER (HALF = 0.5d0,
&      SMALL = 1.d-8,
&      mcomp = 2
&      )
c
c      DOUBLE PRECISION sigTrial(mcomp), ePli (ncomp ),
&      ePli1 (ncomp ), eEli1 (ncomp), N (2),
&      eEITrial(ncomp), sigt, kn, ks, gamma, signum,
&      coe, fi, tfi, ctfi, f1, f2, f3, f4, f5, f6,
&      p1, p2, p3
c
c      DOUBLE PRECISION fc, sb, sbi, sbm, sbr, k0, kp, kpp, kpm, sigm, r,
&      sign1 (ncomp ), dkptr, sbtr, dkp
c
c      DOUBLE PRECISION dsb, neta (ncomp ), p4, p5, dsigm, dr, df,
&      dsn1 (ncomp ), dneta (ncomp )
c
c      INTEGER      j

#include "ansysdef.inc"
c
c*****
c
c      sigTrial      sigma trial
c      ePli          deformacao plastica no passo i
c      ePli1         deformacao plastica no passo i+1
c      eEli1         deformacao elastica no passo i+1
c      N            direcao de volta do CPP
c      eEITrial      deformacao elastica trial
c      sigt          tensao normal de escoamento de tracao
c      kn            rigidez normal da interface
c      ks           rigidez cisalhante da interface
c      gamma        corretor plastico
c      signum       sinal de tau
c      coe          coesao do material
c      fi           angulo de atrito em radianos
c      tfi          tangente de fi
c      ctfi         cotangente de fi (necessario para funcoes auxiliares)
c      f1-6        retas que marcam as regioes de Mohr-Coulomb com cap
c      p1-5        variaveis usadas apenas para simplificar os calculos
c
c
c*****
c *** propriedades do material dadas pelo comando tldata
kn = 0.0d0

```

```

ks = 0.0d0
kn = prop(1)
ks = prop(2)
sigt = prop(3)
coe = prop(4)
fi = (prop(5)*4.0d0*datan(1.0d0))/180d0
tfi = dtan(fi)
ctfi = 1.0d0/tfi
      fc = prop(6)
sbi = fc/3.0d0
sbm = fc/2.0d0
sbr = fc/7.0d0
k0 = 0.0d0
k0 = statev(5)
kpp = prop(7)
kpm = prop(8)
keycut = 0

flag = 0
c
c *** deformacao plastica do passo i
ePli(1) = statev(1)
ePli(2) = statev(2)

Strain(1) = statev(3)
Strain(2) = statev(4)
c
c *** deformacao elastica trial
eElTrial = Strain - ePli + dStrain
c
c
c *** sigma e tau trial
dsdePl = 0.0d0
dsdePl (1,1) = kn
dsdePl (2,2) = ks
sigTrial = 0.0d0
sigTrial (1) = kn*eElTrial(1)
sigTrial (2) = ks*eElTrial(2)
signum = dsign(1.0d0,sigTrial(2))

c *** retas para as regioes de Mohr-Coulomb
f1 = signum*sigTrial(2) - coe + sigTrial(1)*tfi
f2 = sigTrial(1) - sigt
f3 = (signum*sigTrial(2))- (sigTrial(1)*ctfi)+(sigt*(tfi+ctfi))-coe
f4 = signum*sigTrial(2) - coe + sigt*tfi

j = 0
dkp = 0.0d0
kp = k0
sb = (sbi+(fc-sbi)*dsqrt(dabs((2.0d0*kp/kpp)-(kp/kpp)**2)))
r = (sb*dsin(fi)+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))
sigm = (-sb+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))

f5 = (signum*sigTrial(2)+(ctfi)*sigm-sigTrial(1)*(ctfi))
f6 = ((sigTrial(1)-sigm)**2)+(sigTrial(2)**2)-(r**2)

c *** checar regio e escoamento
IF (f1 .LE. SMALL .AND. f2 .LE. SMALL .AND. f5 .LE. SMALL) THEN
c ***** REGIAO ELASTICA
gamma = 0.0d0
stress = sigTrial
eEl1 = eElTrial

```

```

    ePli1 = ePli
    flag = 0
    ELSE IF (f1.LE.SMALL .AND. f5.GT.SMALL .AND. f6.LE.SMALL) THEN
c ***** REGIAO ELASTICA
    gamma = 0.0d0
    stress = sigTrial
    eEli1 = eEITrial
    ePli1 = ePli
    flag = 0
    ELSE IF (f1.GT.SMALL .AND. f3.GT.SMALL .AND. f5.LE.SMALL) THEN
c ***** REGIAO I
    p3 = 1.0d0/(ks+kn*tfi*tfi)
    gamma = 0.0d0
    gamma = (signum*sigTrial(2) + tfi*sigTrial(1) - coe)*p3
    N = 0.0d0
    N(1) = tfi
    N(2) = signum
    stress(1) = (sigTrial(1) - kn*gamma*N(1))
    stress(2) = (sigTrial(2) - ks*gamma*N(2))
    eEli1(1) = eEITrial(1) - gamma*N(1)
    eEli1(2) = eEITrial(2) - gamma*N(2)
    ePli1(1) = ePli(1) + gamma*N(1)
    ePli1(2) = ePli(2) + gamma*N(2)
c ***** matriz jacobiana
    dsdePI = 0.0d0
    p1 = kn*ks
    p2 = 1.0d0/(ks + kn*tfi*tfi)
    dsdePI(1,1) = p1*p2
    dsdePI(2,2) = p1*tfi*tfi*p2
    dsdePI(2,1) = -p1*p2*tfi*signum
    dsdePI(1,2) = dsdePI(2,1)
    flag = 1
    ELSE IF (f3.LE.SMALL .AND. f4.GT.SMALL) THEN
c ***** REGIAO III
    gamma = 0.0d0
    stress(1) = sigt
    stress(2) = ((coe-sigt*tfi)*signum)
    eEli1(1) = (1.0d0/kn)*stress(1)
    eEli1(2) = (1.0d0/ks)*stress(2)
    ePli1 = Strain + dStrain - eEli1
c ***** matriz jacobiana
    dsdePI = 0.0d0
    flag = 3
    ELSE IF (f2.GT.SMALL .AND. f4.LE.SMALL) THEN
c ***** REGIAO II
    stress(1) = sigt
    stress(2) = sigTrial(2)
    gamma = 0.0d0
    gamma = (sigTrial(1) - sigt)/kn
    eEli1(1) = eEITrial(1) - gamma
    eEli1(2) = eEITrial(2)
    ePli1(1) = ePli(1) + gamma
    ePli1(2) = ePli(2)
c ***** matriz jacobiana
    dsdePI = 0.0d0
    dsdePI(2,2) = ks
    flag = 2
    ELSE IF (f5.GT.SMALL .AND. f6.GT.SMALL) THEN
c ***** CAP DE COMPRESSAO
c ***** Newton Raphson
    dkp = SMALL
    kp = k0 + dkp

```

```

sb = (sbi+(fc-sbi)*dsqrt(dabs((2.0d0*kp/kpp)-(kp/kpp)**2)))
dsb = (((2.0d0/kpp)-(2.0d0*kp)/(kpp**2))*(fc-sbi)/
&      (2.0d0*dsqrt(dabs((2.0d0*kp/kpp)-(kp/kpp)**2))))
r = (sb*dsin(fi)+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))
sigm = (-sb+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))
gamma = dkp/(2.0d0*r)

sign1 = 0.0d0
sign1(1) = (sigTrial(1)+kn*2.0d0*gamma*sigm)/
&      (1.0d0+kn*2.0d0*gamma)
sign1(2) = (sigTrial(2))/(1.0d0+ks*2.0d0*gamma)

f5 = (signum*sigTrial(2)+(ctfi)*sigm-sigTrial(1)*(ctfi))
f6 = ((sign1(1)-sigm)**2)+(sign1(2)**2)-(r**2)

DO WHILE (dabs(f6) .GT. SMALL)
  IF (f1.GT.SMALL .AND. f3.GT.SMALL .AND. f5.LE.SMALL) THEN
    p3 = 1.0d0/(ks+kn*tfi*tfi)
    gamma = 0.0d0
    gamma = (signum*sigTrial(2) + tfi*sigTrial(1) - coe)*p3
    N = 0.0d0
    N(1) = tfi
    N(2) = signum
    stress(1) = (sigTrial(1)- kn*gamma*N(1))
    stress(2) = (sigTrial(2)- ks*gamma*N(2))
    eEli1(1) = eEITrial(1) - gamma*N(1)
    eEli1(2) = eEITrial(2) - gamma*N(2)
    ePli1(1) = ePli(1) + gamma*N(1)
    ePli1(2) = ePli(2) + gamma*N(2)
c ***** matriz jacobiana
    dsdePI = 0.0d0
    p1 = kn*ks
    p2 = 1.0d0/(ks + kn*tfi*tfi)
    dsdePI(1,1) = p1*p2
    dsdePI(2,2) = p1*tfi*tfi*p2
    dsdePI(2,1) = -p1*p2*tfi*signum
    dsdePI(1,2) = dsdePI(2,1)
    sb = -sb
    f6 = 0.0d0
  ELSE
    neta(1) = sign1(1)-sigm
    neta(2) = sign1(2)
    p4 = 1.0d0/(1.0d0+dsin(fi))
    dsigm = -dsb*p4
    dr = 0.0d0
    dr = dsin(fi)*dsb*p4

    p5 = dkp*dr/r
    dsn1(1) = (kn/(r+kn*dkp))*(dkp*dsigm-sigm*(p5-1.0d0)-sign1(1)
&      *(1.0d0-p5))
    dsn1(2) = -((ks*sign1(2))/(r+ks*dkp))*(1.0d0-p5)
    dneta(1) = dsn1(1)-dsigm
    dneta(2) = dsn1(2)

    df = 0.0d0
    df = 2.0d0*(neta(1)*dneta(1)+neta(2)*dneta(2))-2.0d0*r*dr
    dkp = dkp - f6/df
    kp = k0 + dkp

    sb = (sbi+(fc-sbi)*dsqrt(dabs((2.0d0*kp/kpp)-
&      (kp/kpp)**2)))
    dsb = (((2.0d0/kpp)-(2.0d0*kp)/(kpp**2))*(fc-sbi)/

```

```

&      (2.0d0*dsqrt(dabs(((2.0d0*kp)/kpp)-(kp/kpp)**2)))

      r  = (sb*dsin(fi)+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))
      sigm = (-sb+coe*dcos(fi))/(1.0d0+dsin(fi))
      gamma = dkp/(2.0d0*r)

      sign1(1) = (sigTrial(1)+kn*2.0d0*gamma*sigm)/
&      (1.0d0+kn*2.0d0*gamma)
      sign1(2) = (sigTrial(2))/(1.0d0+ks*2.0d0*gamma)

      f5 = (signum*sign1(2)+(ctfi)*sigm-sign1(1)*(ctfi))
      f6 = ((sign1(1)-sigm)**2)+(sign1(2)**2)-(r**2)

      stress = sign1
      ePli1(1) = 2.0d0*gamma*(stress(1)-sigm)
      ePli1(2) = 2.0d0*gamma*stress(2)
      eEli1 = Strain + dStrain - ePli1
c ***** matriz jacobiana
      dsdePI = 0.0d0
      dsdePI(1,1) = kn/(1.0d0+2.0d0*gamma*kn)
      dsdePI(2,2) = ks/(1.0d0+2.0d0*gamma*ks)

      END IF

      IF (gamma .LE. 0.0d0) THEN
          open(1, file='czm_debug.txt', position='append')
          write(1,*) ' '
          write(1,*)'Multiplicador plástico negativo = ', gamma
      END IF

      sb = -sb
      j = j + 1
      END DO
c
      f6 = ((sigTrial(1)-sigm)**2)+(sigTrial(2)**2)-(r**2)
      flag = 4
      END IF

c *** energia
      sedEl = 0.0d0
      sedEl = HALF*(stress(1)*eEli1(1)+stress(2)*eEli1(2))
      sedPI = 0.0d0
      sedEl = HALF*(stress(1)*ePli1(1)+stress(2)*ePli1(2))
c
c *** armazenar valores de deformacao plastica e total
      statev(1) = ePli1(1)
      statev(2) = ePli1(2)

      Strain = ePli1 + eEli1
      statev(3) = Strain (1)
      statev(4) = Strain (2)
      statev(5) = kp

      statev(6) = eEli1(1)
      statev(7) = eEli1(2)
      statev(8) = flag

      return
      end

```