



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Jessica Nogueira Castricini

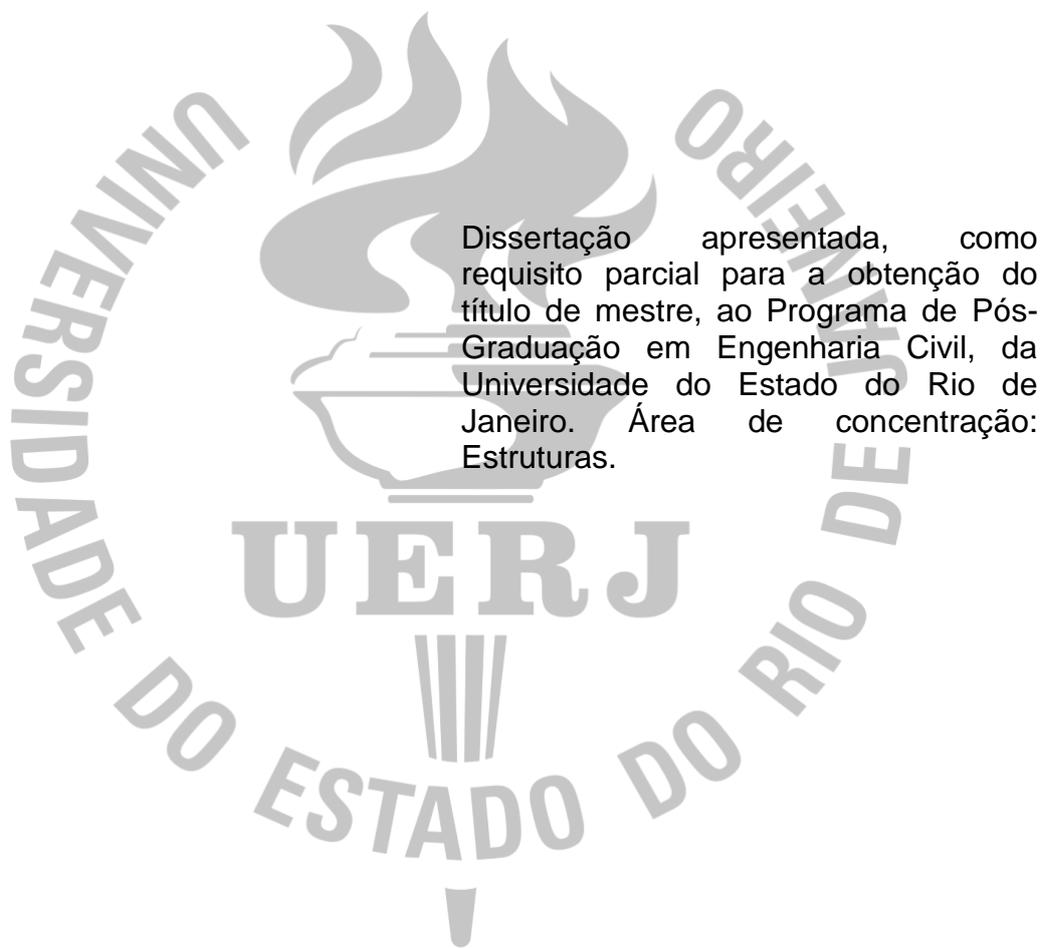
Otimização baseada em confiabilidade de treliças planas

Rio de Janeiro

2020

Jessica Nogueira Castricini

Otimização baseada em confiabilidade de treliças planas



Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C355 Castricini, Jessica Nogueira.
Otimização baseada em confiabilidade de treliças planas /
Jessica Nogueira Castricini. – 2020.
138f.

Orientador: Rodrigo Bird Burgos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Confiabilidade (Engenharia) -
Teses. 3. Otimização estrutural - Teses. 4. Algoritmos genéticos -
Teses. 5. Treliças (Construção civil) - Teses. I. Burgos, Rodrigo
Bird. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de
Engenharia. III. Título.

CDU 624.04

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta tese, desde que citada a fonte.

Jessica N. Castricini

Assinatura

09/11/2020

Data

Jessica Nogueira Castricini

Otimização Baseada em Confiabilidade de Treliças Planas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 04 de setembro de 2020.

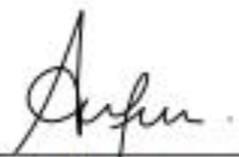
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ



Profa. Dra Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Anderson Pereira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Rio de Janeiro

2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela força e luz que me deu ao longo desse caminho.

Ao Jonathan, por toda paciência, compreensão e amor que me fortaleceram a cada dia. E Eliane, Constantino, Stefany, pelas palavras de incentivo, pela assistência dada e por nunca deixarem a “peteca cair” enquanto eu passava por esse processo.

Ao professor Rodrigo, por ter me incentivado a fazer o curso, por ter me dado todo o suporte acadêmico nesses anos, por não ter medido esforços para sanar todas as dúvidas que obtive ao longo do trabalho, desde as mais triviais até as mais complexas.

Ao Matheus Lopes, pelo suporte e atenção ao longo do desenvolvimento desse trabalho, que foi primordial para o meu desenvolvimento e serei eternamente grata por suas horas de dedicação.

Ao Matheus Carvalheda pela disponibilidade e aulas particulares em quase todas as disciplinas do curso.

Ao Vitor Mello por ter passado por todos os “perrengues” comigo, me dando força em todos os momentos de desespero, e por me incentivar e me motivar incansavelmente todos os dias. Obrigada pela companhia dos finais de semana para estudar elasticidade.

Agradeço à Bianca que foi um presente que recebi com o mestrado. Agradeço por sua calma, suas palavras e sua amizade, que com certeza será eterna.

Agradeço também a todos os amigos que estiveram comigo nessa luta: Lucas, Carlos, Augusto, Vinícius, Tatiana e Ana.

Por fim, e não menos importante, agradeço às minhas amigas Bárbara, Bianca e Luiza. Agradeço por serem sempre as minhas maiores motivadoras, conselheiras e ouvintes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

CASTRICINI, J.N. *Otimização baseada em confiabilidade de treliças planas*. 2020. 138f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2020.

A otimização baseada em confiabilidade (RBDO) permite projetar estruturas cada vez mais leves, com menor custo, sem comprometer sua segurança. Apesar de custo e segurança serem objetivos a princípio discordantes na engenharia civil, a RBDO busca garantir essas condições simultaneamente. Para isso é necessário levar em consideração, durante o processo de otimização, além das restrições geométricas e mecânicas, a probabilidade de falha que a estrutura a ser otimizada deverá possuir. Este trabalho aborda um estudo de RBDO, considerando os modos de falha por flambagem e por escoamento, em treliças planas formadas por barras tubulares, possuindo como função objetivo o volume final da estrutura (a ser minimizado), considerando o diâmetro externo e a espessura das barras tubulares como variáveis a serem otimizadas. A otimização foi realizada a partir de algoritmos genéticos (GA) com o auxílio do software Matlab. O modelo possui restrições lineares (relação geométrica entre diâmetro e espessura, visando garantir estabilidade local, segundo a NBR 8800) e não-lineares (tensão, deslocamento, índice de confiabilidade e índice de esbeltez). Foram utilizadas treliças isostáticas de modo que existam expressões analíticas fechadas para tensões e deslocamentos, e a restrição probabilística foi considerada a partir do método PMA (*Performance Measure Approach*), com a probabilidade de falha sendo previamente definida. O principal objetivo deste trabalho é verificar qual é a influência dos modos de falha de uma estrutura no resultado da otimização, ou seja, no volume final da estrutura otimizada, quando considerados de forma independente e de forma simultânea.

Palavras-chave: Otimização estrutural; Confiabilidade estrutural; Flambagem; Algoritmo Genético.

ABSTRACT

CASTRICINI, J.N. *Reliability based optimization of plane trusses*. 2020. 138f. Master's dissertation – Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, Brazil, 2020.

Reliability Based Design Optimization (RBDO) allows the design of increasingly slender structures, with lower costs, without compromising its safety. Despite costs and safety being apparently opposing objectives in civil engineering, RBDO seeks to ensure both conditions simultaneously. For that, it is necessary to take into consideration, during the optimization process, not only the geometrical and mechanical restrictions, but also the failure probability that the optimized structure should have. This work presents a RBDO study, considering the buckling and yielding failure modes, in plane trusses formed by tubular bars, having the final structure volume as the objective function (to be minimized), and taking the tubular bars external diameter and thickness as variables to be optimized. The optimization was performed using genetic algorithm (GA) with the assistance of Matlab software. The model has linear constraints (geometric relations between diameter and thickness, to ensure local stability, according to NBR 8800) and nonlinear constraints (stress, displacement, slenderness ratio and reliability index). Isostatic trusses were used in a way to ensure closed-form expressions for the stresses and displacements, and the probabilistic constraint was considered by PMA (*Performance Measure Approach*) method, with the failure probability being previously defined. The main objective in this work is to verify whether the structures' failure modes influence in the optimization results, when considered independently and simultaneously.

Keywords: Structural optimization; Structural reliability; Buckling; Genetic Algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	Sistemas da computação natural	25
Figura 2-	Otimização dimensional ou de tamanho	25
Figura 3-	Otimização de forma	26
Figura 4-	Otimização topológica	26
Figura 5-	Fluxograma do algoritmo genético	27
Figura 6-	Cruzamento em apenas um ponto	29
Figura 7-	Processo de mutação.....	30
Figura 8-	Função de falha e domínios de falha e sobrevivência.....	33
Figura 9-	Probabilidade de falha da função $g(R,S)$	34
Figura 10-	Funções $f_R(r)$, $f_S(s)$, $f_{RS}(r,s)$ e $g(X)$	35
Figura 11-	Função densidade probabilidade e o índice de confiabilidade	37
Figura 12-	Índice de confiabilidade e ponto de projeto	38
Figura 13-	Transformação do espaço físico (X) para o espaço normalizado (Y).	41
Figura 14-	Transformação X-Z-Y	42
Figura 15-	Algoritmo FORM.....	45
Figura 16-	Comparação entre DDO e RBDO	46
Figura 17-	Formulações RIA e PMA	49
Figura 18-	Seção transversal dos elementos	50
Figura 19-	Treliça de 3 barras	55
Figura 20-	Histórico das variáveis / otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	63
Figura 21-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	64
Figura 22-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	67
Figura 23-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	68
Figura 24-	Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	71

Figura 25-	Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	71
Figura 26-	Treliça de 13 barras	87
Figura 27-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	90
Figura 28-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	91
Figura 29-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 e R_2 (NBR 8800:2008).....	95
Figura 30-	Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	95
Figura 31-	Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	99
Figura 32-	Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	99
Figura 33-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	126
Figura 34-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	126
Figura 35-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , e R_2 (NBR 8800:2008)	127
Figura 36-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	127
Figura 37-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	128
Figura 38-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	128
Figura 39-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	129
Figura 40-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	129
Figura 41-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	130

Figura 42-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	130
Figura 43-	Histórico do volume / RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	131
Figura 44-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	131
Figura 45-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	132
Figura 46-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	132
Figura 47-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008).....	133
Figura 48-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	133
Figura 49-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	134
Figura 50-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	134
Figura 51-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	135
Figura 52-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	136
Figura 53-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008).....	136
Figura 54-	Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	137
Figura 55-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	137
Figura 56-	Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-	Comprimento das barras.....	56
Tabela 2-	Dados estatísticos das variáveis probabilísticas	56
Tabela 3-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	62
Tabela 4-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	62
Tabela 5-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	62
Tabela 6-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	63
Tabela 7-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	65
Tabela 8-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	65
Tabela 9-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR8800:2008).....	66
Tabela 10-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	66
Tabela 11-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	66
Tabela 12-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	67
Tabela 13-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	68
Tabela 14-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	69
Tabela 15-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	70
Tabela 16-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	70

Tabela 17- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	70
Tabela 18- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	72
Tabela 19- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	72
Tabela 20- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	72
Tabela 21- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}	73
Tabela 22- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}	73
Tabela 23- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 3 barras (2 variáveis de projeto)	74
Tabela 24- Resumo dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto	75
Tabela 25- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	77
Tabela 26- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	77
Tabela 27- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2	78
Tabela 28- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	78
Tabela 29- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008).....	79
Tabela 30- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	79
Tabela 31- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	80
Tabela 32- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	80

Tabela 33-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	81
Tabela 34-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	81
Tabela 35-	Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	82
Tabela 36-	Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	82
Tabela 37-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}	83
Tabela 38-	Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}	83
Tabela 39-	Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 3 barras (quatro variáveis de projeto).....	84
Tabela 40-	Resumo dos volumes obtidos, considerando quatro variáveis de projeto.....	85
Tabela 41-	Resumo dos volumes ótimos da treliça de 3 barras.....	86
Tabela 42-	Comprimento dos elementos.....	87
Tabela 43-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	90
Tabela 44-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	90
Tabela 45-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	91
Tabela 46-	Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	91
Tabela 47-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	92
Tabela 48-	Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	93
Tabela 49-	Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR8800:2008).....	94

Tabela 50- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	94
Tabela 51- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	94
Tabela 52- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	96
Tabela 53- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	96
Tabela 54- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	97
Tabela 55- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 , com P_f igual a 10^{-5}	98
Tabela 56- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 , com P_f igual a 10^{-5}	98
Tabela 57- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	98
Tabela 58- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	98
Tabela 59- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	100
Tabela 60- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	101
Tabela 61- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}	102
Tabela 62- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}	102
Tabela 63- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 13 barras (duas variáveis de projeto)	103
Tabela 64- Resumos dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto	104
Tabela 65- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	105

Tabela 66- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	106
Tabela 67- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2	107
Tabela 68- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3	108
Tabela 69- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008).....	109
Tabela 70- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008).....	109
Tabela 71- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	110
Tabela 72- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	111
Tabela 73- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	112
Tabela 74- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	112
Tabela 75- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}	113
Tabela 76- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}	114
Tabela 77- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}	115
Tabela 78- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}	115
Tabela 79- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 13 barras (14 variáveis de projeto)	117
Tabela 80- Resumos dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto	118
Tabela 81- Resumo dos volumes ótimos da treliça de 13 barras.....	119

LISTA DE SIGLAS

DDO	Deterministic Design Optimization
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
FOSM	<i>First Order Second Moment</i>
GA	Genetic Algorithm
HLRF	Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler
PMA	<i>Performance Measure Approach</i>
RBDO	Reliability Based Design Optimization
RIA	<i>Reliability Index Approach</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

x^1 e x^2	Indivíduos pais
$x^{1'}$ e $x^{2'}$	Indivíduos filhos
$g(X)$	Função de falha
Ω_F	Domínio de falha
Ω_S	Domínio de sobrevivência
$f_x(X)$	Função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis X
C	Confiabilidade
P_f	Probabilidade de falha
$f_R(r)$	Função densidade de probabilidade da resistência
$f_S(s)$	Função densidade de probabilidade da solicitação
$f_{RS}(r,s)$	Função conjunta de densidade de probabilidade
$F_R(r)$	Função distribuição acumulada
μ	Média
σ	Desvio-padrão
y^*	Ponto de projeto
β	Índice de confiabilidade
$F^{neq}_{x_i}(x_i^*)$	Função distribuição acumulada equivalente
$f^{neq}_{x_i}(x_i^*)$	Função distribuição de probabilidade equivalente
μ^{neq}	Média equivalente
σ^{neq}	Desvio-padrão equivalente
J	Matriz Jacobiana
C_Y	Matriz de covariância no espaço Y
C_Z	Matriz de covariância no espaço Z
y_{RIA}^*	Ponto de projeto obtido pelo método RIA
y_{PMA}^*	Ponto de projeto obtido pelo método PMA
D	Diâmetro da seção transversal
t	Espessura da seção transversal
a	Parâmetro de locação da função densidade de probabilidade da distribuição de Laplace

b	Parâmetro de escala da função densidade de probabilidade da distribuição de Laplace
N	Constante de normalização da lei de potência
ξ	Expoente da lei de potência
Q	Fator de redução utilizado para considerar o efeito da flambagem local (flambagem das paredes)
L	Vão da estrutura
Δ	Deslocamento nodal
\bar{P}	Carregamento virtual
\bar{N}	Esforço normal virtual
N	Esforço normal real
EA	Rigidez à deformação axial
r	Raio de giração
α	Fator de distribuição da carga vertical na barra
I	Momento de inércia
E	Módulo de elasticidade
A	Área da seção transversal
P	Carregamento
R ₁	Grupo de restrições determinísticas que consideram a geometria, a flambagem local, o índice de esbeltez e o deslocamento nodal
R ₂	Restrição determinística/probabilística que considera o escoamento
R ₃	Restrição determinística/probabilística que considera a flambagem
V	Volume da estrutura

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	20
	Objetivo	22
	Organização do trabalho	23
1.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	24
1.1	Conceitos básicos	24
1.2	Algoritmo Genético	26
1.2.1	<u>Definições</u>	27
1.2.2	<u>Codificação dos indivíduos</u>	28
1.2.3	<u>Seleção</u>	28
1.2.4	<u>Método de geração de novos indivíduos (Crossover)</u>	29
1.2.5	<u>Mutação</u>	30
1.2.6	<u>Tratamento das restrições</u>	30
2.	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE (RBDO)	32
2.1	Confiabilidade	32
2.1.1	<u>Função de falha e probabilidade de falha</u>	33
2.1.2	<u>Método FOSM</u>	35
2.1.2.1	Índice de confiabilidade para equação de estado limite linear.....	36
2.1.2.2	Ponto de projeto	38
2.1.2.3	Índice de confiabilidade para equação de estado limite não-linear	39
2.1.3	<u>Método FORM</u>	40
2.1.3.1	Transformação de Nataf	41
2.1.3.2	Algoritmo FORM.....	45
2.2	Conceitos de RBDO	46
2.2.1	<u>Métodos de resolução do RBDO</u>	47
2.2.1.1	PMA x RIA	48
3.	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA A TRELIÇAS PLANAS	50
3.1	Limitações de problemas com variáveis inteiras	50
3.1.1	<u>Laplace crossover</u>	51
3.1.2	<u>Power mutation</u>	52

3.1.3	<u>Truncamento para variáveis inteiras</u>	53
3.2	Análises realizadas	54
3.3	Treliça de três barras	55
3.3.1	<u>Variáveis do Projeto</u>	56
3.3.2	<u>Restrições</u>	57
3.3.2.1	Restrições determinísticas.....	57
3.3.2.2	Restrições probabilísticas.....	59
3.3.3	<u>Parâmetros do algoritmo genético</u>	60
3.3.4	<u>Função Objetivo</u>	60
3.3.5	<u>Otimizações considerando duas variáveis de projeto</u>	61
3.3.5.1	Otimização determinística	61
3.3.5.2	Otimização determinística utilizando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008	65
3.3.5.3	Otimização baseada em confiabilidade	69
3.3.5.4	Probabilidade de falha	73
3.3.5.5	Comparação entre as otimizações envolvendo duas variáveis de projeto	75
3.3.6	<u>Otimizações considerando quatro variáveis de projeto</u>	76
3.3.6.1	Otimização determinística	76
3.3.6.2	Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008	79
3.3.6.3	Otimização baseada em confiabilidade	80
3.3.6.4	Probabilidade de falha	83
3.3.6.5	Comparação entre as otimizações envolvendo quatro variáveis de projeto	85
3.3.7	<u>Comparação entre as otimizações envolvendo duas e quatro variáveis de projeto</u>	86
3.4	Treliça de 13 barras	86
3.4.1	<u>Restrições</u>	88
3.4.2	<u>Parâmetros do algoritmo genético</u>	88
3.4.3	<u>Otimizações considerando duas variáveis de projeto</u>	89
3.4.3.1	Otimização determinística	89

3.4.3.2	Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008	94
3.4.3.3	Otimização baseada em confiabilidade	98
3.4.3.4	Probabilidade de falha	102
3.4.3.5	Comparação entre as otimizações considerando duas variáveis de projeto	104
3.4.4	<u>Otimizações considerando quatorze variáveis de projeto</u>	105
3.4.4.1	Otimização determinística	105
3.4.4.2	Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008	109
3.4.4.3	Otimização baseada em confiabilidade	111
3.4.4.4	Probabilidade de falha	116
3.4.4.5	Comparação entre as otimizações considerando quatorze variáveis de projeto	118
3.4.5	<u>Comparação entre as otimizações considerando duas e quatorze variáveis de projeto</u>	118
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	120
	Sugestões para trabalhos futuros	121
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE A- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 3 BARRAS, CONSIDERANDO DUAS VARIÁVEIS DE PROJETO	126
	APÊNDICE B- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 3 BARRAS, CONSIDERANDO QUATRO VARIÁVEIS DE PROJETO	129
	APÊNDICE C- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 13 BARRAS, CONSIDERANDO DUAS VARIÁVEIS DE PROJETO	132
	APÊNDICE D- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 13 BARRAS, CONSIDERANDO QUATORZE VARIÁVEIS DE PROJETO	135

INTRODUÇÃO

Uma das mais importantes ferramentas que auxiliam o engenheiro na realização de projetos de estruturas com melhores desempenhos e menores custos é a otimização estrutural. Para tal fim são utilizadas metodologias como a otimização dimensional, otimização de forma e a otimização topológica.

A otimização teve seus primeiros trabalhos realizados no final do século XIX, e início do século XX, podendo ser citado como exemplo o trabalho de Maxwell (1870), que buscou otimizar o volume de barras submetidas apenas a tensões normais.

Os projetos desenvolvidos a partir da otimização estrutural clássica apresentavam excelentes soluções desde que se mantivessem constantes as propriedades mecânicas dos materiais, as propriedades geométricas e os carregamentos, por exemplo. Dessa forma, projetos baseados na otimização estrutural clássica tendem a ser sensíveis a pequenas mudanças, e isso ocorre devido a mesma desconsiderar as incertezas existentes nos parâmetros de um projeto.

Por isso, buscando uma melhor aproximação do modelo estrutural real, Johnson (1953) previu a necessidade de quantificar a segurança das estruturas com base na teoria das probabilidades; além disso, Hilton e Feigen (1960) apresentaram o primeiro estudo envolvendo o conceito de incertezas nos parâmetros adotados, onde foi estudada a influência da incerteza contida nos carregamentos de uma estrutura na otimização da mesma.

Quando os conceitos de otimização estrutural são aplicados considerando as incertezas envolvidas em um projeto, é possível projetar estruturas ótimas com um certo nível de segurança, de forma que a otimização é realizada baseada em confiabilidade (Reliability Based Design Optimization - RBDO). Essa metodologia é utilizada quando são analisadas as restrições determinísticas da otimização estrutural em conjunto com as restrições probabilísticas, onde as últimas são avaliadas em termos do índice de confiabilidade ou probabilidade de falha da estrutura.

Stenvenson (1967) propôs realizar a otimização de um projeto utilizando a análise de confiabilidade, dando início ao estudo dos conceitos da RBDO. Já Moses (1969) elaborou o primeiro compilado de técnicas de otimização baseadas em confiabilidade.

A RBDO começou a ter expressão a partir da década de 80, principalmente devido ao desenvolvimento de softwares computacionais. Frangopol (1985) publicou uma revisão dos métodos de otimização com restrições em confiabilidade, e concluiu que a RBDO é aplicável para engenheiros atentando para a necessidade da elaboração de um software que seja capaz de realizar tais métodos com mais praticidade.

Sepúlveda (1996) propôs realizar a otimização com restrição de confiabilidade, utilizando uma sequência de problemas aproximados em uma estrutura sob condições de serviço. Os exemplos numéricos utilizados mostraram a eficiência do método estabelecido.

No início do século XXI, com o amadurecimento e estabelecimento da tecnologia, os métodos de otimização e confiabilidade foram ficando cada vez mais sofisticados, por consequência, houve aumento expressivo nos trabalhos publicados sobre o tema em questão.

Royset, Der Kiureghian e Polak (2001) apresentaram estudo do desacoplamento dos processos de otimização e confiabilidade na RBDO, tornando flexível a escolha de qualquer algoritmo para resolver o processo de confiabilidade e otimização, alcançando as mesmas soluções dos problemas originais. Também abordaram o presente assunto em seus livros, os autores Melchers (2002) e Ang e Tang (2007).

Eboli e Vaz (2005) realizaram duas otimizações baseadas em confiabilidade em uma treliça plana de 10 barras, tal que uma foi desenvolvida segundo o método RIA (*Reliability Index Approach*), e a outra baseada no método PMA (*Performance Measure Approach*), com o objetivo de examinar como a confiabilidade se relaciona com o custo. Com os resultados verificaram que as duas abordagens geraram a mesma solução com a convergência da otimização, porém concluíram que o método PMA é mais confiável que o método RIA.

Pereira (2007) desenvolveu um sistema computacional para realizar comparação entre um projeto ótimo determinístico e um projeto ótimo baseado em

confiabilidade, aplicado a treliças espaciais, considerando a não-linearidade da geometria, e a carga crítica, no comportamento da estrutura.

Na última década outros trabalhos também foram publicados, como por exemplo, Valdebenito e Schueller (2010) que elaboraram revisão sobre a otimização baseada em confiabilidade, inserindo novos conceitos como, por exemplo, redes neurais. Gomes (2010), apresentou um estudo comparando os resultados da otimização determinística, otimização baseada em confiabilidade, e a otimização de risco estrutural aplicados em barras com sistemas em paralelo e série, uma treliça plana e uma coluna de aço com perfis U contraventados, e concluiu que a otimização de risco se mostrou mais abrangente e eficiente.

Moustapha et al. (2016) consideraram as restrições de probabilidade de falha como restrições dos quantis dos critérios de desempenho, de forma que os mesmos controlam o grau de conservadorismo do projeto.

Além disso, Teixeira (2017) desenvolveu um método para realizar uma otimização robusta considerando incertezas no módulo de elasticidade do material utilizado, a partir do software Matlab junto ao programa PROAES. Kroetz (2019) apresentou três métodos de resolução de otimização baseada em confiabilidade, a aplicou na calibração de coeficientes de segurança, considerando ainda a degradação de estruturas no estudo de otimização de riscos.

Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo realizar a otimização de treliças planas formadas por barras tubulares de aço, utilizando como restrições não-lineares a função de falha dos elementos, o índice de esbeltez limite, e o deslocamento máximo permitido; as restrições lineares se referem à geometria da seção transversal, para evitar uma incompatibilidade entre as dimensões (raio interno e espessura) dos elementos da estrutura, e à flambagem local.

As otimizações serão realizadas a partir dos conceitos do algoritmo genético com o auxílio do software Matlab. As restrições serão estudadas a partir de funções de penalidade aplicadas na função objetivo.

Serão avaliados dois modos de falha: falha por escoamento, e por flambagem nas barras comprimidas. Essas análises serão realizadas com o modo de falha referente ao escoamento atuando isoladamente, e os dois modos de falha atuando juntos no processo de otimização baseada em confiabilidade, visando obter a influência de cada situação na função objetivo do problema. Além disso, a otimização baseada em confiabilidade será feita a partir do método PMA, em conjunto com o método de transformação FORM (*First Order Reliability Method*).

Todas as análises terão como função objetivo o volume mínimo da estrutura, perante as restrições aqui expostas.

Organização do trabalho

O presente trabalho se encontra seccionado, através de capítulos, da seguinte forma:

No capítulo 1 é realizada uma revisão bibliográfica sobre otimização estrutural, discutindo os métodos e conceitos que serão utilizados ao longo do trabalho. Ainda no primeiro capítulo, são apresentados os conceitos e parâmetros do algoritmo genético.

Já o segundo capítulo aborda os conceitos que envolvem a otimização baseada em confiabilidade, bem como os métodos de transformação FOSM (*First Order Second Moment*) e FORM, em forma de revisão bibliográfica.

No 3º capítulo são apresentados dois exemplos numéricos de aplicação de RBDO em treliças planas. São expostos todos os procedimentos adotados para o seu desenvolvimento, além dos resultados e discussões gerados.

Por fim, o último capítulo aborda as conclusões obtidas através dos procedimentos de otimização, adotados ao longo dos dois exemplos numéricos apresentados. Neste capítulo são expostas, também, sugestões de trabalhos futuros, buscando continuidade no estudo realizado.

1. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

1.1 Conceitos básicos

Na engenharia estrutural, a otimização pretende dimensionar uma estrutura, com ou sem restrições, da melhor forma possível, de modo que a mesma não apresente falha ao longo da sua vida útil, visando atingir um objetivo específico, como, por exemplo, o volume ou o peso mínimo da estrutura, resultando no menor custo do projeto. As restrições usualmente utilizadas na otimização estrutural são associadas à tensão e ao deslocamento.

Segundo Vanderplaats (1984), o problema de otimização consiste, matematicamente, em achar um vetor que minimize uma função, chamada de função objetivo, sujeita a restrições de desigualdade e de igualdade, de acordo com a Equação 1.

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeita a:} \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ \text{e} \\ h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, l \end{cases} \quad (1)$$

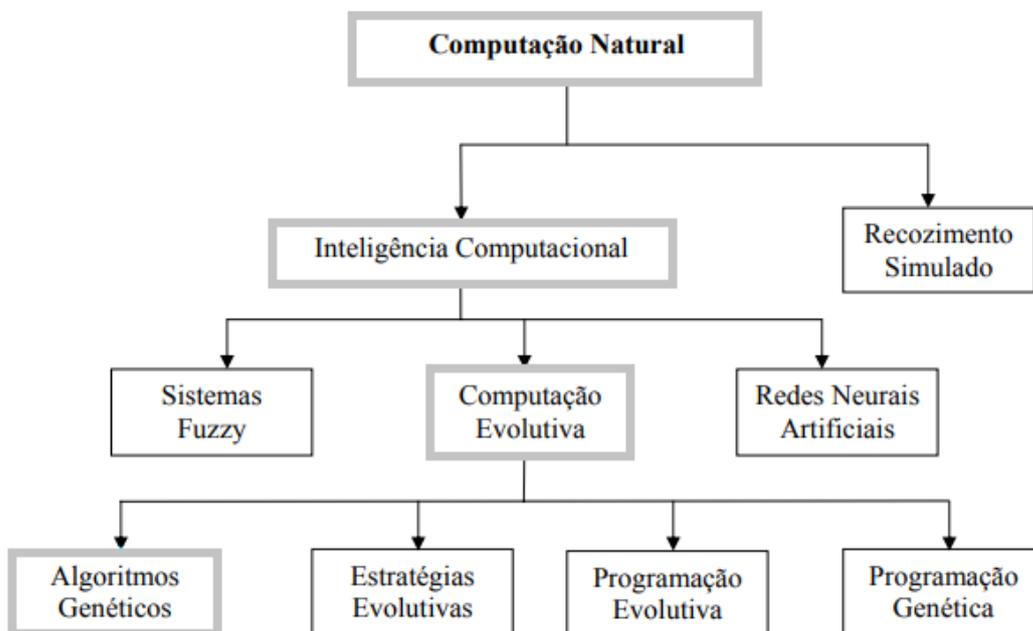
Portanto, o problema pode ser estudado como uma maneira iterativa de encontrar uma direção de busca que minimiza uma função objetivo qualquer, possuindo restrições de igualdade ou desigualdade.

A estratégia adotada para se determinar a direção de busca é o que define qual dos diferentes métodos de resolução existentes será utilizado; esses variam de acordo com as características das funções objetivo e das restrições, e suas classificações variam na literatura.

Encontram-se na literatura métodos que se baseiam em fenômenos ou processos encontrados na natureza, conhecidos como computação natural. De acordo com Olivieri (2004), essa área pode ser dividida em várias subáreas, destacando-se o recozimento simulado e a inteligência computacional. Nessa última subárea destacam-se a lógica Fuzzy, as redes neurais artificiais e a computação

evolucionária, que pode ser subdividida, incluindo a técnica de algoritmos genéticos, método que será abordado neste trabalho (Figura 1).

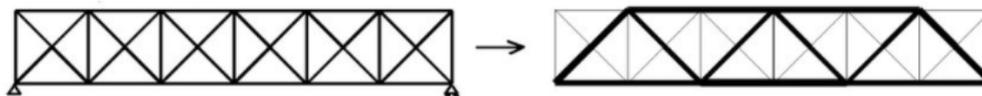
Figura 1- Sistemas da computação natural



Fonte: Olivieri, 2004.

Pode-se ainda dividir o processo de otimização estrutural em três classes: otimização dimensional (ou de tamanho), de forma e topológica. A otimização dimensional (Figura 2) tem como objetivo tornar uma peça ótima a partir da modificação das suas dimensões, como por exemplo, a área da seção transversal.

Figura 2- Otimização dimensional ou de tamanho



Fonte: Bendsoe, 2003.

Já a otimização de forma (Figura 3) consiste em definir a forma do contorno da estrutura tornando-a ótima, enquanto a otimização topológica (Figura 4) define a melhor distribuição de material possível para que se extremize a função objetivo.

Figura 3- Otimização de forma



Fonte: Bendsoe, 2003.

Figura 4- Otimização topológica



Fonte: Bendsoe, 2003.

No presente trabalho será realizada a otimização dimensional a partir do uso de algoritmo genético, que será abordado na próxima seção.

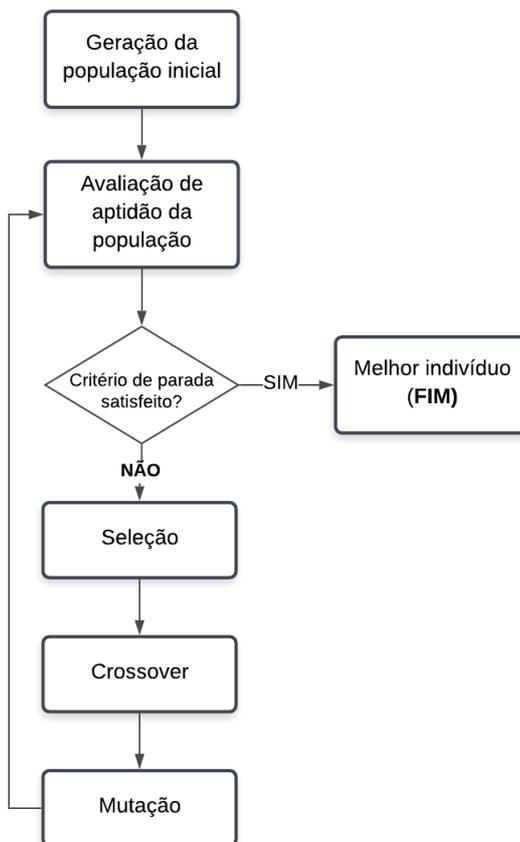
1.2 Algoritmo Genético

Como dito anteriormente, o processo de busca do valor ótimo pode ser realizado a partir de vários métodos distintos; dentre eles encontramos o algoritmo genético que se trata de um método baseado no processo de seleção natural de Charles Darwin, no século XIX. Esse método foi proposto por John Holland na década de 70.

De acordo com Gen e Cheng (1999), este método consiste em imitar matematicamente os processos de evolução natural, a partir da sobrevivência e adaptação dos indivíduos após processos de seleção, reprodução e mutação genética. Dessa forma, é gerada inicialmente uma população formada por um conjunto aleatório de indivíduos codificados, que passam a representar uma solução em potencial para o problema adotado. Tais indivíduos sofrem seleção e transformações (mutação e crossover) gerando novos indivíduos, que por sua vez criam novas populações. Após algumas gerações o algoritmo converge para o indivíduo ótimo (ou quase ótimo) para solucionar o problema em questão.

De forma resumida, o método descrito pode ser representado pela Figura 5.

Figura 5- Fluxograma do algoritmo genético



Fonte: Autora, 2020.

1.2.1 Definições

Algumas definições envolvidas no processo do algoritmo genético são necessárias para o entendimento do assunto, e serão listadas abaixo.

- Indivíduo: possível solução para o problema.
- Cromossomo: cadeia de caracteres que representam os indivíduos, ou seja, são os indivíduos codificados.
- População: conjunto de indivíduos.
- Geração: total de iterações que gera uma nova população

1.2.2 Codificação dos indivíduos

Castro (2001) enfatiza que a codificação das variáveis (indivíduos) envolvidas no projeto deve ser a mais simples possível, sem que haja perda de representação do problema em questão.

A codificação mais utilizada e relatada nos trabalhos acadêmicos é realizada a partir dos números binários, e a partir dessa codificação, o algoritmo genético passa a manipular os cromossomos, não as variáveis iniciais.

1.2.3 Seleção

O processo de otimização via algoritmo genético requer um ciclo reprodutivo que consiste na seleção dos pais, o cruzamento dos pais para gerar filhos, e uma mutação que altera os cromossomos dos filhos visando garantir a diversidade.

Em determinado problema, cada indivíduo da população passa a ser uma possível solução. Dessa forma, torna-se necessário realizar seleção para que as melhores soluções sejam mantidas, e as piores soluções sejam descartadas.

De acordo com Arora (2012) no processo de seleção, os indivíduos são escolhidos de acordo com o seu nível de aptidão. Assim sendo, os indivíduos selecionados irão gerar descendentes mais aptos para a resolução do problema.

Dentre os variados métodos de seleção dos indivíduos, podemos citar o método da seleção por classificação, o método da roleta (Roulette Wheel) e o método por torneio (Goldberg e Deb, 1991).

Esse último se trata de um método em que são escolhidos aleatoriamente indivíduos de uma população, e desses indivíduos, são escolhidos os mais aptos, ou seja, os que apresentam os melhores valores de aptidão. Esse processo é repetido, até se obter a quantidade de indivíduos necessária para realizar o crossover (geração de novos indivíduos). Portanto, os melhores indivíduos são perpetuados, e os que não apresentam boa aptidão são eliminados ao longo das iterações.

1.2.4 Método de geração de novos indivíduos (Crossover)

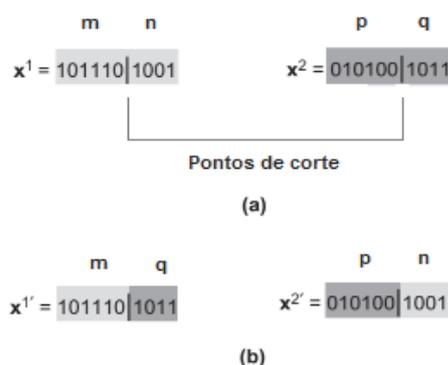
Após a seleção dos indivíduos é iniciado o processo de geração de novos indivíduos que pode ser realizado através do cruzamento dos pais selecionados. Neste processo não são inseridos novos indivíduos.

Os indivíduos pais se “relacionam” e através da troca de seus cromossomos dão origem aos filhos; dessa forma, a troca genética garante uma boa diversidade entre os novos indivíduos.

São vários os métodos de cruzamento encontrados na literatura, como por exemplo, o método de cruzamento por um ponto, ou por mais de um ponto, encontrados em Arora (2012), e o método do cruzamento uniforme, encontrado em Ackley (1987).

O método de cruzamento mais simples, é o método de cruzamento por um ponto. De acordo com Arora (2012) este método consiste em “cortar” os cromossomos pai 1 (x^1) e o pai 2 (x^2) em apenas um ponto de forma aleatória, formando pares de conjuntos de cromossomos de cada pai, conforme a Figura 6.a. Após o procedimento são feitas combinações com os pares de cromossomos disponíveis, gerando os filhos (x^1 e x^2), conforme a Figura 6.b.

Figura 6- Cruzamento em apenas um ponto



Fonte: Adaptado de Arora, 2012.

Já o método de cruzamento em mais pontos trata-se do mesmo processo dito anteriormente, modificando apenas o número de pontos em que serão realizados os “cortes” dos indivíduos pais.

De acordo com Rao (2009), os pontos escolhidos para realizar os “cortes” dos cromossomos podem gerar indivíduos filhos com as melhores características dos pais 1 e 2, ou não. Se sim, eles contribuirão de forma positiva para a formação da população; caso negativo, eles serão eliminados ao longo do ciclo do algoritmo genético por possuírem menor chance de serem selecionados.

1.2.5 Mutação

Visando garantir a diversidade dos indivíduos de uma população, de modo a evitar a convergência para um mínimo local e conseqüentemente um falso resultado satisfatório, é necessário realizar mutações ao longo da otimização. De acordo com Arora (2012), essas mutações são realizadas a partir da troca de um cromossomo em um determinado indivíduo.

Caso a codificação escolhida tenha sido a binária, essa mutação é realizada trocando-se um bit aleatório, conforme ilustra a Figura 7.

Figura 7- Processo de mutação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= 101 \mid 1101 \mid 001 \\ \mathbf{x}^{1'} &= 101 \mid 1001 \mid 001 \end{aligned}$$

Fonte: Adaptado de Arora, 2012.

1.2.6 Tratamento das restrições

Otimizações realizadas a partir de algoritmos genéticos são tratadas como irrestritas, e buscando considera-las podem ser utilizados diversos métodos.

Dentre eles é possível citar o método desenvolvido por Deb (2000), que consiste em considerar as restrições, penalizando a função objetivo caso uma dada variável viole uma ou mais restrições.

Segundo Deb (2000), a função objetivo penalizada pode ser definida como:

$$F(x_i) = \begin{cases} f(x_i) & \text{se } x_i \text{ é viável} \\ f_{max}(x_i) + \sum_{j=1}^m g_j(x_i) & \text{se } x_i \text{ não é viável} \end{cases} \quad (2)$$

onde $F(x_i)$ é a função objetivo penalizada, $f(x_i)$ é a função objetivo original, $f_{max}(x_i)$ é o valor da função objetivo original para a pior solução viável atualmente disponível na população, e $g_j(x)$ se refere ao lado esquerdo das restrições de desigualdade do problema, e corresponde às violações de todas as restrições do problema.

Adotando essa solução para o problema é possível perceber que nos casos em que a solução não é viável, o valor que a nova função objetivo terá não depende apenas da soma das violações das restrições, mas também dos indivíduos que se encontram na população que se tem disponível ($f_{max}(x_i)$).

Caso não exista solução viável na população, para esse método o valor de $f_{max}(x_i)$ é tomado como 0.

É possível perceber que nesse método aproximado, não são utilizados os parâmetros de penalidade, porque o método consiste em comparar as soluções geradas usando o operador de torneio, seguindo as seguintes regras:

- a) A solução viável é sempre preferida em vez da solução inviável;
- b) Entre duas soluções viáveis é preferida a que apresenta a menor função objetivo;
- c) Entre duas soluções inviáveis é preferida aquela que apresenta a menor violação das restrições.

As violações das restrições são normalizadas para evitar comparações entre unidades de medida diferentes.

Os conceitos até então abordados serão utilizados, junto aos conceitos de confiabilidade, para realizar a RBDO, a qual será mais bem descrita na seção a seguir.

2. OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE (RBDO)

A otimização determinística (DDO) não leva em consideração as incertezas das variáveis envolvidas em um projeto. Com o objetivo de inseri-las no estudo da otimização, foi desenvolvida a RBDO, na qual são inseridos os conceitos de confiabilidade como restrição nos processos de otimização, gerando assim estruturas mais econômicas que apresentam uma segurança obtida por índices de confiabilidade prescritos.

2.1 Confiabilidade

Beck (2019) diz que a confiabilidade de um projeto é a probabilidade do mesmo não apresentar falhas ao longo de sua vida útil; já a probabilidade de falha é o complemento do anterior, ou seja, é a probabilidade de o projeto apresentar falhas ao longo de sua vida útil.

De acordo com Sagrilo (2004), a confiabilidade C de uma estrutura pode ser obtida a partir da probabilidade de falha (P_f) da estrutura, onde:

$$C = 1 - P_f \quad (3)$$

Buscando estudar e quantificar a confiabilidade de uma estrutura projetada, pesquisadores desenvolveram métodos de cálculo que analisam os efeitos das incertezas de todas as variáveis de um projeto. Porém, o estudo da quantificação dessas incertezas e seus respectivos efeitos na performance do sistema deve incluir os conceitos de probabilidade e estatística.

Segundo Rojas Eraso (2011), para desenvolver a análise numérica da confiabilidade estrutural deve-se realizar duas etapas. A primeira consiste em determinar o modelo de falha; para tal, é necessário estabelecer um modo de falha através da verificação do estado limite da estrutura. E na segunda, realiza-se o cálculo da probabilidade de falha.

Para tal existem alguns métodos aproximados que já são utilizados nas pesquisas de confiabilidade, como o método analítico de aproximação de primeira

ordem, conhecido como FORM, de segunda ordem, conhecido como SORM, o método de simulação de Monte Carlo, entre outros.

2.1.1 Função de falha e probabilidade de falha

A função de falha de uma estrutura é a função que representa o estado limite da mesma, e depende das variáveis aleatórias que se encontram no projeto dessa estrutura. Podemos representá-la por $g(X)$, onde X é um vetor de variáveis.

Logo é possível dizer que a função de falha $g(X)$ de uma estrutura é uma função que depende das mesmas variáveis X_i do vetor X , e pode ser representada conforme a equação abaixo.

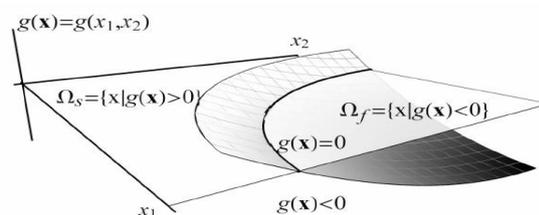
$$g(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4)$$

Beck (2019) conclui que a partir da função de falha $g(X)$ é possível perceber que podem ser definidas regiões de falha, ou não, de tal forma que $g(X) < 0$ indica que X pertence a um domínio de falha (Ω_F), $g(X) > 0$ indica que X pertence a um domínio de sobrevivência (Ω_S), e $g(X)=0$ indica que X está na iminência de falha (Figura 8), ou seja,

$$\Omega_F = \{ X \mid g(X) < 0 \} \quad (5)$$

$$\Omega_S = \{ X \mid g(X) > 0 \} \quad (6)$$

Figura 8- Função de falha e domínios de falha e sobrevivência.



Fonte: Beck, 2019.

A equação de estado limite pode ser representada por:

$$g(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (7)$$

Segundo Sagrilo (2004), a partir de uma função densidade de probabilidade conjunta de todas as variáveis X , representada por $f_X(x)$, a probabilidade de falha pode ser escrita da seguinte forma:

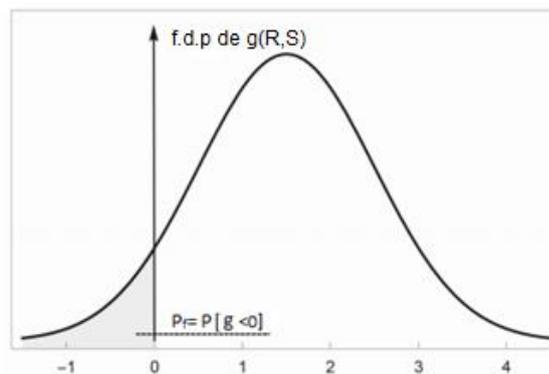
$$P_f = \int_{G < 0} f_X(x) dx \quad (8)$$

O sistema tipo R-S (Resistência-Solicitação) é um dos métodos mais conhecidos que visa avaliar a probabilidade de falha de um sistema, e de acordo com este sistema é possível estudar o problema de confiabilidade de forma a garantir que $R > S$ ao longo da vida útil da estrutura, onde R representa a resistência da estrutura a ser analisada, e S representa a solicitação que estará presente na estrutura.

Portanto, a equação de estado limite desse sistema pode ser escrita conforme a equação abaixo, e sua probabilidade de falha está sendo representada a partir da Figura 9.

$$g(R,S) = R - S \quad (9)$$

Figura 9- Probabilidade de falha da função $g(R,S)$

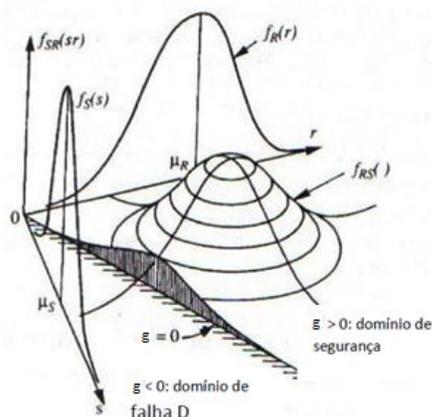


Fonte: Adaptado de Beck, 2019.

Tomando $f_R(r)$ como a função densidade de probabilidade da resistência e $f_S(s)$ da solicitação existentes em uma determinada estrutura, tem-se $f_{RS}(r,s)$ como a função conjunta de densidade probabilidade.

Dessa forma é possível representá-las conforme a Figura 10:

Figura 10- Funções $f_R(r)$, $f_S(s)$, $f_{RS}(r,s)$ e $g(X)$.



Fonte: Adaptado de Melchers, 2002.

Segundo Ang e Tang (2007), sendo R e S variáveis aleatórias contínuas e independentes, a probabilidade de falha de uma estrutura pode ser encontrada através da equação:

$$P_f = P(R < S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds \quad (10)$$

Com o conceito de função distribuição acumulada é possível reescrever a Equação 10 da seguinte forma:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) \cdot f_S(s) ds \quad (11)$$

onde F_R é a função distribuição acumulada.

Visando solucionar a Equação 8 são adotados métodos de cálculo aproximados conforme já descrito, e que serão comentados nas próximas seções desse trabalho.

2.1.2 Método FOSM

Em problemas reais, podemos ter a presença de variáveis que apresentam correlação entre si, ou funções de falha bastante complexas, e até mesmo variáveis

que não são normais, situações que tornam a avaliação da Equação 8 difícil de ser realizada.

Visando sanar esse problema, o método de primeira ordem e segundo momento, conhecido como FOSM, foi o primeiro método aproximado desenvolvido e se tornou base para todos os outros que apareceram após ele.

Esse método busca aproximar a equação do estado limite por uma função linear, e utiliza informações estatísticas limitadas aos momentos de segunda ordem (média e covariância) para a construção da função $f_X(x)$. Portanto, esse método se limita a trabalhar apenas com variáveis normais, o que se traduz como uma grande deficiência do método, pois muitos problemas práticos apresentam variáveis que não possuem essa distribuição.

2.1.2.1 Índice de confiabilidade para equação de estado limite linear

Segundo Hasofer e Lind (1974), a Equação 12 realiza a transformação de um vetor X de variáveis normais com média μ_X e desvio-padrão σ_X , em um vetor Y que possui apenas variáveis aleatórias normais padrão, ou seja, variáveis com média 0 e desvio padrão 1.

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (12)$$

Considerando um sistema R-S, cuja função de falha $g(R,S)=0$ é linear, e cujas variáveis são normais e independentes, é possível calcular os valores de média e desvio padrão de $g(R,S)$, de acordo com os conceitos da estatística, conforme estas equações:

$$\mu_g = \mu_R - \mu_S \quad (13)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (14)$$

Assim sendo, a variável normal G pode ser escrita como uma variável normal padrão (Y_g), utilizando a transformação da Equação 12:

$$Y_g = \frac{g - \mu_g}{\sigma_g} \quad (15)$$

Sabendo que a probabilidade de falha ocorre quando a estrutura alcança a zona de ruptura, é possível escrever a probabilidade de falha no espaço normal padrão, da seguinte forma:

$$P_f = P\left(Y_g \leq -\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right) \quad (16)$$

A partir da transformação dada pela Equação 12, é possível obter a probabilidade de falha.

$$P_f = P\left(\frac{\mu_S - \mu_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \leq 0\right) \quad (17)$$

Nota-se que a Equação 17 representa a função cumulativa normal padrão de $g(R,S)$, logo, é possível representar a probabilidade de falha de um sistema R-S linear, com variáveis normais padrão, a partir da Equação 18.

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) \quad (18)$$

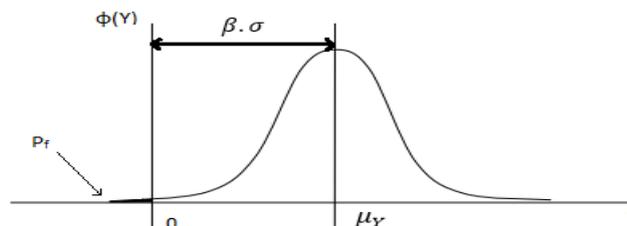
onde β é conhecido como índice de confiabilidade de Cornell.

Da Equação 18 é possível expressar o índice de confiabilidade a partir da média e do desvio padrão.

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (19)$$

Consequentemente, Cornell (1969) concluiu que o índice de confiabilidade é a distância entre o valor médio de Y_g e o estado limite em unidades de desvio padrão (Figura 11).

Figura 11- Função densidade probabilidade e o índice de confiabilidade



Fonte: Autora, 2020.

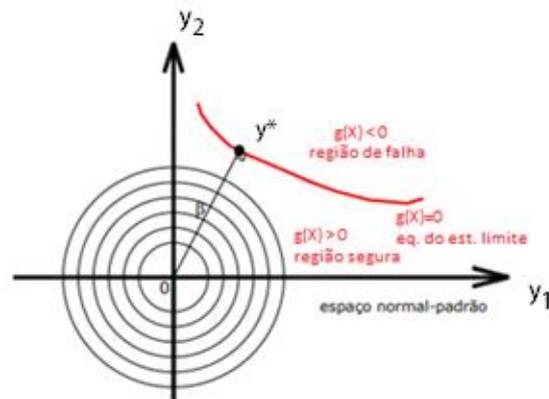
Cabe ressaltar que o índice de confiabilidade de Cornell gera resultados exatos quando utilizado em equações de estado limite que são lineares.

Em equações do estado limite que não são lineares não é possível realizar a transformação das variáveis com distribuições quaisquer em normais padrão imediatamente. Assim sendo é necessário realizar transformações isoprobabilísticas, ou seja, transformações que garantam que haja o mesmo conteúdo em termos de probabilidades nos dois espaços (o espaço em que a variável se encontra e o espaço normal padrão). Essas dependem do tipo de distribuição de probabilidade das variáveis e da correlação entre elas.

2.1.2.2 Ponto de projeto

Chama-se de ponto de projeto (y^*) o ponto no espaço normal padrão, sobre a equação de estado limite com a maior probabilidade de ocorrência de falha (Figura 12), e por isso é o ponto ideal para realizar a linearização da equação de estado limite quando a mesma não for linear.

Figura 12- Índice de confiabilidade e ponto de projeto



Fonte: Adaptado de Nogueira, 2010.

Dado um determinado vetor Y composto por variáveis aleatórias normais padrão, o cálculo do índice de confiabilidade pode ser realizado a partir de um problema de otimização conforme descrito abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar o ponto } y^* (y_1^*, y_2^*) \\ \text{que minimiza } d = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \text{sujeito a } g(y_1, y_2) = 0. \end{array} \right. \quad (20)$$

onde y^* é o ponto de projeto, e d é a distância do ponto em questão até a origem do espaço normal padrão, que pode ser considerado da seguinte forma:

- Problemas com duas variáveis:

$$d = \sqrt{y_1^* \cdot y_2^*} \quad (21)$$

- Problemas com n variáveis:

$$d = \sqrt{y^{*T} \cdot y^*} \quad (22)$$

Essa distância d , quando minimizada, é conhecida como índice de confiabilidade de Hasofer e Lind (1974).

Dessa forma, é possível representar as coordenadas do ponto de projeto y^* em termos do índice de confiabilidade, a partir de um vetor unitário que aponta na direção de crescimento da função de falha, pois é no ponto de projeto que a origem do espaço normal padrão se projeta ortogonalmente sobre equação de estado limite. Consequentemente pode-se expressar o ponto de projeto y^* da seguinte forma:

$$y^* = -\alpha \cdot \beta \quad (23)$$

onde α é o vetor unitário dado por:

$$\alpha(y) = \frac{\nabla g(y)}{\|\nabla g(y)\|} \quad (24)$$

2.1.2.3 Índice de confiabilidade para equação de estado limite não-linear

Como dito anteriormente, o índice de confiabilidade de Cornell só pode ser utilizado em equações de estado limite lineares, e para resolver esse problema, ou seja, para encontrar o índice de confiabilidade de problemas cuja equação de estado limite é não-linear deve-se resolver o problema de otimização da Equação 20.

Para isso utiliza-se um algoritmo que realize a busca do zero da aproximação da equação de estado limite por um hiperplano ($g(y)=0$), tornando-a linear, como por exemplo o de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, ou HLLRF.

Portanto, dado y_k como um ponto qualquer possível de aproximar o vetor perpendicular a $g(y)=0$, passando necessariamente pela origem do espaço normal padrão, se expandirmos no ponto y_k a equação de estado limite através da expansão de Taylor, utilizando apenas os termos de primeira ordem, tem-se:

$$\tilde{g}(y_{k+1}) = g(y_k) + \nabla g(y_k)^T \cdot (y_{k+1} - y_k) \quad (25)$$

Tomando $\tilde{g}(y_{k+1})$ igual a 0 é possível reescrever a Equação 25 da seguinte forma:

$$\nabla g(y_k)^T \cdot y_{k+1} = -g(y_k) + \nabla g(y_k)^T \cdot y_k \quad (26)$$

Substituindo o valor de y_k por $-\alpha_k \cdot \beta$ (Eq. 23), na equação acima, e multiplicando o termo do lado esquerdo por $\alpha_k^T \alpha_k$, haja visto que o mesmo não irá interferir no resultado já que possui comprimento unitário, tem-se:

$$y_{k+1} = -\alpha_k \cdot \left(\beta_k + \frac{g(y_k)}{\|\nabla g(y_k)\|} \right) \quad (27)$$

O termo entre parênteses representa o novo índice de confiabilidade encontrado.

São realizadas diversas iterações, a partir de um ponto inicial qualquer y_k , até o termo no interior dos parênteses permanecer constante dentro de uma determinada tolerância pré-definida. Quando alcançada essa tolerância, o processo está concluído e o ponto encontrado é o ponto de projeto.

Conseqüentemente é possível encontrar o índice de confiabilidade a partir das Equações 21 e 22.

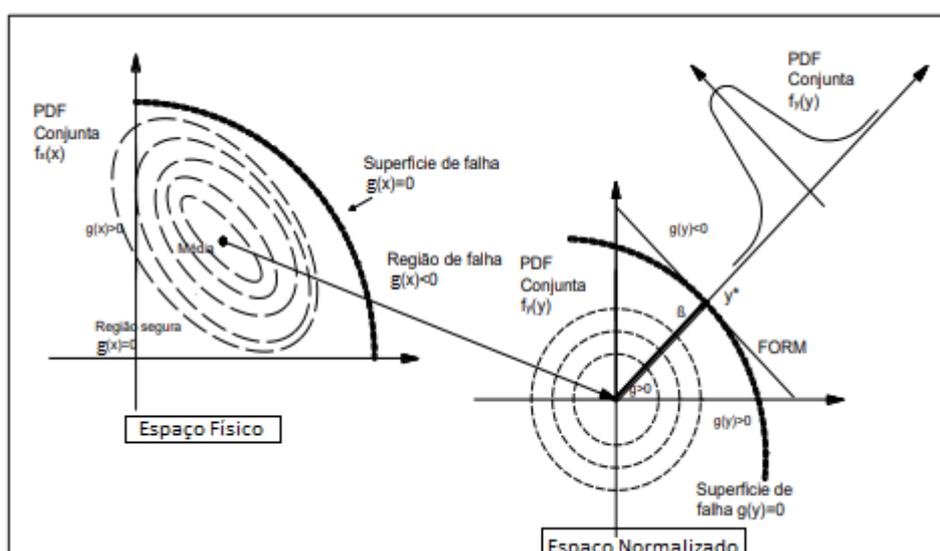
2.1.3 Método FORM

Uma extensão do método FOSM é o método de primeira ordem conhecido como FORM, e segundo, Santiago (2018), ao contrário do FOSM, o método FORM permite construir uma função $f_x(X)$ a partir das funções distribuições marginais e dos coeficientes de correlação existentes entre as variáveis. Assim, o método permite

avaliar variáveis com distribuições quaisquer, que podem possuir correlações, mostrando-se mais útil e versátil para problemas práticos quando comparado ao método FOSM.

Essas transformações do espaço físico X (variáveis com distribuições quaisquer) para o espaço Y (variáveis com distribuição normal padrão), conforme Figura 13, podem ser realizadas, por exemplo, através da transformação de Rosenblatt ou de Nataf. Neste trabalho será utilizada a transformação de Nataf.

Figura 13- Transformação do espaço físico (X) para o espaço normalizado (Y)



Fonte: Adaptado de Narvaéz, 2012.

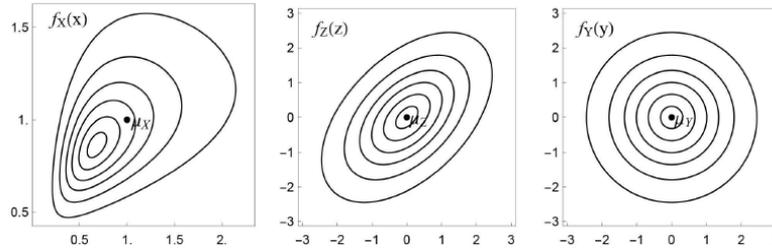
Após as variáveis serem transformadas para o espaço normal padrão (Y), o processo de cálculo do índice de confiabilidade passa a ser igual ao abordado na seção 2.1.2.2.

2.1.3.1 Transformação de Nataf

Esse método consiste em transformar as distribuições do espaço físico (espaço X) em distribuições normais equivalentes (variáveis correlacionadas-espaço Z), a partir do princípio da aproximação normal, bem como eliminar as correlações entre as variáveis a partir da decomposição ortogonal ou da

decomposição de Cholesky da matriz de correlação R, resultando em variáveis normais padrão (espaço Y), conforme mostra a Figura 14:

Figura 14- Transformação X-Z-Y



Fonte: Beck, 2019.

Buscando realizar a transformação isoprobabilística do espaço X (espaço de variáveis com qualquer distribuição de probabilidade) para o espaço Z (espaço de variáveis com distribuição normal equivalente e com variáveis correlacionadas), é utilizado o princípio da aproximação normal.

Este princípio, de acordo com Beck (2019), consiste em determinar uma função normal equivalente para um ponto x_i^* , de forma a preservar o conteúdo da função distribuição de probabilidade original $f_{X_i}(x_i^*)$ nesse ponto, conforme as Equações 28 e 29:

$$F^{\text{neq}}_{X_i}(x_i^*) = F_{X_i}(x_i^*) \quad (28)$$

$$f^{\text{neq}}_{X_i}(x_i^*) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (29)$$

Nota-se que é possível encontrar, a partir da Equação 12, o conjunto de variáveis Z_i que se encontram no espaço normal padrão e que podem ser ou não correlacionadas:

$$Z_i = \frac{x_i - \mu_{X_i}^{\text{neq}}}{\sigma_{X_i}^{\text{neq}}} \quad (30)$$

onde $\mu_{X_i}^{\text{neq}}$ e $\sigma_{X_i}^{\text{neq}}$ são vetores de média e desvio-padrão equivalentes, respectivamente.

A partir das Equações 29 e 30 tem-se:

$$f_{X_i}(x_i^*) = \frac{\phi(Z_i^*)}{\sigma_{X_i}^{\text{neq}}} \implies \sigma_{X_i}^{\text{neq}} = \frac{\phi(Z_i^*)}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (31)$$

Os vetores média e desvio-padrão equivalentes podem ser escritos na forma matricial para auxiliar na transformação do espaço X para o espaço Z:

$$M^{neq} = \begin{Bmatrix} \mu_{x1}^{neq} \\ \mu_{x2}^{neq} \\ \mu_{x3}^{neq} \\ \dots \\ \mu_{xn}^{neq} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$D^{neq} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^{neq} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{xn}^{neq} \end{bmatrix} \quad (33)$$

A partir da Equação 31 é possível escrever a matriz desvio-padrão D^{neq} , e a matriz do inverso dos elementos da matriz D^{neq} , representada por $(D^{neq})^{-1}$, a partir de matrizes Jacobianas, como mostram as equações a seguir:

$$J_{xz} = D^{neq} \quad (34)$$

$$J_{zx} = (D^{neq})^{-1} \quad (35)$$

Dessa forma, substituindo as Equações 32 e 35 na Equação 30, tem-se a seguinte transformação matricial do espaço X para o espaço Z:

$$z = J_{zx} \cdot \{x_i^* - M^{neq}\} \quad (36)$$

De forma análoga à anterior é possível resolver a transformação matricial do espaço Z para o espaço X, substituindo as Equações 32 e 34 na Equação 30, conforme indica a próxima equação:

$$x = J_{xz} \cdot z + M^{neq} \quad (37)$$

A partir das Equações 36 e 37 são feitas as transformações necessárias para o desenvolvimento do método FORM, transformando as variáveis com distribuição qualquer em variáveis normais padrão que podem estar correlacionadas, ou não.

Visando retirar a correlação entre as variáveis de um problema de confiabilidade, de modo a utilizar as propriedades de simetria da distribuição normal padrão, são utilizados os métodos de decomposição da matriz de correlação R_z conhecidos como decomposição ortogonal e decomposição de Cholesky.

O método da decomposição de Cholesky só pode ser utilizado em matrizes de correlação não cheias, porém, Beck (2019) sugere utilizar tal método em casos

de confiabilidade por se tratarem de casos típicos em que a matriz se comporta da forma dita, principalmente por ser um método com pouco custo computacional. Para informações sobre a decomposição ortogonal a autora sugere consultar Beck (2019).

O método da decomposição de Cholesky consiste em encontrar uma matriz A , a partir de uma transformação linear (Eq. 38), que transforme as variáveis dependentes (z) em variáveis independentes (y).

$$y = A^T \cdot z \quad (38)$$

A partir da matriz de covariância em Y , C_Y , é necessário encontrar uma matriz A^T que satisfaça a Equação 39:

$$C_Y = A^T \cdot C_z \cdot A = I \quad (39)$$

A matriz C_Y foi igualada à matriz identidade visando garantir que a variância das variáveis seja unitária.

Multiplicando os dois lados da Equação 39 por $(A^T)^{-1}$ e por A^{-1} tem-se:

$$C_z = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} \quad (40)$$

Tomando $(A^T)^{-1}$ como L e conseqüentemente A^{-1} como L^T , tem-se:

$$C_z = L \cdot L^T \quad (41)$$

Assim, é possível perceber que a Equação 41 tem a forma de uma decomposição de Cholesky, de forma que L e L^T são as decomposições da matriz correlação em Z .

Portanto, a partir do que foi adotado ao longo da demonstração, é possível escrever os Jacobianos da transformação $y = A^T \cdot z$ como:

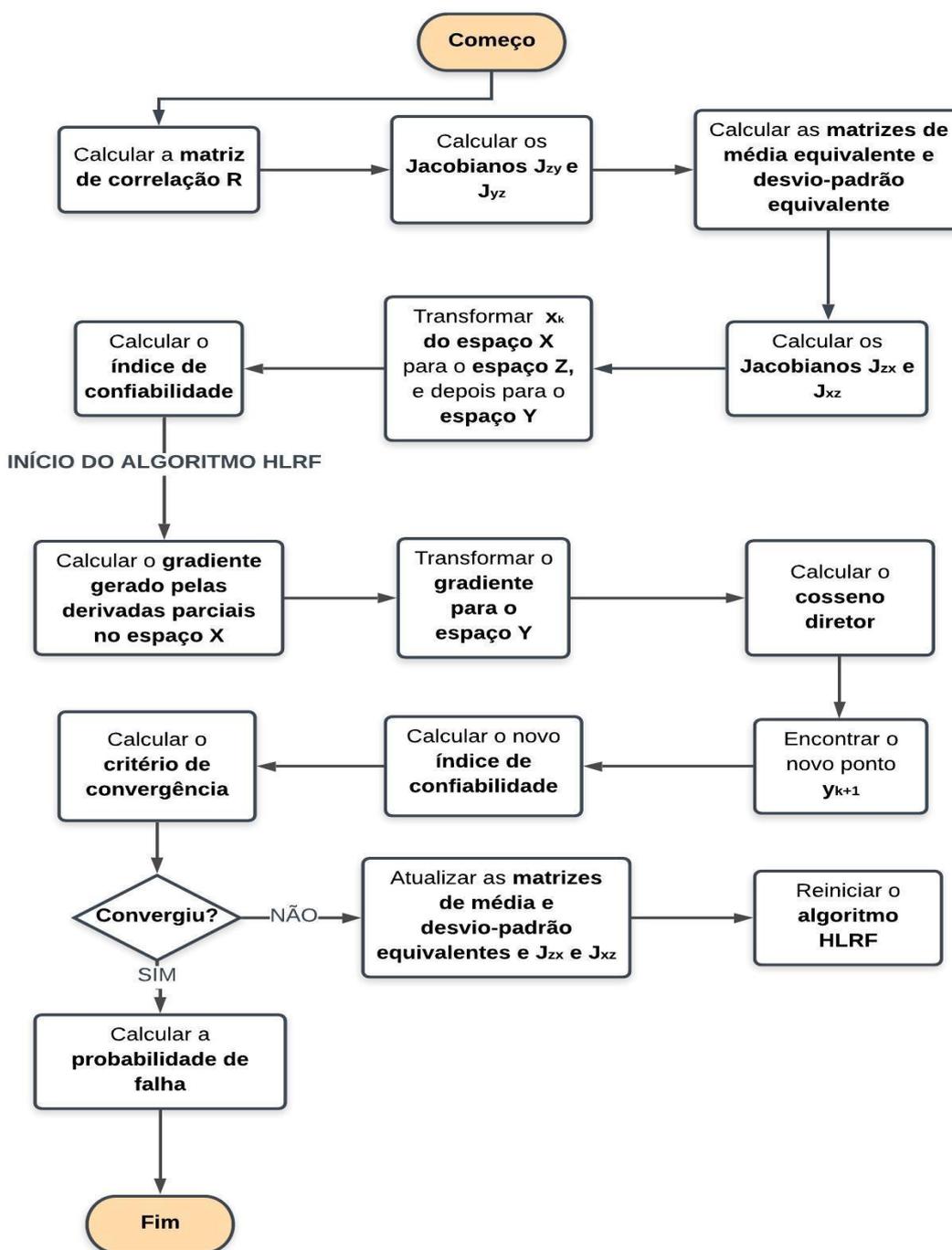
$$J_{yz} = A^T = L^{-1} \quad (42)$$

$$J_{zy} = (A^T)^{-1} = L \quad (43)$$

2.1.3.2 Algoritmo FORM

O algoritmo utilizado neste trabalho pelo método FORM constitui-se nos passos descritos na Figura 15:

Figura 15- Algoritmo FORM



Fonte: Autora, 2020.

2.2 Conceitos de RBDO

Segundo Melchers (2018), no método RBDO as restrições do projeto possuem além de abordagem determinística, como ocorre na otimização clássica, uma abordagem probabilística. Essas restrições probabilísticas são estudadas em termos do índice confiabilidade ou probabilidade de falha admissíveis.

Dessa forma, é possível reescrever a Equação 1 da seguinte forma, quando a otimização é estudada via RBDO:

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeita a: } P_f(X) \leq P_{fadm} \end{cases} \quad (44)$$

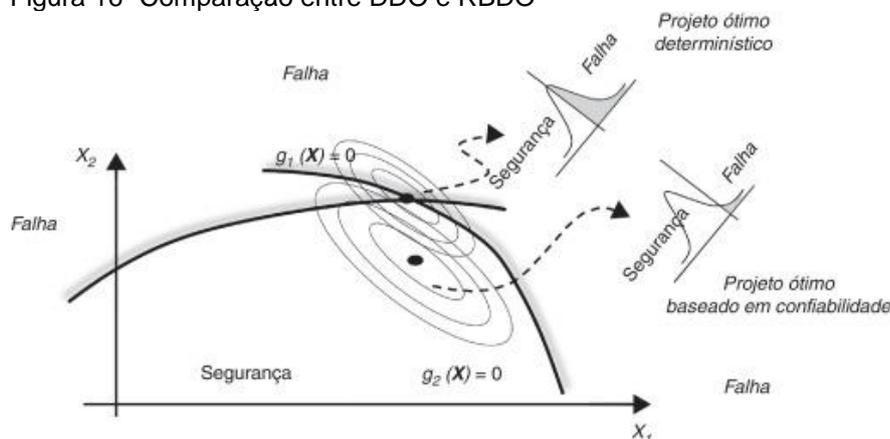
onde P_f é a probabilidade de falha em um determinado modo de falha e P_{fadm} é a probabilidade de falha admissível adotada.

Pode-se escrever a equação em termos do índice de confiabilidade (β), conforme equação abaixo.

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeita a: } \beta(X) \geq \beta_{adm} \end{cases} \quad (45)$$

Tanto a probabilidade de falha utilizada na Equação 44 quanto o índice de confiabilidade utilizado na Equação 45 podem ser obtidos a partir de qualquer método de confiabilidade (FOSM, FORM, Monte Carlo), apresentando custos computacionais variáveis.

Figura 16- Comparação entre DDO e RBDO



Fonte: Corso, 2016.

Quando se compara a otimização determinística (DDO) com a otimização baseada em confiabilidade (RBDO), é possível perceber que é necessário mover o ponto ótimo determinístico para o interior da região viável, buscando a confiabilidade alvo prescrita no início do processo de otimização (Figura 16).

Choi e Youn (2004) dizem que a otimização determinística apresenta uma confiança de aproximadamente 50%, ou seja, a sua probabilidade de falha é aproximadamente 0,5. Isso pode ser visualizado a partir da Figura 16, onde é possível notar que na solução determinística (DDO) aproximadamente 50% da distribuição de probabilidade se encontra no domínio seguro, e conseqüentemente, 50% no domínio de falha.

2.2.1 Métodos de resolução do RBDO

A análise RBDO estuda uma otimização que depende de outro processo de otimização (encontro do ponto de projeto na análise de confiabilidade), o que acaba gerando laços de otimização dentro do problema. Para resolver essa situação foram desenvolvidos alguns métodos conhecidos como métodos acoplados de laço duplo, laço único e desacoplados com laços em série.

Os métodos de laço duplo são divididos em dois processos, onde o processo de otimização envolvendo a confiabilidade (laço interno) é realizado de forma independente do algoritmo de otimização da estrutura (laço externo).

Como alternativa ao método descrito o método de laço único possui um processo em que a otimização do projeto e a otimização em termos de confiabilidade são realizados juntos, através de um mesmo laço.

Já o método de soluções desacopladas com laços em série realiza primeiro a convergência da otimização determinística, para depois fazer uma análise de confiabilidade dos resultados obtidos.

2.2.1.1 PMA x RIA

Existem duas formas diferentes de se impor as restrições do problema de RBDO, conhecidos como Reliability-Index Approach (RIA) e Performance-Measure Approach (PMA).

O método RIA impõe restrições ao índice de confiabilidade, e o problema pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Determinar: } y_{RIA}^* \\ \text{Que minimiza: } \beta(d) \\ \text{Sujeito a: } g(d) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Porém, Tu (1999) desenvolveu outra técnica de otimização, visto que o método RIA apresentava lentidão na convergência. Este outro método é conhecido como PMA, no qual as restrições são impostas à função de falha, conforme a equação abaixo.

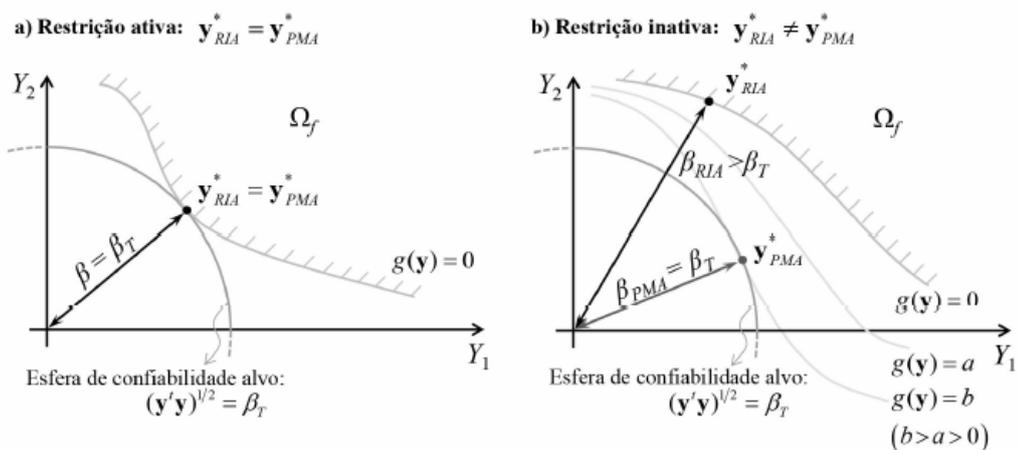
$$\begin{cases} \text{Determinar: } y_{PMA}^* \\ \text{Que minimiza: } g(d) \\ \text{Sujeito a: } \beta = \beta_T \end{cases} \quad (47)$$

Tu (1999) afirma que o método PMA apresenta mais eficiência quando comparado ao método RIA quando o modelo apresenta restrições inativas, além de uma melhor convergência dos resultados. Além disso, o método RIA pode não convergir, ou convergir com lentidão, em situações nas quais a superfície limite se encontra longe da origem do espaço normal padrão, ou seja, para índices de confiabilidade muito altos.

Percebe-se que, em situações nas quais a restrição probabilística está ativa, o ponto de projeto alcançado através do método RIA coincide com o ponto de projeto alcançado pelo método PMA. Porém, em restrições inativas esses pontos de projeto não coincidem, de forma que o ponto de projeto do método PMA gera um índice de confiabilidade inferior ao índice de confiabilidade alvo, logo, inferior ao índice de confiabilidade encontrado a partir do método RIA. Essas conclusões são expostas na Figura 17.

Portanto, quando a otimização é realizada via RIA a estrutura é otimizada de forma a ter no mínimo o índice de confiabilidade alvo β , já no caso PMA a otimização é feita buscando um índice de confiabilidade igual ao índice de confiabilidade alvo β .

Figura 17- Formulações RIA e PMA

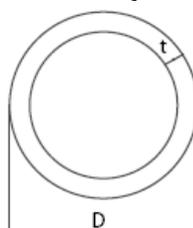


Fonte: Beck, 2019.

3. OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE APLICADA A TRELIÇAS PLANAS

Os conceitos de otimização baseada em confiabilidade estrutural, abordados ao longo do trabalho, serão neste capítulo aplicados para o caso de duas treliças planas: uma composta por 3 barras e outra composta por 13 barras. Todas as barras foram adotadas com seção transversal tubular (Figura 18), e os dois modelos foram desenvolvidos e analisados com o auxílio do software MatlabR2018.

Figura 18- Seção transversal dos elementos



Fonte: Autora, 2020.

As otimizações realizadas tiveram como objetivo reduzir o volume final da estrutura, variando o diâmetro e a espessura da seção transversal dos elementos. O processo foi realizado através do algoritmo genético (GA), pois se trata de um método de ordem zero, evitando dessa forma a presença de derivadas no processo de otimização.

Nas análises que possuem restrições probabilísticas foram utilizados os conceitos do método FORM em paralelo ao método PMA. Os resultados serão explanados a partir de tabelas e gráficos, e finalmente serão avaliados e discutidos.

3.1 Limitações de problemas com variáveis inteiras

Inicialmente, para os dois exemplos, as variáveis foram adotadas de forma contínua, apresentando resultados ruins, haja visto que para o programa os valores 2,311 mm e 2,312 mm, por exemplo, são tratados como valores diferentes, e no

problema prático em si a diferença entre os mesmos pode ser considerada desprezível, tornando os dois valores iguais.

Visando sanar esse problema, foram realizadas duas transformações lineares (Eq. 48) e (Eq. 49), de forma a tratar as variáveis como inteiras antes de serem utilizadas nos processos de seleção, crossover e mutação do algoritmo genético:

$$D = 0,5 x(1) + 0,5 \quad (48)$$

$$t = 0,2 x(2) + 0,8 \quad (49)$$

onde D é o valor discreto do diâmetro em milímetros, que varia 0,5 mm para cada unidade de variável contínua $x(1)$ adotada, e t é o valor discreto da espessura em milímetros, a qual varia 0,2 mm para cada unidade contínua $x(2)$ adotada.

Os possíveis valores do diâmetro e da espessura, disponíveis para realizar a otimização, estão compreendidos entre 2 e 355 mm, e 1 e 38 mm, respectivamente.

É importante ressaltar que para os casos de variáveis inteiras, o software Matlab R2018b trabalha com os métodos de crossover e mutação, predefinidos em seu default, visando garantir que as variáveis continuem possuindo valores inteiros ao longo de todo o processo, e alerta para um possível erro caso não sejam utilizadas essas funções.

O crossover é realizado por um método chamado Laplace crossover, enquanto a mutação é executada pelo Power mutation. Esses métodos serão abordados nas próximas seções.

3.1.1 Laplace crossover

Esse método tem por objetivo realizar o cruzamento entre os indivíduos da seguinte maneira:

- É definido um valor θ que satisfaz a distribuição de Laplace, tal que:

$$\theta = \begin{cases} a - b \cdot \log(r_i) & \text{se } r_i \leq \frac{1}{2} \\ a + b \cdot \log(r_i) & \text{se } r_i > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (50)$$

onde a é o parâmetro de locação da função densidade de probabilidade da distribuição de Laplace, $b > 0$ é o parâmetro de escala e r_i um número aleatório tal que $r_i \in [0,1]$.

A distribuição de Laplace apresenta a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \left(-\frac{x-a}{b} \right) \quad (51)$$

- Os dois filhos $x^{1'}$ e $x^{2'}$ são colocados simetricamente em relação aos pais x_i^1 e x_i^2 a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_i^{1'} &= x_i^1 + \theta_i |x_i^1 - x_i^2| \\ x_i^{2'} &= x_i^2 + \theta_i |x_i^1 - x_i^2| \end{aligned}$$

Deep et al (2009) realizaram diversos testes para que fossem encontrados os valores dos parâmetros a e b mais eficientes, para serem utilizados na Equação 51 no processo de crossover, sendo encontrados os valores $a=0$ e $b=0,35$, de forma que os mesmos são adotados pelo default do software, e utilizados nos exemplos desse trabalho.

3.1.2 Power mutation

Deep et al (2009) descrevem o power mutation como uma função baseada na distribuição de uma função potência conhecida como:

$$f(x) = N \cdot x^{-\xi} \quad (52)$$

onde N é a constante de normalização, e ξ é chamado de expoente da lei de potência.

A mutação ocorre da seguinte forma:

-Um valor randômico s que segue a distribuição de potência é escolhido da seguinte forma:

$$s = (s_1)^p \quad (53)$$

onde s_1 é um valor randômico pertencente ao intervalo $[0,1]$ e p é chamado de índice de mutação, e é adotado pelo default do programa como igual a 4.

- A solução da mutação é calculada da seguinte forma:

$$x_i = \begin{cases} \bar{x} - s(\bar{x} - x^l) & \text{se } v < r \\ \bar{x} + s(x^u - \bar{x}) & \text{se } v \geq r \end{cases} \quad (54)$$

$$v = \frac{\bar{x} - x^l}{x^u - \bar{x}} \quad (55)$$

onde x_i é a variável após a mutação, \bar{x} é a variável antes de sofrer a mutação, x^l é x^u são os limites inferior e superior da variável a sofrer mutação, v é um parâmetro de posição, que pode ser calculado de acordo com a Equação 55, e r é um valor randômico tal que $r \in [0,1]$.

3.1.3 Truncamento para variáveis inteiras

Visando garantir que as operações de cruzamento e mutação gerem resultados inteiros, é realizado um processo de truncamento interno, tal que:

- Se z_i é um número inteiro, então $\bar{z} = z_i$;
- Se z_i não é um número inteiro, dado $[z_i]$ como a parte inteira de z_i , \bar{z} será igual a $[z_i]$ ou igual a $[z_i] + 1$, cada um com probabilidade de ser escolhido igual a 0,5.

Com este método a aleatoriedade no conjunto de soluções é garantida, evitando a geração do mesmo número inteiro, sempre que z_i estiver entre $[z_i]$ e $[z_i] + 1$.

3.2 Análises realizadas

Foram realizadas 12 análises em cada exemplo, buscando avaliar o comportamento perante a diferentes restrições, bem como o número de variáveis envolvidas no projeto, nos resultados de otimizações determinísticas e otimizações baseadas em confiabilidade.

Essas análises foram feitas em duas etapas. A primeira considera que todos os elementos possuem a mesma seção transversal ótima, e a segunda etapa considerando seções transversais ótimas diferentes para cada elemento (barra).

As duas etapas para cada uma das estruturas, possuem as seguintes análises:

- a) Otimização por algoritmo genético considerando apenas as restrições determinísticas de deslocamento nodal, de geometria da seção transversal, de flambagem local dos elementos (restrição da norma), e de tensão de escoamento dos elementos;
- b) Otimização por algoritmo genético considerando as restrições determinísticas citadas no item a, além da flambagem dos elementos;
- c) Otimização por algoritmo genético considerando as mesmas restrições no item a, porém são adotados coeficientes de majoração de carregamento e minoração da resistência, de acordo com a NBR 8800(2008).
- d) Otimização por algoritmo genético considerando as mesmas restrições no item b, porém são adotados coeficientes de majoração de carga e minoração da resistência, de acordo com a NBR 8800(2008).
- e) Otimização por algoritmo genético considerando as restrições determinísticas de deslocamento nodal, de geometria da seção transversal, e flambagem local dos elementos, além da restrição probabilística, considerada a partir da falha individual das barras por escoamento;
- f) Otimização por algoritmo genético considerando as restrições determinísticas citadas no item e, além das restrições probabilísticas que consideram a falha dos elementos por escoamento, e a flambagem dos elementos comprimidos;

Inicialmente, as otimizações envolvendo quatro variáveis de projeto foram desenvolvidas limitando as mesmas aos valores alcançados nas otimizações envolvendo duas variáveis de projeto. O objetivo busca restringir o espaço das

variáveis, diminuindo a quantidade de conjuntos soluções possíveis, e consequentemente gerando soluções melhores, ou no mínimo, iguais à solução encontrada na otimização envolvendo duas variáveis de projeto.

Entretanto, não foi obtido sucesso com o método, tendo em vista que não é possível garantir que o conjunto solução obtido na otimização de duas variáveis de projeto, seja um ponto situado no mínimo global da função. Essa é uma das desvantagens dos métodos de ordem zero.

Além desse problema, quando a otimização é realizada com duas variáveis de projeto, o conjunto solução representa o valor ótimo para o elemento mais solicitado, e que acaba sendo estendida para os outros elementos da estrutura.

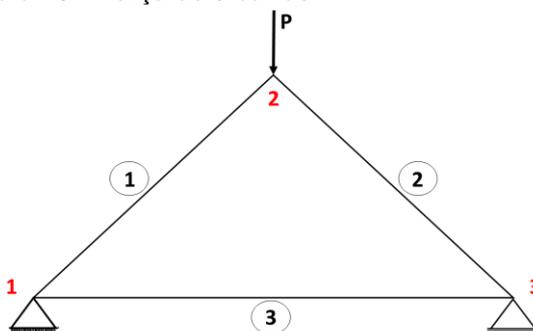
Portanto, quando são restringidos os possíveis valores das variáveis, não é permitido que as outras barras possuam soluções que estejam além desses limites, ou seja, são descartados possíveis valores ótimos para os elementos que não obtiveram soluções ótimas individuais na análise que considerava apenas duas variáveis de projeto.

Dessa forma, esse método foi descartado do estudo, e foram adotados os mesmos limites citados na seção 3.1, em todas as análises realizadas.

3.3 Treliza de três barras

A treliza de três barras que será utilizada como primeiro exemplo de aplicação apresenta um carregamento vertical P igual a 100 kN e possui configuração isostática, conforme apresenta a Figura 19.

Figura 19- Treliza de 3 barras



Fonte: Autora, 2020.

O comprimento de cada barra se encontra na Tabela 1.

Tabela 1- Comprimento das barras

Barras	1	2	3
Comprimento (mm)	2828,43	2828,43	4000,00

Fonte: Autora, 2020

A treliça é formada por barras compostas por aço A36 que possui módulo de elasticidade igual a 200 GPa, tensão de escoamento de 250 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0,26.

3.3.1 Variáveis do Projeto

Para otimizar o volume da estrutura foram utilizadas na primeira etapa duas variáveis de projeto, sendo elas o diâmetro externo e a espessura da seção transversal, considerando o mesmo valor para todos os elementos da treliça.

Na segunda etapa são consideradas quatro variáveis de projeto: diâmetro externo (x_{1i}) e espessura da seção transversal (x_{2i}), considerando valores diferentes para os elementos comprimidos (barras 1 e 2), e o elemento tracionado (barra 3).

No âmbito probabilístico foram considerados a tensão de escoamento (X_1), o carregamento aplicado (X_2) e o módulo de elasticidade (X_3) como variáveis aleatórias, com os dados estatísticos informados na Tabela 2.

Tabela 2- Dados estatísticos das variáveis probabilísticas

Variável	Distribuição	Média	Desvio-Padrão	Unidade de Medida
Tensão de Escoamento (X_1)	Lognormal	250	12,50	MPa
Carregamento (X_2)	Normal	100000	20000	N
Módulo de elasticidade (X_3)	Lognormal	200000	10000	MPa

Fonte: Autora, 2020

As correlações entre X_1 e X_2 , e X_2 e X_3 são nulas.

Como a estrutura é isostática foram utilizados os princípios da simetria, portanto foram aplicadas as mesmas variáveis de projeto nas barras simétricas 1 e 2.

3.3.2 Restrições

Ao longo de todas as otimizações foram consideradas 7 restrições: 2 lineares, consideradas apenas de forma determinística, e 5 não-lineares, dentre elas 3 consideradas como determinísticas e outras 2 como determinísticas/probabilísticas.

3.3.2.1 Restrições determinísticas

A primeira restrição linear adotada tem caráter geométrico, e foi imposta para garantir que o raio da seção tubular seja maior que a espessura:

$$t - R \leq 0 \quad (56)$$

A segunda restrição linear garante que as peças não sofrerão flambagem local (as paredes das barras não sofrerão deformação). Segundo a NBR 8800 (2008), a mesma é considerada a partir da aplicação de fatores redutores da área dos elementos, onde Q é o fator de redução utilizado para considerar esse efeito na barra.

Para desconsiderar esses efeitos, ou seja, garantir que as paredes da barra não sofram deformação, o fator de redução Q deve ser igual a 1 e para isso, é necessário que as dimensões obedeçam à seguinte limitação:

$$Q = 1,00 \quad \text{para} \quad \frac{D}{t} - 0,11 \cdot \frac{E}{\sigma_y} \leq 0 \quad (57)$$

As restrições não-lineares determinísticas envolvem o deslocamento nodal e o índice de esbeltez de cada elemento.

O valor utilizado como deslocamento nodal máximo foi obtido considerando-se a treliça como uma viga de cobertura; e de acordo com a NBR 8800 (2008), o máximo deslocamento permitido para essa utilização é $L/250$, onde L é o vão da estrutura. Dessa forma, conforme a Figura 19 e os dados da Tabela 1, pode-se concluir que o deslocamento nodal máximo permitido é:

$$\frac{L}{250} = \frac{4000}{250} = 16 \text{ mm} \quad (58)$$

O deslocamento do nó 2 foi calculado a partir do princípio dos trabalhos virtuais, da seguinte forma:

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i N_i}{(EA)_i} \cdot L_i \quad (59)$$

onde Δ é o deslocamento, \bar{P} é o carregamento virtual utilizado, \bar{N}_i é o esforço normal virtual da barra i , N_i é o esforço normal real da barra i , L_i é o comprimento da barra i , e EA é a rigidez à deformação axial da barra i .

O índice de esbeltez máximo considerado também condiz com a NBR 8800 (2008), a qual informa que para peças tracionadas é igual a 300, enquanto para peças comprimidas é utilizado um limite igual a 200. Como a estrutura do exemplo possui as barras 1 e 2 comprimidas e a barra 3 tracionada, é possível escrever as restrições da seguinte forma:

$$\frac{L}{r} = \frac{2828,43}{r} - 200 \leq 0 \quad (60)$$

$$\frac{L}{r} = \frac{4000}{r} - 300 \leq 0 \quad (61)$$

onde r é o raio de giração do elemento.

Os modos de falha por escoamento e flambagem da barra foram considerados de forma determinística e probabilística, obedecendo às seguintes desigualdades, respectivamente, quando considerados na forma determinística:

$$\frac{\alpha_i \cdot P}{A_i} - 250 \leq 0 \quad (62)$$

$$\alpha_i \cdot P - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{L_i^2} \leq 0 \quad (63)$$

onde α_i é fator de distribuição da carga vertical na barra i , P é a carga vertical aplicada, A_i é a área da seção transversal da barra i , E é o módulo de elasticidade, L_i é o comprimento da barra i , e I_i é o momento de inércia da barra i .

3.3.2.2 Restrições probabilísticas

Para as restrições não-lineares probabilísticas, foi considerado na primeira RBDO, um índice de confiabilidade alvo igual a 4,26 ($P_f=10^{-5}$) e na segunda RBDO índice de confiabilidade igual a 3,09 ($P_f= 10^{-3}$), para cada elemento e modo de falha.

Inicialmente foi utilizado o método RIA para o loop interno de confiabilidade, porém este não apresentou convergência para o problema, forçando o uso do método PMA no tratamento das restrições probabilísticas.

As equações de estado limite utilizadas foram consideradas a fim de evitar o escoamento de todas as barras, e a flambagem das barras tracionadas, regidas pelas equações abaixo, respectivamente:

$$g_{esc\ i}(X_1, X_2, x_i) = X_1 - \frac{\alpha_i X_2}{A_i} \quad (64)$$

$$g_{flam\ i}(X_2, X_3, x_i) = \alpha_i \cdot X_2 - \frac{\pi^2 \cdot X_3 \cdot I_i}{L_i} \quad (65)$$

As restrições serão tratadas ao longo das próximas seções, a partir das seguintes siglas:

R₁= Grupo de restrições determinísticas que consideram a geometria, a flambagem local, o índice de esbeltez e o deslocamento nodal;

R₂= Restrição determinística/probabilística que considera o escoamento;

R₃= Restrição determinística/probabilística que considera a flambagem.

3.3.3 Parâmetros do algoritmo genético

Para realizar o processo de otimização no software Matlab R2018b é necessário adotar parâmetros para garantir um resultado satisfatório e coerente.

Os parâmetros e os valores utilizados estão listados abaixo.

a) Número de gerações: 70;

Esse número foi adotado com base no custo computacional que se teve para solucionar o problema de otimização.

b) Tamanho da população: 50;

c) Taxa de crossover: 0,80;

Yang (2010) recomenda utilizar taxas de crossover dentro do intervalo de 0,7 a 1,0, além disso, Lopes (2017) realizou otimização cuja taxa de crossover variava ao longo do processo e concluiu que a modificação da taxa de crossover, dentro da faixa comentada, não gerou modificações no processo de otimização via algoritmos genéticos. Baseado nessas informações a taxa de crossover escolhida foi constante e igual a 0,8.

d) Indivíduos de elite que sobreviverão para formar a próxima geração: $0,05 \times$ tamanho da população (default do programa para problemas com variáveis inteiras).

Isso significa que dos 50 indivíduos da população, com a taxa de crossover igual a 0,80, em cada geração, a população será composta por 2 indivíduos de elite da população anterior, 38 indivíduos oriundos dos cruzamentos entre os melhores indivíduos da população anterior e 10 indivíduos inseridos na população a partir do processo de mutação.

Não foram adotados critérios de parada, forçando as otimizações a produzirem resultados ao longo de todas as gerações estabelecidas.

3.3.4 Função Objetivo

O volume final da estrutura é o objetivo de cada otimização realizada. Para as análises envolvendo duas variáveis de projeto, a função objetivo foi estudada a

partir da Equação 66, já para os casos envolvendo quatro variáveis de projeto a função objetivo foi tratada conforme a Equação 67:

$$V(x_1, x_2) = \pi \cdot \left[\frac{x_1^2}{4} - \left(\frac{x_1}{2} - x_2 \right)^2 \right] \times \sum_{i=1}^n L_i \quad (66)$$

$$V(x_{1i}, x_{2i}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \pi \left[\frac{x_{1i}^2}{4} - \left(\frac{x_{1i}}{2} - x_{2i} \right)^2 \right] \times L_i \right\} \quad (67)$$

onde x_{1i} é o diâmetro da barra i , x_{2i} é a espessura da barra i e L_i é o comprimento da barra i .

3.3.5 Otimizações considerando duas variáveis de projeto

Buscou-se encontrar o valor ótimo de diâmetro e espessura da seção transversal do elemento mais solicitado, perante cada restrição adotada, e o resultado foi estendido para os outros elementos.

As otimizações de caráter determinístico foram realizadas para serem usadas como parâmetro na análise da influência causada pela introdução das restrições probabilísticas.

3.3.5.1 Otimização determinística

Essa otimização foi realizada utilizando apenas restrições determinísticas. Foram feitas duas análises: uma considerando apenas R_1 e R_2 , e outra considerando, além das anteriores, R_3 .

As propriedades geométricas obtidas a partir dos pontos ótimos estão tabeladas a seguir:

Tabela 3- Resultados/ otimização
determinística da treliça de 3 barras,
considerando R_1 e R_2

Diâmetro (mm)	58,00
Espessura (mm)	1,60
Área (mm²)	283,50
Mom. Inércia (mm⁴)	112814,92
Volume (mm³)	2,738x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 4- Resultados/ otimização
determinística da treliça de 3 barras,
considerando R_1 , R_2 e R_3

Diâmetro (mm)	86,00
Espessura (mm)	1,20
Área (mm²)	319,69
Mom. Inércia (mm⁴)	287419,11
Volume (mm³)	3,087x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020

É possível observar que há aumento considerável no diâmetro adotado, quando a flambagem é inserida como restrição no processo. Isso acontece para gerar um aumento no momento de inércia do elemento, e conseqüentemente, mais resistência à flambagem. Além disso, houve redução na espessura, com o objetivo de continuar com a área mínima necessária para resistir ao escoamento.

É possível observar que houve aumento no volume final de aproximadamente 12,77% quando a flambagem passou a ser considerada na otimização, mostrando que a mesma se encontra ativa ao longo do processo.

O histórico dos valores das variáveis e suas coordenadas, na otimização determinística considerando R_1 e R_2 , se encontram na Figura 20.

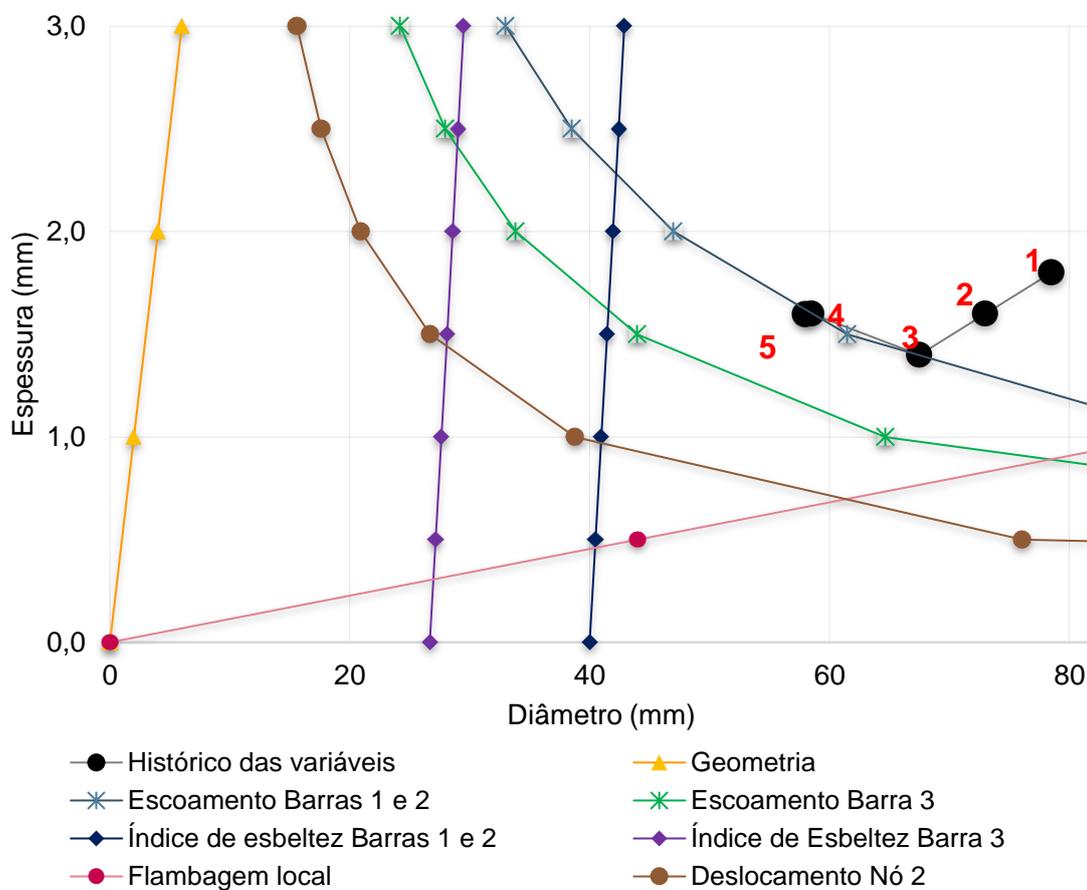
Percebe-se, avaliando a Figura 20, que a otimização é finalizada quando o conjunto solução se encontra sobre a restrição de tensão de escoamento das barras 1 e 2, mostrando que a mesma é a restrição governante da otimização realizada.

Tabela 5- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras,
considerando R_1 e R_2

Ponto	1	2	3	4	5
X	78,50	73,00	67,50	58,50	58,00
Y	1,80	1,60	1,40	1,60	1,60

Fonte: Autora, 2020.

Figura 20- Histórico das variáveis / otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2



Fonte: Autora, 2020.

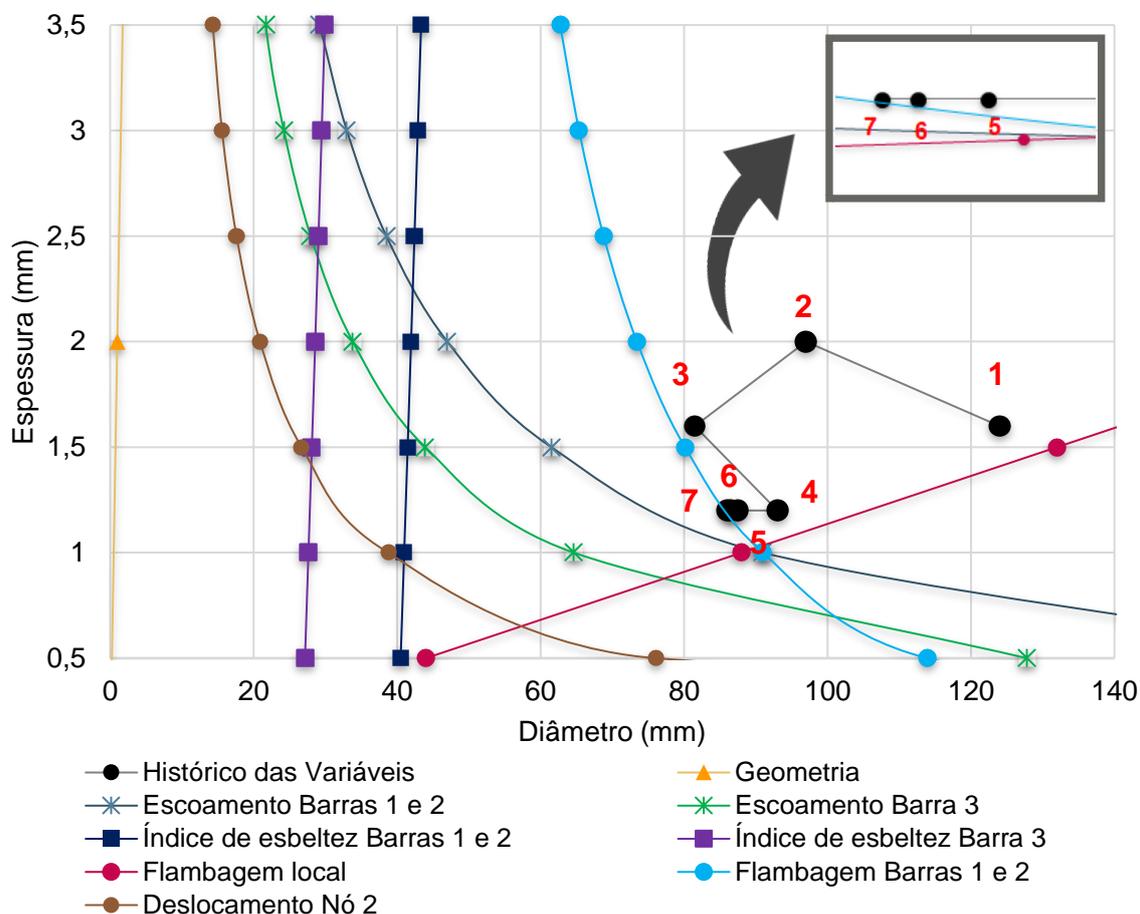
Outro histórico de variáveis foi obtido com a otimização determinística R_1 , R_2 e R_3 , de acordo com a Figura 21.

Tabela 6- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Ponto	1	2	3	4	5	6	7
X	124	97	81,50	93,00	87,50	86,50	86,00
Y	1,60	2,00	1,60	1,20	1,20	1,20	1,20

Fonte: Autora, 2020.

Figura 21- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



Fonte: Autora, 2020.

Nesse caso, a adição da restrição R_3 mudou a dinâmica da otimização, e quem passa a governar o processo de otimização é a flambagem das barras 1 e 2.

Com o objetivo de ratificar numericamente o que é mostrado com o histórico das variáveis, as Tabelas 7 e 8 expõem os valores das restrições ao final do processo de cada otimização. Esses resultados permitem verificar o comportamento das restrições quando o processo alcança o volume ótimo.

Analisando as duas tabelas citadas, entende-se que com a adição da flambagem como restrição, esta passa a governar a otimização das barras 1 e 2, enquanto a barra 3, que se encontra tracionada, continua sendo governada pelo escoamento.

Tabela 7- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-9,36	-	-
Barras 1 e 2	-27,65	-51,44	-	-2,81	-58,21
Barra 3			-	-75,18	-99,48

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 8- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-10,06	-	-	-
Barras 1 e 2	-41,80	-16,33	-	-28,85	-0,22	-105,67
Barra 3			-	-93,60	-	-166,60

Fonte: Autora, 2020.

3.3.5.2 Otimização determinística utilizando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008

Essa otimização foi realizada considerando as restrições de forma determinística, com a utilização dos coeficientes de majoração de solicitação e minoração das resistências, os quais constam nas tabelas 1 e 3 da norma NBR 8800 (2008).

O coeficiente de majoração do carregamento considerado é igual a 1,5, que corresponde a ações variáveis de combinação normal, e o coeficiente de minoração da resistência, igual a 1,1, utilizado em aços estruturais submetidos ao escoamento e flambagem, possuindo combinação normal.

Dessa forma, as restrições R_2 e R_3 podem ser reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\frac{\alpha_i \cdot P \cdot 1,5}{A_i} - \frac{250}{1,1} \leq 0 \quad (68)$$

$$\alpha_i \cdot P \cdot 1,5 - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{1,1 \cdot L_i} \leq 0 \quad (69)$$

O objetivo dessa análise é buscar a comparação com a otimização baseada em confiabilidade, verificando o nível de confiança de estruturas que são projetadas conforme os coeficientes de ponderação da NBR 8800(2008).

Os resultados serão explanados e discutidos a seguir.

Tabela 9- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR8800:2008)

Diâmetro (mm)	107,50
Espessura (mm)	1,40
Área (mm²)	466,65
Mom. Inércia (mm⁴)	656764,52
Volume (mm³)	4,506x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 10- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Diâmetro (mm)	107,50
Espessura (mm)	1,40
Área (mm²)	466,65
Mom. Inércia (mm⁴)	656764,52
Volume (mm³)	4,506x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Nota-se que não houve modificação de nenhuma dimensão quando a flambagem passa a ser considerada, portanto é possível concluir que ela não se encontra ativa durante o processo de otimização.

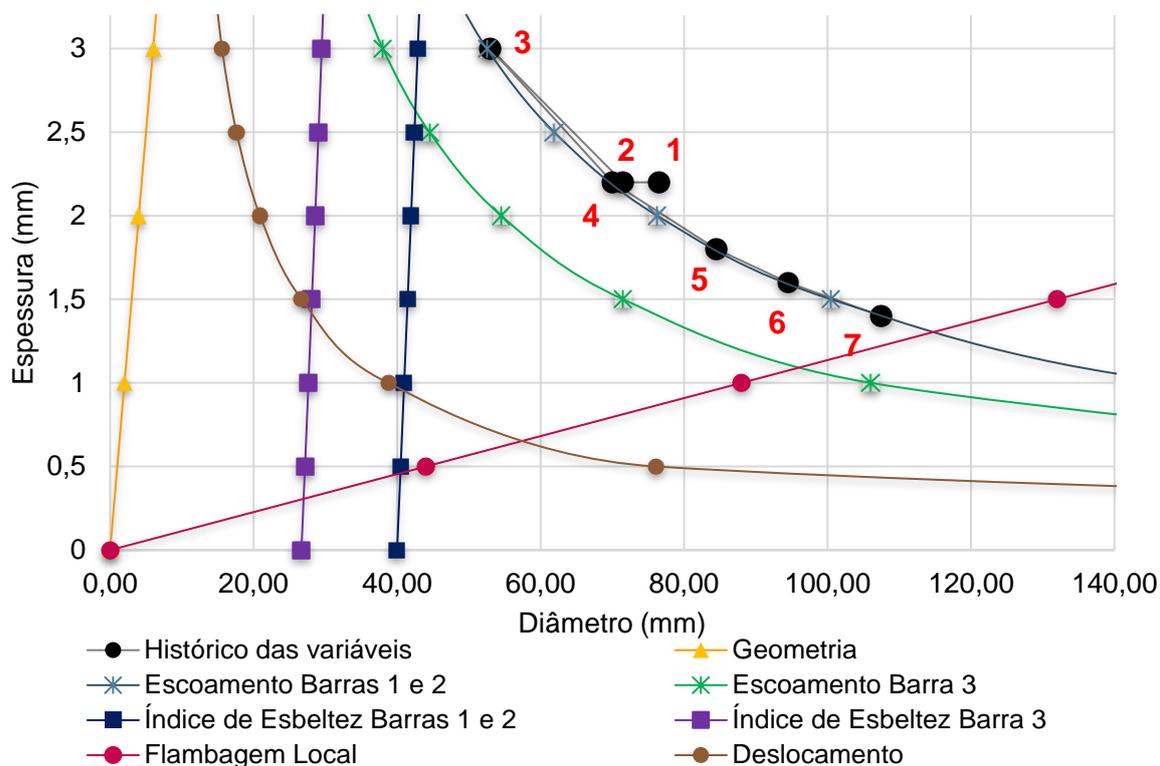
O histórico das variáveis obtidas ao longo do processo da otimização, considerando apenas as restrições R_1 e R_2 pode ser observado na Figura 22.

Tabela 11- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Ponto	1	2	3	4	5	6	7
X	76,50	71,50	53,00	70,00	84,50	94,50	107,50
Y	2,20	2,20	3,00	2,20	1,80	1,60	1,40

Fonte: Autora, 2020.

Figura 22- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)



Fonte: Autora, 2020.

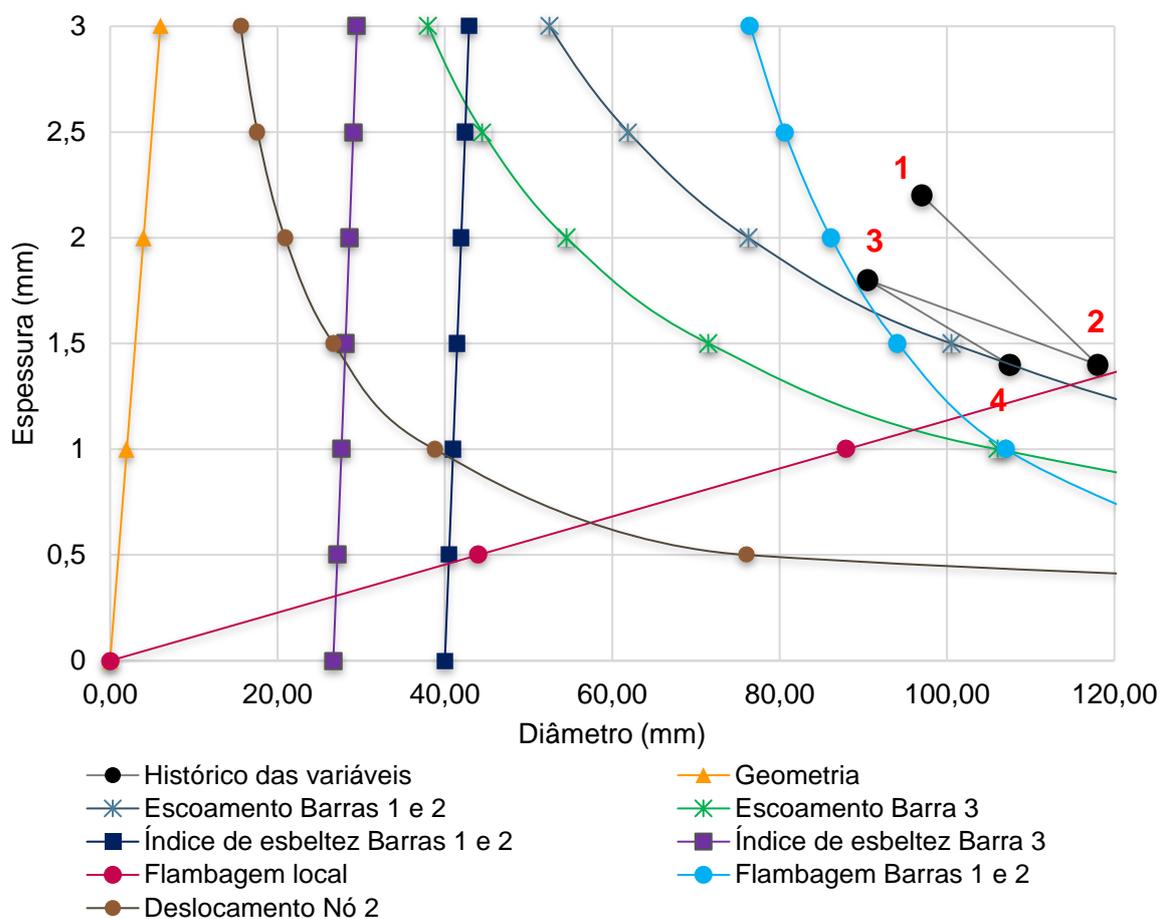
Novamente é possível perceber que o escoamento das barras 1 e 2 limita a otimização realizada. Quando R_3 é considerada como uma restrição, a configuração das variáveis encontradas se estabelece conforme a Figura 23, e a Tabela 12, mostrando que o escoamento das barras 1 e 2 continua a governar o processo de otimização.

Tabela 12- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Ponto	1	2	3	4
X	97,00	118,00	90,50	107,50
Y	2,20	1,40	1,80	1,40

Fonte: Autora, 2020.

Figura 23- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)



Fonte: Autora, 2020.

Já as restrições finais provenientes das análises se encontram nas Tabelas 13 e 14.

Tabela 13- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-11,93	-	-
Barras 1 e 2	-52,35	-11,21	-	-0,02	-124,61
Barra 3			-	-66,55	-193,38

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 14- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-11,93	-	-	-
Barras 1 e 2	-52,35	-11,21	-	-0,02	-41,27	-124,61
Barra 3			-	-66,55	-	-193,38

Fonte: Autora, 2020.

Confirmando o que já havia sido previsto, é possível perceber que a flambagem não se mostra ativa, já que todas as restrições não se modificam com a adoção da mesma ao longo da otimização. O mesmo resultado pode ser verificado no histórico dos pontos ao longo da otimização.

3.3.5.3 Otimização baseada em confiabilidade

As restrições determinísticas aplicadas nessas análises são as consideradas no grupo R_1 , enquanto inicialmente apenas a restrição R_2 é tratada como probabilística, possuindo os dados estatísticos já expostos. Depois é feita uma análise considerando R_2 e R_3 como probabilísticas.

O método PMA foi aplicado com probabilidade de falha alvo em cada elemento igual a 10^{-5} , com um índice de confiabilidade alvo de 4,26. Também é realizada uma segunda RBDO cuja P_f é igual a 10^{-3} , com índice de confiabilidade alvo de 3,09.

Os valores ótimos encontrados, para a RBDO cuja probabilidade de falha é igual a 10^{-5} , se encontram a seguir, nas Tabelas 15 e 16.

Tabela 15- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Diâmetro (mm)	99,00
Espessura (mm)	1,80
Área (mm²)	549,65
Mom. Inércia (mm⁴)	649351,87
Volume (mm³)	5,308x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 16- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Diâmetro (mm)	99,00
Espessura (mm)	1,80
Área (mm²)	549,65
Mom. Inércia (mm⁴)	649351,87
Volume (mm³)	5,308x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Observando os resultados ótimos encontrados, percebe-se que do ponto de vista probabilístico, a inclusão da flambagem como restrição probabilística não gerou interferências na obtenção do volume ótimo da estrutura, nem na sua geometria, o que indica que a mesma não se encontra ativa nessa otimização.

Buscando compreender de forma gráfica o comportamento das restrições e a evolução das variáveis ao longo dos processos, foram desenvolvidos os gráficos expostos nas Figuras 24 e 25, acompanhados das Tabelas 17 e 18, para as análises que consideram R_1 e R_2 , e R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente.

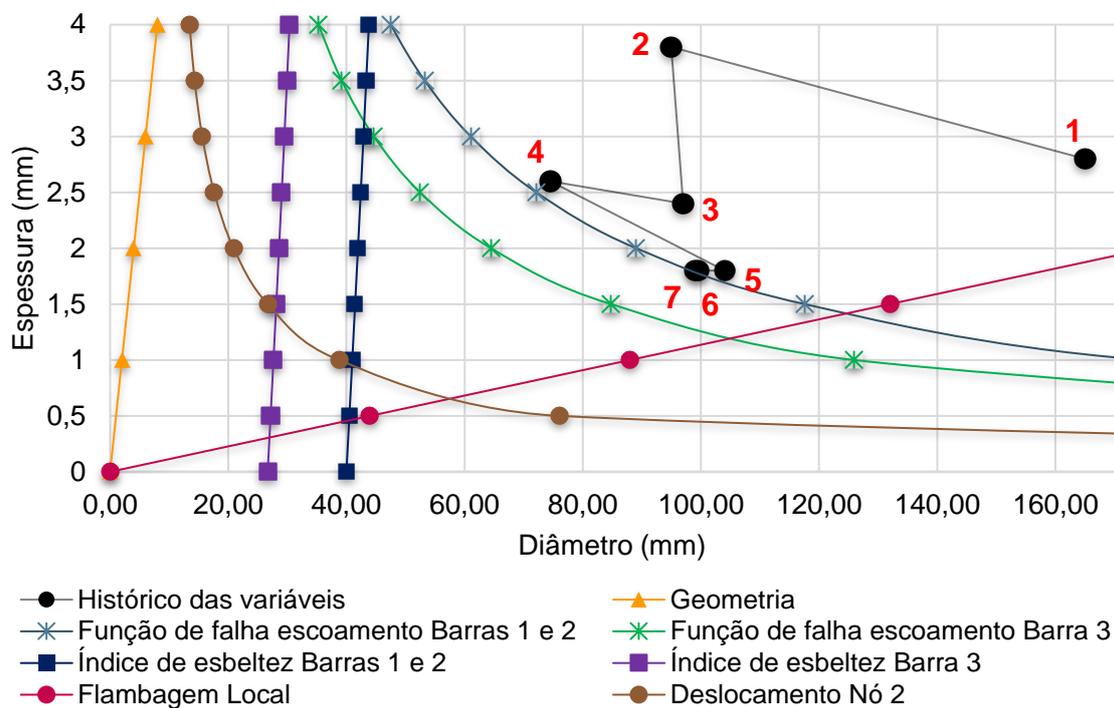
Nota-se que as otimizações são concluídas quando os pontos ótimos se encontram próximos da restrição função de falha do escoamento das barras 1 e 2, mostrando que esta governa o processo. A observação anterior pode ser confirmada avaliando o comportamento das restrições adiante.

Tabela 17- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Ponto	1	2	3	4	5	6	7
X	165,00	95,00	97,00	74,50	104,00	99,50	99,00
Y	2,80	3,80	2,40	2,60	1,80	1,80	1,80

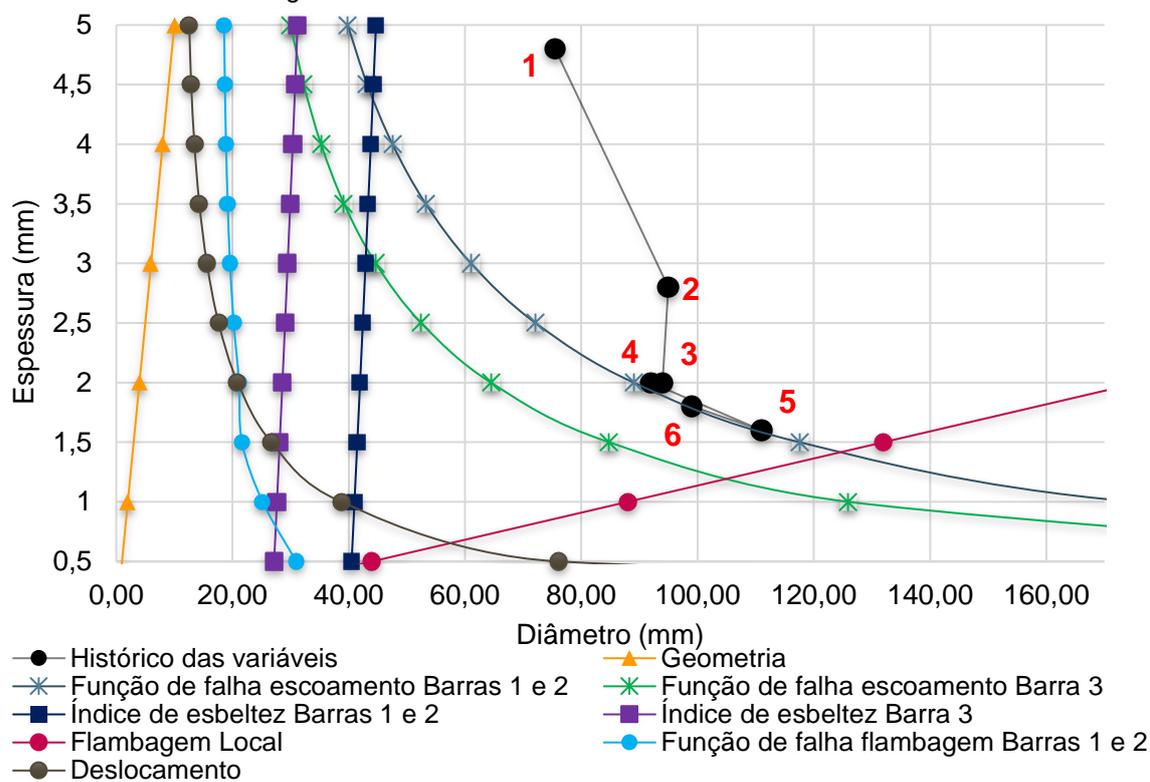
Fonte: Autora, 2020.

Figura 24- Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 25- Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Tabela 18- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Ponto	1	2	3	4	5	6
X	75,50	95,00	94,00	92,00	111,00	99,00
Y	4,80	2,80	2,00	2,00	1,60	1,80

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 19- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/ escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-12,54	-	-
Barras 1 e 2	-47,70	-33,00	-	-0,10	-117,71
Barra 3			-	-66,25	-183,62

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 20- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/ esc. (MPa)	Função de falha/ flamb. (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-12,54	-	-	-
Barras 1 e 2	-47,70	-33,00	-	-0,10	-20,83	-117,71
Barra 3			-	-66,25	-	-183,62

Fonte: Autora, 2020.

Souza Junior (2008) realizou uma calibração nos coeficientes da NBR 8800: 2008 utilizados nesse trabalho, a partir de elementos estruturais de aço sujeitos a ações permanentes e variáveis, com modo de falha de flexo-compressão, e concluiu que eles possuem um índice de confiabilidade aproximadamente igual a 3,09, com uma probabilidade de falha correspondente da ordem de 10^{-3} .

Tendo como o objetivo de confirmar os valores encontrados considerando os coeficientes de ponderação, conforme seção 3.3.5.2, foi realizada uma otimização baseada em confiabilidade desconsiderando esses coeficientes, mas considerando a probabilidade de falha alvo igual a 10^{-3} . Os resultados apresentaram consistência quando comparados aos da otimização determinística, considerando os coeficientes de ponderação. Esses valores estão expostos nas tabelas abaixo.

Tabela 21- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}

Diâmetro (mm)	65,00
Espessura (mm)	2,40
Área (mm²)	471,99
Mom. Inércia (mm⁴)	231543,19
Volume (mm³)	$4,558 \times 10^6$

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 22- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}

Diâmetro (mm)	95,50
Espessura (mm)	1,60
Área (mm²)	471,99
Mom. Inércia (mm⁴)	520358,58
Volume (mm³)	$4,558 \times 10^6$

Fonte: Autora, 2020.

Percebe-se que assim como nos resultados expostos nas Tabelas 9 e 10, os volumes para a RBDO não possuem diferença com a consideração da flambagem. Percebe-se também, que os valores encontrados para um nível de confiabilidade de aproximadamente 3 se encontram próximos dos resultados das otimizações determinísticas considerando os coeficientes de ponderação, onde as análises apresentaram diferença em volume igual a 1,14%.

3.3.5.4 Probabilidade de falha

Após todas as otimizações serem realizadas, foram feitas análises de confiabilidade de cada elemento, para os modos de falha considerados, adotando os valores ótimos obtidos com as otimizações como os valores de D e t para cada um dos casos.

Foram calculadas as probabilidades de falha dos elementos e modos de falha, para cada uma das otimizações realizadas. O resultado se encontra na Tabela 23.

Com os resultados apresentados é possível perceber que as análises probabilísticas apresentam probabilidades de falha com valores próximos dos estabelecidos como alvo, confirmando os resultados encontrados.

Tabela 23- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 3 barras (2 variáveis de projeto)

Otimização	Escoamento Barras 1 e 2	Escoamento Barra 3	Flambagem Barras 1 e 2
Determinística R ₁ e R ₂	$4,90 \times 10^{-1}$	$2,48 \times 10^{-2}$	$9,77 \times 10^{-1}$
Determinística R ₁ , R ₂ e R ₃	$2,67 \times 10^{-1}$	$2,70 \times 10^{-3}$	$4,97 \times 10^{-1}$
Determinística R ₁ e R ₂ (NBR 8800:2008)	$1,30 \times 10^{-3}$	$2,57 \times 10^{-9}$	$6,69 \times 10^{-9}$
Determinística R ₁ , R ₂ e R ₃ (NBR 8800:2008)	$1,30 \times 10^{-3}$	$2,57 \times 10^{-9}$	$6,69 \times 10^{-9}$
RBDO R ₁ e R ₂ (P _{falvo} =10 ⁻⁵)	$9,80 \times 10^{-6}$	$6,86 \times 10^{-14}$	$1,21 \times 10^{-8}$
RBDO R ₁ , R ₂ e R ₃ (P _{falvo} =10 ⁻⁵)	$9,80 \times 10^{-6}$	$6,86 \times 10^{-14}$	$1,21 \times 10^{-8}$
RBDO R ₁ e R ₂ (P _{falvo} =10 ⁻³)	$9,98 \times 10^{-4}$	$1,37 \times 10^{-9}$	$1,72 \times 10^{-1}$
RBDO R ₁ , R ₂ e R ₃ (P _{falvo} =10 ⁻³)	$9,98 \times 10^{-4}$	$1,37 \times 10^{-9}$	$9,63 \times 10^{-5}$

Fonte: Autora, 2020.

Cabe ressaltar que a P_f dos modos de falha governantes são as maiores obtidas, exceto nos casos em que a restrição R₃ não é considerada, casos esses em que a mesma possui uma probabilidade de falha superior à do modo de falha dominante, haja visto que a mesma não foi considerada como limitante ao longo do processo.

Percebe-se, através da tabela 23, que as probabilidades de falha dos modos de falha governantes em R₁ e R₂, e R₁, R₂ e R₃ se encontram próximos a 50%, conforme esperado.

3.3.5.5 Comparação entre as otimizações envolvendo duas variáveis de projeto

Avaliando as performances das variáveis e dos volumes é possível perceber que todas as otimizações tiveram rápida convergência com os parâmetros do algoritmo genético adotados.

Tabela 24- Resumo dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto

Otimização	Volume (mm ³)
Determinística R₁ e R₂	2,738x10 ⁶
Determinística R₁, R₂ e R₃	3,087x10 ⁶
Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	4,506x10 ⁶
Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	4,506x10 ⁶
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo}=10⁻⁵)	5,308x10 ⁶
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo} =10⁻⁵)	5,308x10 ⁶
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo} =10⁻³)	4,558x10 ⁶
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo} =10⁻³)	4,558x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

Analisando todos os volumes encontrados nas otimizações realizadas (Tabela 24), é possível notar que comparando os volumes obtidos nas otimizações determinísticas e na otimização baseada em confiabilidade com $P_f=10^{-5}$, considerando R₂ como restrição probabilística, há aumento de aproximadamente 93,88% no volume, e aumento de 71,93% quando se adota a RBDO com $P_f=10^{-5}$ considerando R₃ também como restrição probabilística e a otimização determinística considerando R₁, R₂ e R₃. Dessa forma, confirma-se a relevância da utilização da análise de confiabilidade quando há a necessidade de garantir uma determinada segurança para a estrutura, ou para os seus elementos.

Os volumes ótimos resultantes da RBDO com $P_f = 10^{-5}$, quando comparados aos resultados da otimização considerando as restrições determinísticas sob a influência dos coeficientes de ponderação da NBR 8800 (2008), já apresentam aumentos iguais a 17,79%, mostrando o quanto a otimização baseada em confiabilidade se mostra conservadora em relação à NBR 8800 (2008), confirmando a utilização da mesma apenas para projetos que necessitam de uma confiabilidade prescrita.

Apesar de todos os resultados terem apresentado a relação D/t alta, eles se encontram dentro das limitações previstas em norma. A norma NBR 8800 (2008) apresenta apenas uma restrição quanto à relação D/t, para elementos tubulares sob esforço axial, tal que $D/t \leq 0,45 \cdot \frac{E}{\sigma_y}$, a qual já é garantida a partir da Equação 57. Normas utilizadas no processo de fabricação dos perfis também foram avaliadas, tais como NBR 6591(2008), NBR 8261 (2019), EN 10305-3 (2016) e ASTM A500 (2020).

3.3.6 Otimizações considerando quatro variáveis de projeto

Essas otimizações foram realizadas avaliando as necessidades de cada elemento, ou conjunto de elementos, individualmente. Para isso serão consideradas quatro variáveis, um diâmetro e uma espessura para as barras 1 e 2 (sob compressão), e outro diâmetro e espessura para a barra 3 (sob tração).

As considerações das restrições para cada otimização são as mesmas consideradas no estudo para duas variáveis de projeto, as quais não serão explanadas novamente.

3.3.6.1 Otimização determinística

Buscando as necessidades individuais dos elementos, os resultados obtidos se encontram nestas tabelas:

Tabela 25- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	58,00	54,50
Espessura (mm)	1,60	1,20
Área (mm²)	283,50	200,94
Mom. Inércia (mm⁴)	112814,92	71390,90
Volume (mm³)	2,407x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 26- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	87,00	47,00
Espessura (mm)	1,20	1,40
Área (mm²)	323,46	200,56
Mom. Inércia (mm⁴)	297706,24	52178,50
Volume (mm³)	2,632x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Nota-se que as barras 1 e 2, submetidas à compressão, apresentam aumento no diâmetro quando é inserida a flambagem na otimização, enquanto a barra 3 que se encontra sob tração, sofre uma pequena redução no seu diâmetro, que é compensada por um aumento na espessura. Tal redução só ocorreu devido ao processo estocástico do algoritmo genético, que pode ser confirmado pelo fato da área quase não sofrer modificação.

As restrições da otimização determinística considerando R_1 e R_2 se comportaram conforme exposto na Tabela 27.

Tabela 27- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-8,57	-	-
Barras 1 e 2	-27,40	-51,75	-	-0,61	-87,79
Barra 3	-26,05	-42,58	-	-1,16	-58,21

Fonte: Autora, 2020.

Avaliando os resultados acima, percebe-se que a tensão de escoamento foi a restrição que governou a otimização de todas as barras. Atenta-se que ao contrário das análises de duas variáveis de projeto, agora as restrições estarão próximas do limite (0) em cada uma das barras, para um dos modos de falha, já que elas trabalham de forma independente.

Em contrapartida, as restrições da otimização que considera R_1 , R_2 e R_3 tiveram seus valores conforme mostra a Tabela 28.

Tabela 28- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-9,18	-	-	-
Barras 1 e 2	-42,30	-15,50	-	-31,42	-2,76	-52,01
Barra 3	-22,10	-54,43	-	-0,70	-	-106,77

Fonte: Autora, 2020.

Nota-se que a restrição governante dessa otimização, quando é inserida a restrição R_3 , é a flambagem nas barras 1 e 2, e o escoamento na barra 3.

3.3.6.2 Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008

Com a consideração de quatro variáveis de projeto para o problema de otimização exposto, o resultado ótimo encontrado passa a ser conforme as Tabelas 29 e 30.

A inclusão da flambagem nas barras comprimidas como restrição, não gera modificações nos resultados das otimizações, mostrando que esta não se encontra ativa ao longo do processo.

Tabela 29- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	107,50	50,00
Espessura (mm)	1,40	2,20
Área (mm²)	466,65	330,37
Mom. Inércia (mm⁴)	656764,52	94555,16
Volume (mm³)	3,961x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 30- Resultados/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	107,50	50,00
Espessura (mm)	1,40	2,20
Área (mm²)	466,65	330,37
Mom. Inércia (mm⁴)	656764,52	94555,16
Volume (mm³)	3,961x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Já as restrições possuíram os seguintes valores ao final de cada uma das otimizações:

Tabela 31- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-11,49	-	-
Barras 1 e 2	-52,35	-11,21	-	-0,02	-63,56
Barra 3	-22,80	-65,27	-	-0,25	-124,61

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 32- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-11,49	-	-	-
Barras 1 e 2	-52,35	-11,21	-	-0,02	-41,27	-63,56
Barra 3	-22,80	-65,27	-	-0,25	-	-124,61

Fonte: Autora, 2020.

A partir das duas últimas tabelas apresentadas é possível perceber que a tensão de escoamento é a restrição que governa o processo, tanto para as barras 1 e 2 quanto para a barra 3.

3.3.6.3 Otimização baseada em confiabilidade

Os procedimentos adotados nessa análise foram iguais aos adotados com duas variáveis de projeto, portanto a probabilidade de falha alvo dos elementos e modos de falha, inicialmente, é igual a 10^{-5} .

Os valores ótimos resultantes se encontram nas tabelas a seguir.

Tabela 33- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_i igual a 10^{-5}

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	99,00	79,00
Espessura (mm)	1,80	1,60
Área (mm²)	549,65	389,05
Mom. Inércia (mm⁴)	649351,87	291466,26
Volume (mm³)	4,666x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 34- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_i igual a 10^{-5}

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	111,00	42,00
Espessura (mm)	1,60	3,20
Área (mm²)	549,90	390,06
Mom. Inércia (mm⁴)	822857,66	73900,79
Volume (mm³)	4,671x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Nota-se que apesar das análises terem apresentado aumento no volume igual a 0,13%, quando a flambagem passa a ser considerada como restrição da otimização, há aumento de 12,12% no diâmetro das barras comprimidas, com a intenção de aumentar o seu momento de inércia e conseqüentemente a sua resistência.

As restrições para as soluções encontradas se encontram expressas nas Tabelas 35 e 36:

Tabela 35- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/ escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-12,17	-	-
Barras 1 e 2	-47,70	-33,00	-	-0,10	-117,71
Barra 3	-37,90	-38,63	-	-0,29	-153,86

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 36- Valores das restrições da RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/ esc. (MPa)	Função de falha/ flamb. (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-12,17	-	-	-
Barras 1 e 2	-53,90	-18,63	-	-0,10	-59,28	-52,01
Barra 3	-17,80	-74,88	-	-0,29	-	-106,77

Fonte: Autora, 2020.

Confirmando o que já havia sido concluído anteriormente, o escoamento mesmo tratado de forma probabilística, governa as otimizações das barras 1, 2 e 3, enquanto a flambagem modifica a geometria da seção comprimida, mas não gera relevância na obtenção do volume da estrutura.

Também foi realizada RBDO com probabilidade de falha alvo igual a 10^{-3} , como feito na mesma análise considerando duas variáveis de projeto, e os resultados encontrados estão apresentados nas tabelas a seguir.

Cabe ressaltar que, o aumento de 1,69% nos volumes considerando R_1 e R_2 , e 2,32% nos volumes considerando também R_3 , entre a RBDO com P_f igual a 10^{-3} e a otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação, se dá pela aproximação da probabilidade de falha utilizada na otimização baseada em confiabilidade.

Tabela 37- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	77,50	41,00
Espessura (mm)	2,20	2,80
Área (mm²)	474,38	336,02
Mom. Inércia (mm⁴)	338248,11	61621,90
Volume (mm³)	4,028x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 38- Resultados/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}

	Barras 1 e 2	Barra 3
Diâmetro (mm)	110,50	61,00
Espessura (mm)	1,40	1,80
Área (mm²)	479,85	334,77
Mom. Inércia (mm⁴)	714058,32	146790,80
Volume (mm³)	4,053 x10 ⁶	

Fonte: Autora, 2020.

3.3.6.4 Probabilidade de falha

Os resultados das análises de confiabilidade realizadas para cada otimização envolvendo quatro variáveis de projeto se diferencia dos resultados envolvendo duas variáveis de projeto no aspecto de que na última, a maior probabilidade de falha encontrada era referente a apenas um elemento submetido a um determinado modo de falha. Tais resultados se encontram na Tabela 39.

Na otimização determinística há uma redução na probabilidade de falha referente ao escoamento das barras 1 e 2 quando se considera o efeito da flambagem nas mesmas. A redução era esperada já que anteriormente tinha sido concluído que a mesma governava a otimização, quando considerada no processo.

A redução da probabilidade de falha referente à flambagem das barras 1 e 2 se deve ao fato de que inicialmente esta não havia sido considerada, levando-a a possuir uma confiabilidade menor. Já na barra 3, como não há influência da flambagem, a probabilidade de falha permanece praticamente a mesma.

Nas análises RBDO os modos de falha governantes possuem valores de probabilidade de falha mais próximos dos valores prescritos nos métodos PMA, confirmando todos os resultados e conclusões obtidos.

Além disso, todas as otimizações, quando realizadas com apenas duas variáveis de projeto apresentam probabilidades de falha inferiores às atuais. Isso acontece devido à adoção de dimensões que satisfaçam às necessidades individuais dos elementos, tornando a otimização menos conservadora.

Percebe-se que em todos os modos de falha governantes das análises determinísticas, as probabilidades de falha se encontram próximas de 0,5, conforme o esperado.

Tabela 39- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 3 barras (quatro variáveis de projeto)

Otimização	Escoamento Barras 1 e 2	Escoamento Barra 3	Flambagem Barras 1 e 2
Determinística R₁ e R₂	4,98x10 ⁻¹	4,93x10 ⁻¹	9,91x10 ⁻¹
Determinística R₁, R₂ e R₃	2,47x10 ⁻¹	4,97x10 ⁻¹	4,28x10 ⁻¹
Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	1,30x10 ⁻³	1,30x10 ⁻³	6,69x10 ⁻⁹
Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	1,30x10 ⁻³	1,30x10 ⁻³	6,69x10 ⁻⁹
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo}=10⁻⁵)	9,84x10 ⁻⁶	9,54x10 ⁻⁶	2,56x10 ⁻⁹
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo} =10⁻⁵)	9,68x10 ⁻⁶	8,68x10 ⁻⁶	2,25x10 ⁻¹⁵
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo} =10⁻³)	8,80x10 ⁻⁴	8,45x10 ⁻⁴	1,95x10 ⁻¹
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo} =10⁻³)	6,58x10 ⁻⁴	9,28x10 ⁻⁴	5,52x10 ⁻¹¹

Fonte: Autora, 2020.

3.3.6.5 Comparação entre as otimizações envolvendo quatro variáveis de projeto

É importante ressaltar que dentro das limitações do método utilizado, todos os resultados possuem convergência e comportamento esperado.

Tabela 40- Resumo dos volumes obtidos, considerando quatro variáveis de projeto

Otimização	Volume (mm ³)
Determinística R₁ e R₂	2,407x10 ⁶
Determinística R₁, R₂ e R₃	2,632x10 ⁶
Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	3,961x10 ⁶
Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	3,961x10 ⁶
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo}=10⁻⁵)	4,666x10 ⁶
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo}=10⁻⁵)	4,671x10 ⁶
RBDO R₁ e R₂ (P_{falvo}=10⁻³)	4,028x10 ⁶
RBDO R₁, R₂ e R₃ (P_{falvo}=10⁻³)	4,053x10 ⁶

Fonte: Autora, 2020.

De acordo com a Tabela 40, quando comparada com a otimização determinística, a RBDO com $P_f=10^{-5}$ apresentou acréscimo percentual do volume da estrutura igual a 93,80% quando considerado R₁ e R₂ como restrições, e acréscimo de 77,47% quando são consideradas como restrição R₁, R₂ e R₃. E quando comparada com a otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da norma, apresentou aumentos de 17,79% e 17,92%, respectivamente.

Dessa forma, é possível reiterar que a otimização baseada em confiabilidade, para o caso abordado nesse trabalho, é tida como conservadora, porém é necessária em estruturas otimizadas que necessitam obter determinados índices de confiabilidade ao longo da sua vida útil.

3.3.7 Comparação entre as otimizações envolvendo duas e quatro variáveis de projeto

Avaliando os volumes ótimos de cada otimização realizada anteriormente, e fazendo uma comparação entre as análises que consideravam duas e quatro variáveis de projeto para o problema proposto, tem-se os seguintes resultados, conforme Tabela 41:

Tabela 41- Resumo dos volumes ótimos da treliça de 3 barras

Otimização	Volume - 2 Variáveis (mm ³)	Volume- 4 Variáveis (mm ³)	Redução (%)
Determinística R ₁ e R ₂	2,738x10 ⁶	2,407x10 ⁶	12,09
Determinística R ₁ , R ₂ e R ₃	3,087x10 ⁶	2,632x10 ⁶	14,74
Determinística R ₁ e R ₂ (NBR 8800:2008)	4,506x10 ⁶	3,961x10 ⁶	12,09
Determinística R ₁ , R ₂ e R ₃ (NBR 8800:2008)	4,506x10 ⁶	3,961x10 ⁶	12,09
RBDO R ₁ e R ₂	5,308x10 ⁶	4,666x10 ⁶	12,09
RBDO R ₁ , R ₂ e R ₃	5,308x10 ⁶	4,671x10 ⁶	12,00

Fonte: Autora, 2020.

Dessa forma, é possível concluir que, para o exemplo utilizado, quanto mais variáveis de projeto são adotadas na otimização, mais refinados se tornam os resultados, e mais próxima do conceito de otimização a estrutura passa a estar.

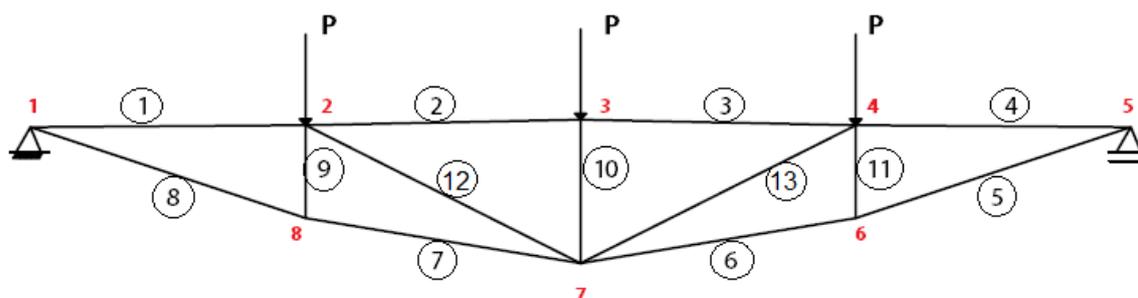
Vale atentar à restrição em termos computacionais que alguns projetos podem possuir, obrigando os projetistas a utilizarem menos variáveis determinísticas, de forma a garantir resultados seguros dentro das limitações já expostas.

3.4 Treliça de 13 barras

Nesse segundo exemplo a treliça isostática possui 13 barras submetidas a três carregamentos nodais verticais de 100 kN cada, conforme mostra a Figura 26, com a numeração das respectivas barras. Os dados se encontram na Tabela 42.

Essa treliça também é formada por barras compostas por aço A36 que possui módulo de elasticidade igual a 200 GPa, tensão de escoamento de 250 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0,26.

Figura 26- Treliça de 13 barras



Fonte: Autora, 2020.

Tabela 42- Comprimento dos elementos

Barras	1, 2, 3 e 4	5 e 8	6 e 7	9 e 11	10	12 e 13
Comprimentos	3000,00	3162,00	3041,00	1020,00	1580,00	3363,10

Fonte: Autora, 2020.

As barras 1 e 4 possuem esforço igual a -441,14 kN, enquanto as barras 2 e 3 possuem esforço de -379,83 kN, e as barras 9 e 11, -73,53 kN. Ainda se tratando das barras comprimidas tem-se a barra 10 com um esforço igual a -84,82 kN, e as barras 12 e 13 com esforço de -68,81 kN. As barras tracionadas, 5 e 8, 6 e 7, possuem, respectivamente, esforços iguais a 564,99 kN e 447,22 kN. Dessa forma conclui-se que as barras comprimidas mais solicitadas são as de número 1 e 4, enquanto as tracionadas são as de número 5 e 8.

As otimizações seguintes foram realizadas em elementos que possuem simetria, de forma agrupada. Portanto cada análise será realizada de forma a otimizar 6 pares de barras (1 e 4, 2 e 3, 5 e 8, 6 e 7, 9 e 11, e 12 e 13) além da barra 10.

Para a primeira etapa das otimizações foram utilizadas duas variáveis de projeto (um diâmetro e uma espessura para todos os elementos agrupados), e para a segunda etapa foram utilizadas quatorze variáveis de projeto (um diâmetro e uma

espessura para cada elemento agrupado), de forma análoga ao exemplo da treliça de 3 barras.

As variáveis probabilísticas adotadas continuam sendo a tensão de escoamento, o carregamento e o módulo de elasticidade com os dados estatísticos conforme Tabela 2. A função objetivo também continua sendo a mesma adotada na seção 3.3.4, estendida para 13 elementos.

3.4.1 Restrições

Novamente foram consideradas o total de 7 restrições: 2 lineares, consideradas apenas de forma determinística, e 5 não-lineares, sendo 3 consideradas como determinísticas e outras 2 como determinísticas/probabilísticas.

As restrições são consideradas como R_1 , R_2 e R_3 , conforme feito anteriormente, porém como a estrutura tem alterações geométricas comparada à anterior, o limite da restrição relativa ao deslocamento nodal sofreu alteração.

Os deslocamentos nodais foram calculados novamente a partir do princípio dos trabalhos virtuais, e a restrição adotada possuía o seguinte limite:

$$\frac{L}{250} = \frac{12000}{250} = 48 \text{ mm} \quad (70)$$

Todas as outras restrições tanto determinísticas quanto probabilísticas foram adotadas conforme a seção 3.3.2.

3.4.2 Parâmetros do algoritmo genético

Os parâmetros e os valores utilizados no desenvolvimento do algoritmo genético, a partir do software Matlab R2018b estão listados abaixo:

a) Número de gerações: 150 na primeira etapa e 300 na segunda etapa;

Foi adotado inicialmente 15 0 gerações para as duas etapas, porém, com o aumento do número de variáveis, e conseqüente aumento de combinações

possíveis entre essas variáveis, tornou-se necessário aumentar a quantidade de gerações do problema, baseado também, no custo computacional que cada uma possuía.

b) Tamanho da população: 50;

c) Taxa de crossover: 0,80;

d) Indivíduos de elite que sobreviverão para formar a próxima geração: $0,05 \times$ tamanho da população (Default do programa para problemas com variáveis inteiras).

Assim como no exemplo anterior, não foram adotados critérios de parada, forçando as otimizações a produzirem resultados ao longo de todas as gerações estabelecidas.

3.4.3 Otimizações considerando duas variáveis de projeto

Assim como no exemplo anterior, os valores ótimos obtidos nessa primeira etapa serão limitados pela barra mais solicitada, perante a cada restrição governante do processo, e o resultado será estendido para as demais barras.

Todas as otimizações aqui realizadas seguirão os mesmos processos adotados no exemplo anterior, inclusive, os coeficientes de ponderação utilizados nas otimizações em que são considerados, continuem sendo os mesmos expostos na seção 3.3.5.2.

3.4.3.1 Otimização determinística

Os valores ótimos obtidos com a consideração das restrições R_1 e R_2 e R_1 , R_2 e R_3 são, respectivamente:

Tabela 43- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2

Diâmetro (mm)	148,00
Espessura (mm)	4,20
Área (mm²)	1897,40
Mom. Inércia (mm⁴)	4,91x10 ⁶
Volume (mm³)	6,594x10 ⁷

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 44- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

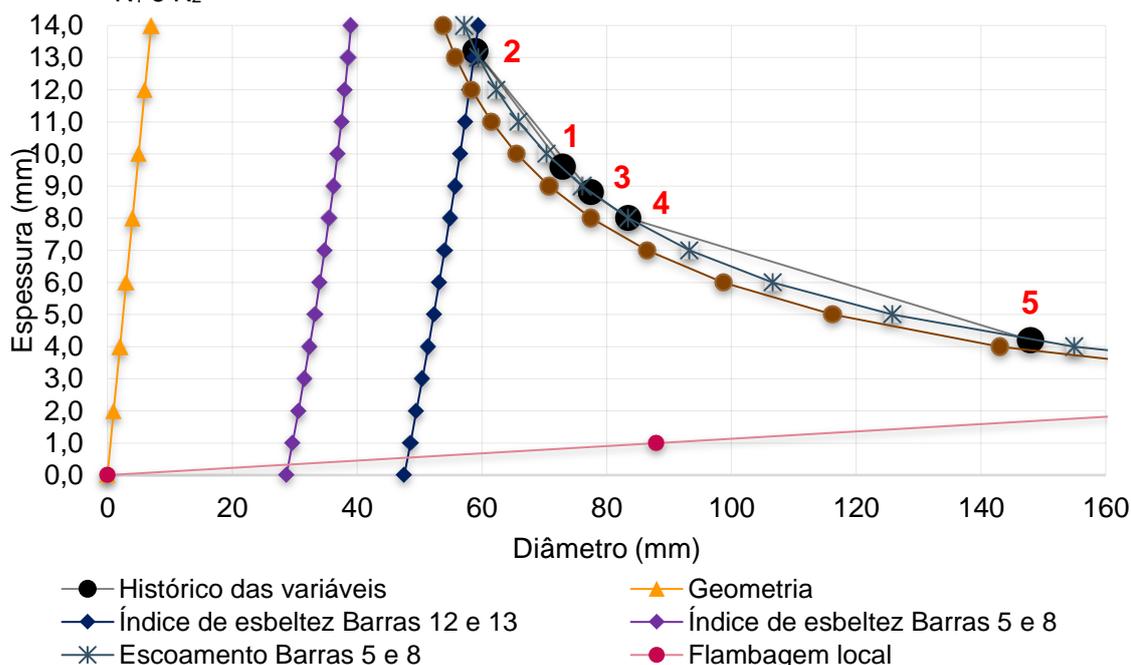
Diâmetro (mm)	148,00
Espessura (mm)	4,20
Área (mm²)	1897,40
Mom. Inércia (mm⁴)	4,91x10 ⁶
Volume (mm³)	6,594x10 ⁷

Fonte: Autora, 2020.

Através dos resultados encontrados, percebe-se que a consideração de R_3 não gerou alterações nos resultados das otimizações, o que significa que ela não se encontra ativa.

As restrições e o histórico dos pontos ótimos encontrados estão plotadas em seguida, porém como para esse exemplo o número de restrições aumenta, já que o número de barras da estrutura também aumenta, as restrições envolvendo o deslocamento nodal, a tensão de escoamento, e a flambagem das barras são plotadas apenas para as situações mais desfavoráveis. Portanto serão considerados graficamente, o deslocamento do nó 3, a tensão de escoamento das barras 5 e 8, e a flambagem das barras 1 e 4.

Figura 27- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2



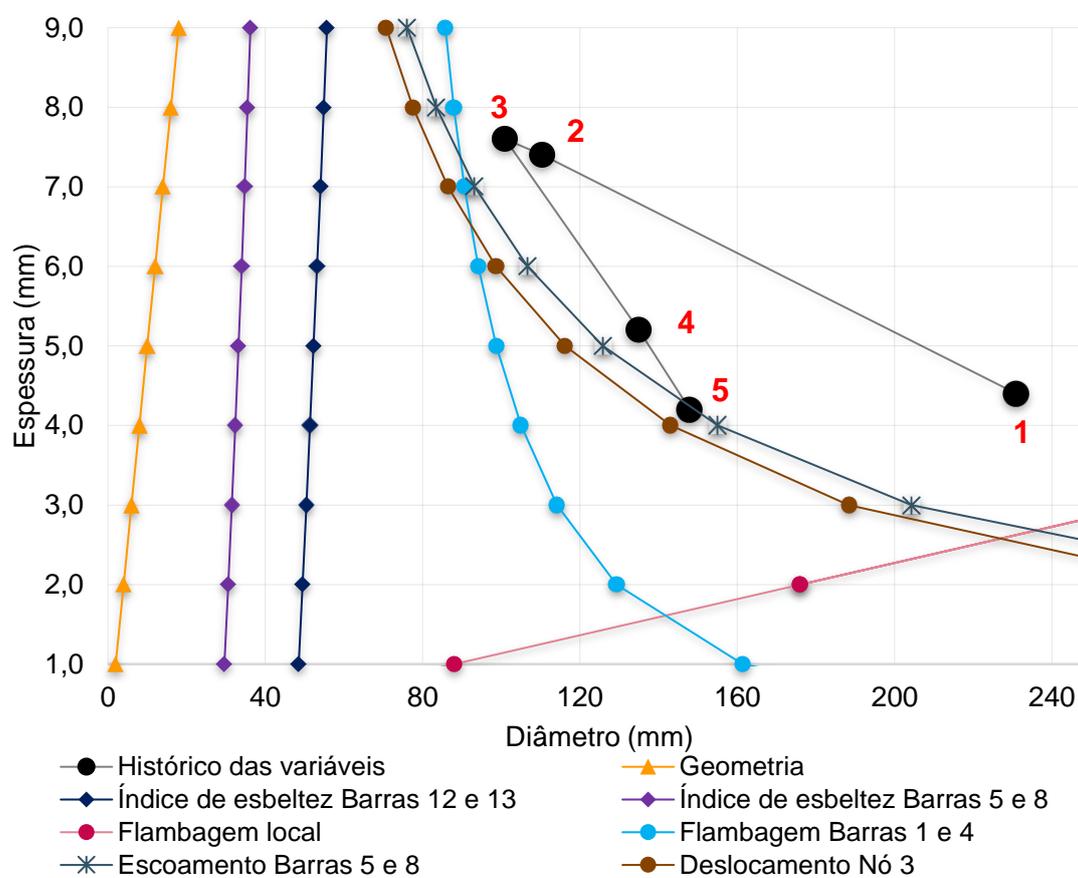
Fonte: Autora, 2020.

Tabela 45- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2

Ponto	1	2	3	4	5
X	73,00	59,00	77,50	83,50	148,00
Y	9,60	13,20	8,80	8,00	4,20

Fonte: Autora, 2020.

Figura 28- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



Fonte: Autora, 2020.

Tabela 46- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Ponto	1	2	3	4	5
X	231,00	110,50	101,00	135,00	148,00
Y	4,40	7,40	7,60	5,20	4,20

Fonte: Autora, 2020.

Portanto, com os gráficos apresentados é possível perceber que apesar dos resultados encontrados serem idênticos, o comportamento ao longo das

otimizações foi diferente, entretanto, para as duas otimizações os valores se estabilizam quando o processo “esbarra” na restrição do escoamento das barras 5 e 8, mostrando que a mesma governa os processos.

Além disso, nota-se que os resultados das restrições que foram expostas nas Figuras 27 e 28, correspondente à tensão de escoamento apenas das barras 5 e 8, e à flambagem apenas das barras 1 e 4, são as mais importantes para esse caso, de modo a tornar as restrições para as outras barras dispensáveis.

As restrições podem ser avaliadas numericamente, conforme as tabelas a seguir.

Tabela 47- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-8,55	-	-
Nó 3	-	-	-3,80	-	-
Nó 4	-	-	-8,55	-	-
Nó 6	-	-	-8,74	-	-
Nó 7	-	-	-4,16	-	-
Nó 8	-	-	-8,74	-	-
Barras 1 e 4	-69,80	-52,76	-	-12,83	-141,02
Barras 2 e 3			-	-39,18	-141,02
Barras 5 e 8			-	-0,03	-237,83
Barras 6 e 7			-	-9,57	-240,20
Barras 9 e 11			-	-210,47	-179,95
Barra 10			-	-197,30	-168,94
Barras 12 e 13			-	-220,49	-133,88

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 48- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga Crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-8,55	-		-
Nó 3	-	-	-3,80	-		-
Nó 4	-	-	-8,55	-		-
Nó 6	-	-	-8,74	-		-
Nó 7	-	-	-4,16	-		-
Nó 8	-	-	-8,74	-		-
Barras 1 e 4	-69,80	-52,76	-	-12,83	-626,57	-141,02
Barras 2 e 3			-	-39,18	-676,57	-141,02
Barras 5 e 8			-	-0,03	-	-237,83
Barras 6 e 7			-	-9,57	-	-240,20
Barras 9 e 11			-	-210,47	-9237,91	-179,95
Barra 10			-	-197,30	-3781,25	-168,94
Barras 12 e 13			-	-220,49	-800,76	-133,88

Fonte: Autora, 2020.

Destaca-se que, exceto a restrição da tensão de escoamento das barras 5 e 8, todas as outras restrições se encontram longe do limite, haja vista que para esse estudo envolvendo apenas duas variáveis de projeto, a otimização é realizada de acordo com as restrições da barra mais solicitada e é estendida para as outras, gerando um resultado superdimensionado.

3.4.3.2 Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008

Os valores ótimos encontrados, seguindo as mesmas restrições e métodos adotados na seção 3.3.5.2, são encontrados nas Tabelas 49 e 50:

Tabela 49- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR8800:2008)

Diâmetro (mm)	97,50
Espessura (mm)	11,60
Área (mm²)	3130,41
Mom. Inércia (mm⁴)	2,94x10 ⁶
Volume (mm³)	1,088x10 ⁸

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 50- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Diâmetro (mm)	280,50
Espessura (mm)	3,60
Área (mm²)	3131,66
Mom. Inércia (mm⁴)	3,00x10 ⁷
Volume (mm³)	1,088x10 ⁸

Fonte: Autora, 2020.

Observando os resultados acima é possível perceber que o processo buscou permanecer com a menor área possível para garantir a restrição da tensão de escoamento das barras 5 e 8 (barras mais solicitadas), enquanto aumentou a inércia para garantir a resistência à flambagem, quando a mesma passou a ser considerada no processo.

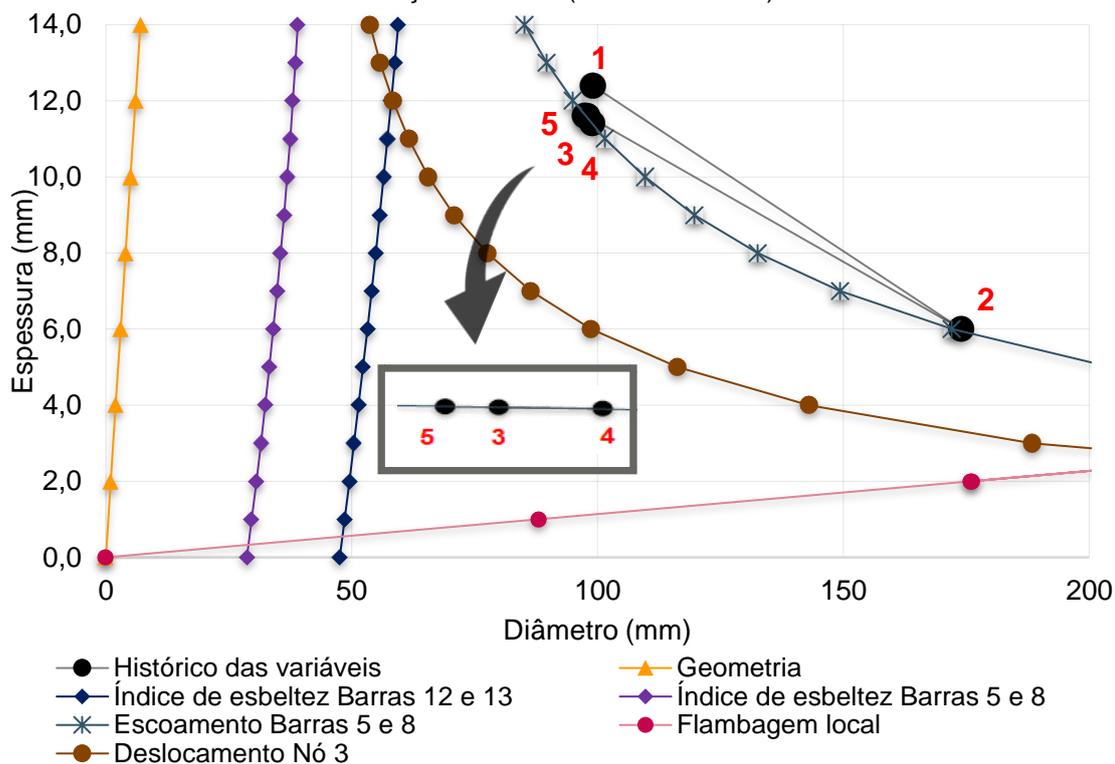
As Figuras 29 e 30 mostram os históricos das variáveis encontradas nos processos considerando R_1 e R_2 , e R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente:

Tabela 51- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Ponto	1	2	3	4	5
X	99,00	174,00	98,00	99,00	97,50
Y	12,40	6,00	11,60	11,40	11,60

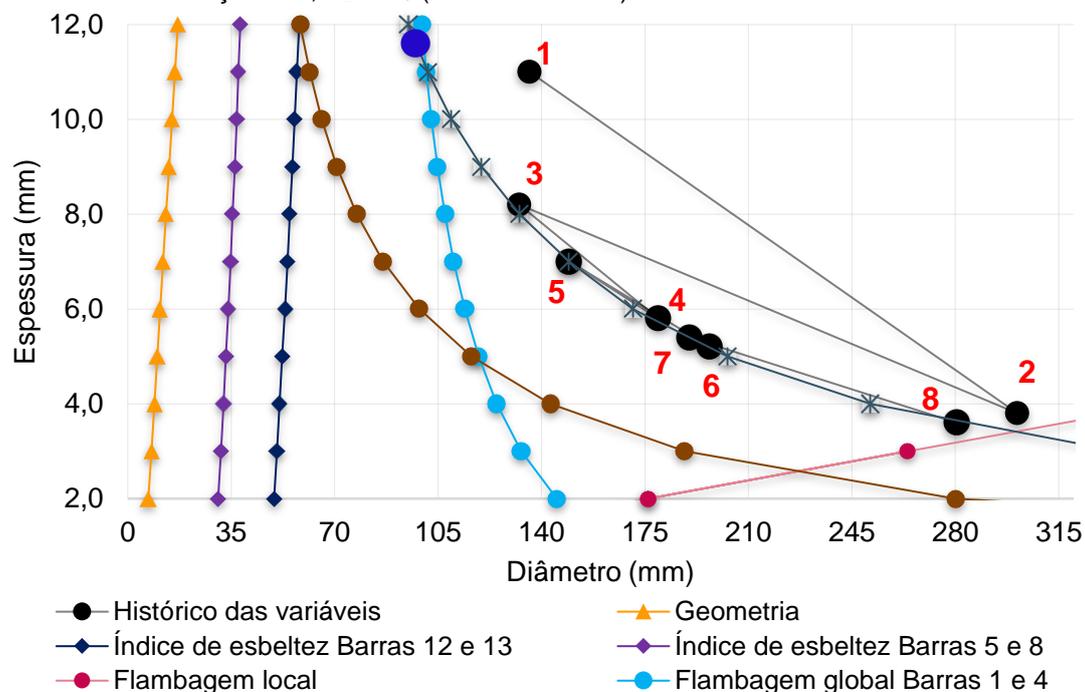
Fonte: Autora, 2020.

Figura 29- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)



Fonte: Autora, 2020.

Figura 30- Histórico das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)



Fonte: Autora, 2020.

Tabela 52- Coordenadas das variáveis/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Ponto	1	2	3	4	5	6	7	8
X	136,00	301,00	132,50	179,50	149,50	197,00	190,00	280,50
Y	11,00	3,80	8,20	5,80	7,00	5,20	5,40	3,60

Fonte: Autora, 2020.

As tabelas a seguir mostram os valores das restrições envolvidas nos processos de otimização, para cada ponto ótimo obtido.

Tabela 53- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares		
	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-24,09	-	-
Nó 3	-	-	-21,21	-	-
Nó 4	-	-	-24,09	-	-
Nó 6	-	-	-24,21	-	-
Nó 7	-	-	-21,43	-	-
Nó 8	-	-	-24,21	-	-
Barras 1 e 4	-37,15	-79,59	-	-11,65	-141,02
Barras 2 e 3			-	-35,60	-141,02
Barras 5 e 8			-	-0,002	-237,83
Barras 6 e 7			-	-8,68	-240,20
Barras 9 e 11			-	-191,33	-179,95
Barra 10			-	-179,36	-168,94
Barras 12 e 13			-	-200,49	-133,88

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 54- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Elementos	Restrições lineares		Restrições não-lineares			
	Geom. (mm)	Flamb. local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga Crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-24,10	-		-
Nó 3	-	-	-21,22	-		-
Nó 4	-	-	-24,10	-		-
Nó 6	-	-	-24,22	-		-
Nó 7	-	-	-21,44	-		-
Nó 8	-	-	-24,22	-		-
Barras 1 e 4	-136,65	-10,08	-	-11,73	-5310,48	-169,36
Barras 2 e 3			-	-35,68	-5385,48	-169,36
Barras 5 e 8			-	-0,09	-	-267,70
Barras 6 e 7			-	-8,76	-	-268,94
Barras 9 e 11			-	-191,35	-51665,03	-189,58
Barra 10			-	-179,37	-21428,81	-183,86
Barras 12 e 13			-	-200,45	-4678,80	-165,65

Fonte: Autora, 2020.

Apesar de a flambagem estar longe do limite permitido, ela se encontra satisfeita no processo de otimização quando considerada como restrição. Isso pode ser confirmado utilizando os valores D e t ótimos encontrados na análise em que não considera R_3 como restrição, na análise que a considera, sendo possível verificar que para esse caso, a carga atuante supera a carga crítica das barras 1 e 4, e 2 e 3, em 0,09 kN, e 0,01 kN, respectivamente, mostrando a violação da restrição, conforme pode ser visto na Figura 30.

Mesmo a flambagem gerando modificações na seção transversal, quem governa os dois processos de otimização é o escoamento das barras 5 e 8.

3.4.3.3 Otimização baseada em confiabilidade

Novamente foi realizada otimização cuja probabilidade de falha alvo de cada elemento da estrutura é igual a 10^{-5} . Os resultados encontrados com a consideração de R_1 e R_2 e R_1 , R_2 e R_3 se encontram nas tabelas a seguir.

Tabela 55- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 , com P_f igual a 10^{-5}

Diâmetro (mm)	88,00
Espessura (mm)	16,40
Área (mm²)	3688,98
Mom. Inércia (mm⁴)	2487998,20
Volume (mm³)	$1,282 \times 10^8$

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 56- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 , com P_f igual a 10^{-5}

Diâmetro (mm)	139,50
Espessura (mm)	9,00
Área (mm²)	3689,80
Mom. Inércia (mm⁴)	7892137,50
Volume (mm³)	$1,282 \times 10^8$

Fonte: Autora, 2020.

Através dos resultados apresentados conclui-se que a adoção da flambagem como restrição gerou aumento irrelevante para o volume da estrutura, porém gerou mudança nas dimensões, buscando encontrar um momento de inércia maior.

As Tabelas 57 e 58 mostram como as variáveis se desenvolveram ao longo das gerações considerando R_1 e R_2 , e R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente.

Tabela 57- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Ponto	1	2	3	4	5
X	94,00	92,00	87,50	85,50	88,00
Y	15,20	15,40	16,60	17,20	16,40

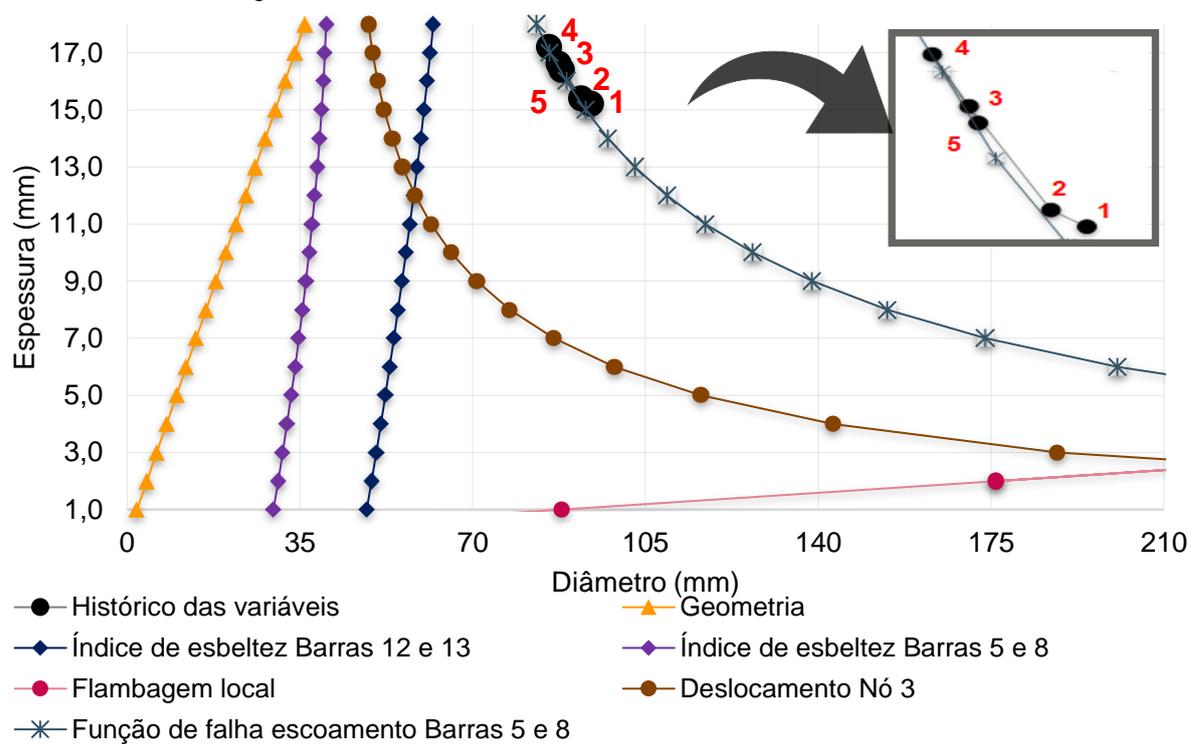
Fonte: Autora, 2020.

Tabela 58- Coordenadas das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Ponto	1	2	3	4	5
X	168,00	167,50	167,00	166,50	139,50
Y	7,60	7,40	7,40	7,40	9,00

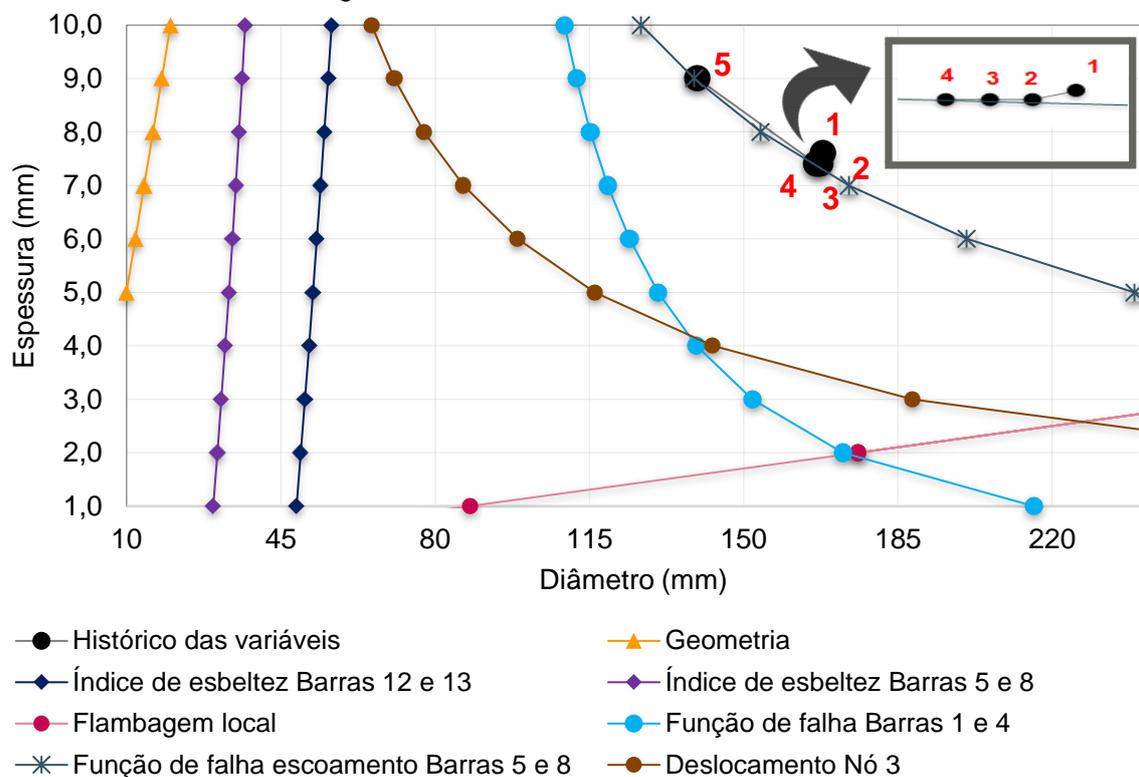
Fonte: Autora, 2020.

Figura 31- Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 32- Histórico das variáveis/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando as restrições R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Confirmando o que já havia sido comentado, as restrições que governam os dois casos é o escoamento das barras 5 e 8. Essas restrições podem ser avaliadas numericamente, a seguir.

Tabela 59- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/ escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-27,71	-	-
Nó 3	-	-	-25,27	-	-
Nó 4	-	-	-27,71	-	-
Nó 6	-	-	-27,81	-	-
Nó 7	-	-	-25,45	-	-
Nó 8	-	-	-27,81	-	-
Barras 1 e 4	-27,60	-82,63	-	-11,89	-84,48
Barras 2 e 3			-	-35,82	-84,48
Barras 5 e 8			-	-0,20	-178,23
Barras 6 e 7			-	-8,92	-182,89
Barras 9 e 11			-	-178,09	-160,72
Barra 10			-	-168,90	-139,16
Barras 12 e 13			-	-184,72	-70,50

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 60- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/esc. (MPa)	Função de falha/flamb. (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-27,71	-	-	-
Nó 3	-	-	-25,27	-	-	-
Nó 4	-	-	-27,71	-	-	-
Nó 6	-	-	-27,81	-	-	-
Nó 7	-	-	-25,45	-	-	-
Nó 8	-	-	-27,81	-	-	-
Barras 1 e 4	-60,75	-72,50	-	-11,94	-763,40	-135,13
Barras 2 e 3			-	-35,86	-845,40	-135,13
Barras 5 e 8			-	-0,25	-	-231,62
Barras 6 e 7			-	-8,96	-	-234,24
Barras 9 e 11			-	-178,10	-12496,90	-177,95
Barra 10			-	-169,91	-4933,00	-165,84
Barras 12 e 13			-	-184,69	-1050,80	-127,28

Fonte: Autora, 2020.

A otimização probabilística com probabilidade de falha igual a 10^{-3} , correspondente à otimização determinística que considera os coeficientes de ponderação da norma, apresenta os resultados dados pelas Tabelas 61 e 62.

Percebe-se que os volumes obtidos são bem próximos dos volumes encontrados anteriormente na otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da norma (aumento igual a 1,10%), e que da mesma forma, a flambagem mudou as dimensões buscando um momento de inércia maior.

Tabela 61- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}

Diâmetro (mm)	86,00
Espessura (mm)	14,00
Área (mm²)	3166,72
Mom. Inércia (mm⁴)	$2,13 \times 10^6$
Volume (mm³)	$1,101 \times 10^8$

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 62- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}

Diâmetro (mm)	121,00
Espessura (mm)	9,00
Área (mm²)	3166,72
Mom. Inércia (mm⁴)	$5,00 \times 10^6$
Volume (mm³)	$1,101 \times 10^8$

Fonte: Autora, 2020.

3.4.3.4 Probabilidade de falha

As probabilidades de falha de cada um dos elementos para cada modo de falha, se encontra na tabela 63 a seguir.

Percebe-se novamente que, como todas as otimizações foram governadas pela restrição correspondente ao escoamento das barras 5 e 8, as maiores probabilidades de falha correspondem à mesma, quando a flambagem é considerada. Nas otimizações envolvendo apenas R_1 e R_2 o mesmo não pode ser garantido já que não considera a flambagem como restrição podendo possuir, ou não, uma P_f superior à do escoamento das barras 5 e 8.

Nota-se que na otimização baseada em confiabilidade a probabilidade de falha possui um valor próximo ao da P_f alvo.

Comparando os resultados das otimizações determinísticas considerando os coeficientes de ponderação da norma, com os resultados da RBDO, observa-se que para os modos de falha considerados nas otimizações, as P_f obtidas apresentam resultados próximos, como esperado.

Além disso, avaliando as otimizações que consideram R_1 e R_2 com as que consideram também R_3 , é possível perceber que com o aumento da área da seção transversal há decréscimo na P_f relativa ao escoamento. Em contrapartida, quando há aumento no momento de inércia a probabilidade de falha correspondente à flambagem é quem sofre redução.

Tabela 63- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 13 barras (duas variáveis de projeto)

Modo de falha/Barras	Determinística R₁ e R₂	Determinística R₁, R₂ e R₃	Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	RBDO R₁ e R₂ *	RBDO R₁, R₂ e R₃ *	RBDO R₁ e R₂ **	RBDO R₁, R₂ e R₃ **
Esc/ 1 e 4	3,99x10 ⁻¹	3,99x10 ⁻¹	3,41x10 ⁻⁴	3,37x10 ⁻⁴	1,26x10 ⁻⁶	1,25x10 ⁻⁶	2,47x10 ⁻⁴	2,47x10 ⁻⁴
Esc/ 2 e 3	1,88x10 ⁻¹	1,88x10 ⁻¹	7,71x10 ⁻⁶	7,61x10 ⁻⁶	4,90x10 ⁻⁹	4,84x10 ⁻⁹	5,01x10 ⁻⁶	5,01x10 ⁻⁶
Esc/ 5 e 8	4,98x10 ⁻¹	4,98x10 ⁻¹	1,32x10 ⁻³	1,31x10 ⁻³	9,69x10 ⁻⁶	9,64x10 ⁻⁶	9,95x10 ⁻⁴	9,95x10 ⁻⁴
Esc/ 6 e 7	4,26x10 ⁻¹	4,26x10 ⁻¹	4,93x10 ⁻⁴	4,88x10 ⁻⁴	2,19x10 ⁻⁶	2,17x10 ⁻⁹	3,61x10 ⁻⁴	3,61x10 ⁻⁴
Esc/ 9 e 11	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}
Esc/ 10	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}
Esc/ 12 e 13	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}
Flam/ 1 e 4	5,89x10 ⁻¹⁰	5,89x10 ⁻¹⁰	2,13x10 ⁻²	0 ^{***}	1,56x10 ⁻¹	0 ^{***}	4,30x10 ⁻¹	2,0x10 ⁻¹⁰
Flam/ 2 e 3	2,63x10 ⁻¹³	2,63x10 ⁻¹³	2,30x10 ⁻³	0 ^{***}	4,29x10 ⁻²	0 ^{***}	2,12x10 ⁻¹	6,9x10 ⁻¹⁴
Flam/ 9 e 11	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}
Flam/ 10	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}
Flam/ 12 e 13	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}

Fonte: Autora, 2020.

* P_{falvo} = 10⁻⁵**P_{falvo} = 10⁻³

*** As probabilidades foram aproximadas para 0 por terem valores muito pequenos

Chama-se atenção para o fato da RBDO com probabilidade de falha alvo igual a 10^{-3} , possuir os mesmos resultados de P_f para o escoamento, tanto na análise considerando R_1 e R_2 , quanto a que considera também, R_3 ; ao contrário da flambagem, onde se verifica modificações nas probabilidades de falha. Isso aconteceu pois apesar da otimização com a adição de R_3 ter permanecido com a mesma área da seção transversal, houve modificação nas dimensões dos elementos.

Mais uma vez, as P_f das otimizações determinísticas correspondentes ao escoamento das barras 5 e 8 (modo de falha governante), são de aproximadamente 50% (0,5).

3.4.3.5 Comparação entre as otimizações considerando duas variáveis de projeto

Perante a todos os resultados encontrados é possível perceber que a otimização baseada em confiabilidade com probabilidade de falha igual a 10^{-5} , quando comparada à otimização determinística, apresentou aumento nos volumes ótimos igual a 94,42%, no caso em que R_1 e R_2 são considerados (Tabela 64). Já para R_1 , R_2 e R_3 o aumento foi igual 94,47%, não apresentando muita diferença da anterior devido ao fato da flambagem não ter gerado influência em nenhuma das otimizações.

Tabela 64- Resumos dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto

Otimização	Volume (mm ³)
Determinística R_1 e R_2	6,594x10 ⁸
Determinística R_1, R_2 e R_3	6,594x10 ⁸
Determinística R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	1,088x10 ⁸
Determinística R_1, R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	1,088x10 ⁸
RBDO R_1 e R_2 ($P_{falvo}=10^{-5}$)	1,282x10 ⁸
RBDO R_1, R_2 e R_3 ($P_{falvo}=10^{-5}$)	1,282x10 ⁸
RBDO R_1 e R_2 ($P_{falvo}=10^{-3}$)	1,101x10 ⁸
RBDO R_1, R_2 e R_3 ($P_{falvo}=10^{-3}$)	1,101x10 ⁸

Fonte: Autora, 2020.

Por esse mesmo motivo, entre as otimizações RBDO ($P_f=10^{-5}$) e a que considera os coeficientes de ponderação da norma, o aumento do volume ótimo, para R_1 e R_2 , e R_1 , R_2 e R_3 , foi igual a 17,84% e 17,82%, respectivamente, cuja diferença é irrelevante para o exemplo dado.

3.4.4 Otimizações considerando quatorze variáveis de projeto

Nessa segunda etapa, as otimizações são realizadas buscando um diâmetro e uma espessura que atenda às limitações de cada grupo de barras, minimizando o volume de cada elemento e, portanto, da estrutura inteira.

3.4.4.1 Otimização determinística

A otimização foi realizada e os resultados ótimos obtidos se encontram nas Tabelas 65 e 66, considerando R_1 e R_2 , R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente.

Tabela 65- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	101,50	68,00	53,50	49,00	50,00	55,50	61,00
Esp. (mm)	6,00	8,60	16,20	20,20	2,00	2,40	1,20
Área (mm²)	1800,13	1604,85	1898,34	1827,65	301,59	400,36	225,44
Mom. Inércia (mm⁴)	$2,0 \times 10^6$	$7,2 \times 10^5$	$3,9 \times 10^5$	$2,8 \times 10^5$	$8,7 \times 10^4$	$1,4 \times 10^5$	$1,0 \times 10^5$
Volume (mm³)	$4,632 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 66- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	115,50	131,50	63,00	60,50	81,00	93,00	85,00
Esp. (mm)	5,20	4,00	11,80	12,00	1,20	1,40	1,40
Área (mm²)	1081,89	1602,21	1898,02	1828,41	300,84	402,88	367,69
Mom. Inércia (mm⁴)	$2,7 \times 10^6$	$3,3 \times 10^6$	$6,5 \times 10^5$	$5,7 \times 10^5$	$2,4 \times 10^5$	$4,2 \times 10^5$	$3,2 \times 10^5$
Volume (mm³)	$4,727 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Avaliando as duas tabelas, é possível perceber que a flambagem, quando considerada, gera aumento nos diâmetros das barras, na busca de um maior momento de inércia, o que ocasiona no aumento igual a 2,07% do volume. Atenta-se ao fato das barras 5, 6, 7 e 8 terem sofrido modificações nas suas dimensões, mesmo não estando sob compressão, devido às diversas combinações possíveis de valores de diâmetro e espessura que resultam em áreas viáveis para o sistema.

As restrições da otimização que considera apenas R_1 e R_2 , podem ser avaliadas numericamente conforme a tabela a seguir.

Tabela 67- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2

	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-0,80	-	-
Nó 3	-	-	-3,38	-	-
Nó 4	-	-	-0,80	-	-
Nó 6	-	-	-2,05	-	-
Nó 7	-	-	-5,05	-	-
Nó 8	-	-	-2,05	-	-
Barras 1 e 4	-44,75	-71,08	-	-0,02	-111,32
Barras 2 e 3	-25,40	-80,09	-	-0,76	-58,62
Barras 5 e 8	-10,55	-84,70	-	-0,15	-80,06
Barras 6 e 7	-4,30	-85,57	-	-0,39	-55,46
Barras 9 e 11	-23,00	-63,00	-	-1,32	-139,95
Barra 10	-25,35	-64,88	-	-0,23	-115,92
Barras 12 e 13	-29,30	-37,17	-	-2,04	-40,96

Fonte: Autora, 2020.

Nota-se que a otimização de todas as barras é governada pelo escoamento. Comportamento este que não ocorre quando R_3 passa a ser considerada, conforme mostra a Tabela 68:

Tabela 68- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3

Elementos	Geom. (mm)	Flamb. local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga Crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-3,12	-	-	-
Nó 3	-	-	-1,47	-	-	-
Nó 4	-	-	-3,12	-	-	-
Nó 6	-	-	-4,37	-	-	-
Nó 7	-	-	-3,13	-	-	-
Nó 8	-	-	-4,37	-	-	-
Barras 1 e 4	-52,55	-65,79	-	-0,26	-152,34	-123,16
Barras 2 e 3	-61,75	-55,13	-	-0,35	-314,77	-133,48
Barras 5 e 8	-19,70	-82,66	-	-0,11	-	-129,77
Barras 6 e 7	-18,25	-82,96	-	-0,49	-	-127,82
Barras 9 e 11	-39,30	-20,50	-	-0,70	-379,44	-163,85
Barra 10	-45,10	-21,57	-	-1,79	-234,19	-151,22
Barras 12 e 13	-41,10	-27,29	-	-97,97	-0,08	-86,23

Fonte: Aurora, 2020.

As barras 12 e 13 passam a ser governadas pela flambagem, conforme mostra a tabela acima. Esse comportamento já era esperado por elas apresentarem o maior comprimento.

É importante perceber que com uma estrutura um pouco mais robusta o deslocamento tende a se afastar do limite estipulado.

3.4.4.2 Otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da NBR 8800:2008

Com a utilização dos coeficientes de majoração do carregamento e minoração das resistências, os resultados ótimos encontrados se encontram a seguir.

Tabela 69- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	100,00	63,50	184,00	66,00	43,50	35,50	61,50
Esp. (mm)	10,60	18,80	5,60	21,60	4,00	7,60	2,00
Área (mm²)	2977,10	2640,07	3138,58	3012,91	496,37	666,14	373,85
Mom. Inércia (mm⁴)	$3,0 \times 10^6$	$7,8 \times 10^6$	$1,2 \times 10^7$	$9,2 \times 10^5$	$9,8 \times 10^4$	$6,9 \times 10^4$	$1,7 \times 10^5$
Volume (mm³)	$7,646 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 70- Resultados/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	169,00	204,50	84,50	88,00	50,00	69,00	96,00
Esp. (mm)	5,80	4,20	14,20	12,80	3,40	3,20	1,60
Área (mm²)	2973,71	2642,90	3136,13	3023,97	497,75	661,49	474,51
Mom. Inércia (mm⁴)	$9,9 \times 10^6$	$1,3 \times 10^7$	$2,0 \times 10^6$	$2,2 \times 10^6$	$1,3 \times 10^5$	$3,6 \times 10^5$	$5,3 \times 10^5$
Volume (mm³)	$7,718 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Baseado nos resultados apresentados é possível perceber que a flambagem se encontra ativa no processo de otimização, quando ela é considerada como uma restrição. Essa conclusão é baseada na mudança da geometria das barras, com consequente aumento do momento de inércia em todas as barras, exceto as barras 5 e 8. Como as barras 5 e 8 estão sob efeito de tração não era esperado um aumento nos seus momentos de inércia.

As restrições correspondentes aos dois processos de otimização se encontram nas tabelas a seguir, onde a primeira não considera os efeitos da flambagem, e a segunda considera.

Tabela 71- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)

Elementos	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-19,42	-	-
Nó 3	-	-	-20,95	-	-
Nó 4	-	-	-19,42	-	-
Nó 6	-	-	-20,18	-	-
Nó 7	-	-	-21,95	-	-
Nó 8	-	-	-20,18	-	-
Barras 1 e 4	-39,40	-78,57	-	-0,54	-105,75
Barras 2 e 3	-12,95	-84,62	-	-0,01	-25,02
Barras 5 e 8	-86,40	-55,14	-	-0,59	-249,89
Barras 6 e 7	-11,40	-84,94	-	-0,15	-125,78
Barras 9 e 11	-17,75	-77,13	-	-0,63	-127,33
Barra 10	-10,15	-83,33	-	-2,10	-45,46
Barras 12 e 13	-28,75	-57,25	-	-2,98	-40,22

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 72- Valores das restrições da otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)

Elementos	Geom. (mm)	Flamb. local (kN)	Desloc. (mm)	Tensão de escoamento (MPa)	Carga Crítica (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-20,21	-	-	-
Nó 3	-	-	-20,33	-	-	-
Nó 4	-	-	-20,21	-	-	-
Nó 6	-	-	-20,96	-	-	-
Nó 7	-	-	-21,35	-	-	-
Nó 8	-	-	-20,96	-	-	-
Barras 1 e 4	-78,70	-58,86	-	-0,28	-1301,47	-148,04
Barras 2 e 3	-98,05	-39,31	-	-0,25	-2043,85	-157,65
Barras 5 e 8	-28,05	-82,05	-	-0,42	-	-175,29
Barras 6 e 7	-31,20	-81,13	-	-0,98	-	-187,23
Barras 9 e 11	-21,60	-73,29	-	-1,26	-121,78	-138,25
Barra 10	-31,30	-66,44	-	-0,51	-107,95	-132,16
Barras 12 e 13	-46,40	-28,00	-	-50,56	-0,03	-99,25

Fonte: Autora, 2020.

A partir dos resultados obtidos é possível concluir que, após ser adotada como uma restrição, a flambagem só passou a governar as barras 12 e 13, enquanto todas as outras barras são governadas pelo escoamento.

3.4.4.3 Otimização baseada em confiabilidade

Outra otimização baseada em confiabilidade foi realizada em cada uma das barras, buscando dimensões que garantissem para elas uma probabilidade de falha igual a 10^{-5} .

Os resultados para o caso em que não se considera a flambagem e o caso em que se considera a mesma como restrição da otimização, estão expostos nas Tabelas 73 e 74, respectivamente:

Tabela 73- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	126,00	100,00	190,00	121,00	61,50	41,00	56,00
Esp. (mm)	9,60	11,20	6,40	10,20	3,20	7,40	2,60
Área (mm²)	3510,54	3124,50	3691,50	3550,50	586,10	781,13	436,18
Mom. Inércia (mm⁴)	$5,9 \times 10^6$	$3,1 \times 10^6$	$1,6 \times 10^7$	$5,5 \times 10^6$	$2,5 \times 10^5$	$1,2 \times 10^5$	$1,6 \times 10^5$
Volume (mm³)	$9,012 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 74- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	166,50	102,50	78,00	195,00	118,50	61,00	95,00
Esp. (mm)	7,00	12,00	20,40	6,00	1,60	4,40	2,00
Área (mm²)	3507,59	3411,77	3691,50	3562,57	587,60	782,38	584,34
Mom. Inércia (mm⁴)	$1,1 \times 10^7$	$3,5 \times 10^6$	$1,7 \times 10^6$	$1,6 \times 10^7$	$1,0 \times 10^6$	$3,1 \times 10^5$	$6,3 \times 10^6$
Volume (mm³)	$9,289 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

É possível notar que houve aumento de 3,08% quando a flambagem passou a ser adotada como restrição do processo.

Os valores das restrições foram avaliados e expostos a seguir, buscando estudar de forma mais específica cada uma das restrições utilizadas nos processos.

Tabela 75- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Geometria (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/esc. (MPa)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-23,73	-	-
Nó 3	-	-	-25,09	-	-
Nó 4	-	-	-23,73	-	-
Nó 6	-	-	-24,37	-	-
Nó 7	-	-	-25,95	-	-
Nó 8	-	-	-24,37	-	-
Barras 1 e 4	-53,40	-74,88	-	-0,88	-127,35
Barras 2 e 3	-38,80	-79,07	-	-1,18	-105,20
Barras 5 e 8	-88,60	-58,31	-	-0,35	-251,31
Barras 6 e 7	-50,0	-76,14	-	-0,34	-222,69
Barras 9 e 11	-27,55	-68,78	-	-1,28	-150,59
Barra 10	-13,10	-82,46	-	-1,18	-70,11
Barras 12 e 13	-25,40	-66,46	-	-0,93	-22,08

Fonte: Autora, 2020.

Com a adoção da flambagem como restrição, as barras 2, 3, 12 e 13 passaram a ser governadas por ela. Todas as outras barras são governadas pelo escoamento.

Tabela 76- Valores das restrições da RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

Elementos	Geom. (mm)	Flambagem local (kN)	Desloc. (mm)	Função de falha/esc. (MPa)	Função de falha/flamb. (kN)	Índice de esbeltez
Nó 2	-	-	-24,82	-	-	-
Nó 3	-	-	-25,04	-	-	-
Nó 4	-	-	-24,82	-	-	-
Nó 6	-	-	-25,46	-	-	-
Nó 7	-	-	-25,90	-	-	-
Nó 8	-	-	-25,46	-	-	-
Barras 1 e 4	-76,25	-64,21	-	-0,69	-1382,5	-146,85
Barras 2 e 3	-39,25	-79,46	-	-20,29	-2,2	-107,05
Barras 5 e 8	-18,60	-84,18	-	-0,35	-	-153,63
Barras 6 e 7	-91,50	-55,50	-	-1,12	-	-254,51
Barras 9 e 11	-57,65	-13,94	-	-1,86	-1456,10	-175,32
Barra 10	-26,10	-74,14	-	-1,54	-49,90	-121,28
Barras 12 e 13	-45,50	-40,50	-	-57,82	-1,40	-97,74

Fonte: Autora, 2020.

Realizou-se, novamente, a título de comparação e validação dos resultados, uma otimização baseada em confiabilidade com uma probabilidade de falha alvo igual a 10^{-3} . Os resultados se encontram nas tabelas a seguir.

Tabela 77- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-3}

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	62,00	95,00	87,00	121,50	26,50	31,50	100,50
Esp. (mm)	29,00	10,00	13,80	8,60	9,40	9,80	1,20
Área (mm²)	3006,5 0	2670,35	3173,51	3050,30	504,68	668,09	374,35
Mom. Inércia (mm⁴)	$7,2 \times 10^5$	$2,4 \times 10^6$	$2,2 \times 10^6$	$4,9 \times 10^6$	$2,4 \times 10^4$	$4,7 \times 10^4$	$4,6 \times 10^5$
Volume (mm³)	$7,729 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

Tabela 78- Resultados/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-3}

	Barras 1 e 4	Barras 2 e 3	Barras 5 e 8	Barras 6 e 7	Barras 9 e 11	Barra 10	Barras 12 e 13
Diâm. (mm)	107,50	207,00	98,50	142,00	37,00	99,00	101,00
Esp. (mm)	9,80	4,20	11,60	7,20	5,20	2,20	1,40
Área (mm²)	3007,9 5	2675,88	3166,85	3049,10	519,49	669,03	438,06
Mom. Inércia (mm⁴)	$3,6 \times 10^6$	$13,8 \times 10^6$	$3,0 \times 10^6$	$6,9 \times 10^6$	$6,7 \times 10^4$	$7,8 \times 10^5$	$5,43 \times 10^5$
Volume (mm³)	$7,774 \times 10^7$						

Fonte: Autora, 2020.

As otimizações determinísticas considerando os coeficientes de ponderação apresentaram volumes ótimo bem próximos desses últimos obtidos. A diferença dos volumes obtidos através das otimizações que consideram R_1 e R_2 é igual a 1,1%, enquanto as que também consideram R_3 apresentam uma diferença de 0,72%.

3.4.4.4 Probabilidade de falha

Buscando validar os resultados encontrados, são realizadas análises de confiabilidade com o objetivo de verificar se a probabilidade de falha dos elementos está de acordo com as predeterminadas nas restrições probabilísticas dos processos RBDO. Os resultados se encontram na tabela 79 a seguir.

Verifica-se que as probabilidades de falha da otimização determinística considerando os coeficientes de ponderação da norma possuem probabilidade de falha da ordem de 10^{-3} , como esperado, enquanto os resultados da RBDO possuem valores da ordem de 10^{-5} . Chama-se a atenção da última não possuir valores superiores a 10^{-5} haja vista que esse era o valor limite das restrições probabilísticas.

Na análise determinística inicial percebe-se que, para a flambagem das barras 12 e 13 a P_f se encontra maior em R_1 , R_2 e R_3 , ao contrário do que acontece em todas as outras barras. Isso ocorre porque as barras 12 e 13 estão sendo governadas pela flambagem, quando ela passa a ser considerada como restrição.

É importante ressaltar que nas análises RBDO considerando o escoamento como modo de falha, as barras 5, 6, 7 e 8 possuem suas P_f bem próximas dos respectivos limites, tanto na análise em que se considera R_1 e R_2 , quanto R_1 , R_2 e R_3 , devido ao fato das mesmas não sofrerem influência da restrição flambagem.

Percebe-se que as probabilidades de falha aumentaram em relação às análises com duas variáveis de projeto, devido ao refinamento das otimizações que consideram quatorze variáveis de projeto.

Mais uma vez nota-se que nos respectivos modos de falha governantes, as probabilidades de falha nas otimizações determinísticas se comportam como esperado, apresentando valores de P_f aproximadamente iguais a 0,5.

Todos os resultados apresentaram valores esperados e coerentes.

Tabela 79- Probabilidade de falha dos elementos da treliça de 13 barras (14 variáveis de projeto)

Modo de falha/Barras	Determinística R₁ e R₂	Determinística R₁, R₂ e R₃	Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	RBDO R₁ e R₂ *	RBDO R₁, R₂ e R₃ *	RBDO R₁ e R₂ **	RBDO R₁, R₂ e R₃ **
Esc/ 1 e 4	4,65x10 ⁻¹	4,62x10 ⁻¹	1,20x10 ⁻³	1,28x10 ⁻³	8,68x10 ⁻⁶	8,95x10 ⁻⁶	9,79x10 ⁻⁴	9,67x10 ⁻⁴
Esc/ 2 e 3	4,97x10 ⁻¹	5,00x10 ⁻¹	1,30x10 ⁻³	1,28x10 ⁻³	8,28x10 ⁻⁶	2,27x10 ⁻⁷	9,98x10 ⁻⁴	9,48x10 ⁻⁴
Esc/ 5 e 8	4,63x10 ⁻¹	4,63x10 ⁻¹	1,20x10 ⁻³	1,26x10 ⁻³	9,45x10 ⁻⁶	9,45x10 ⁻⁶	9,44x10 ⁻⁴	9,95x10 ⁻⁴
Esc/ 6 e 7	4,99x10 ⁻¹	4,99x10 ⁻¹	1,30x10 ⁻³	1,19x10 ⁻³	9,47x10 ⁻⁶	8,36x10 ⁻⁶	9,60x10 ⁻⁴	9,70x10 ⁻⁴
Esc/ 9 e 11	4,92x10 ⁻¹	4,97x10 ⁻¹	1,20x10 ⁻³	1,15x10 ⁻³	8,15x10 ⁻⁶	7,41x10 ⁻⁶	8,07x10 ⁻⁴	3,83x10 ⁻⁴
Esc/ 10	4,62x10 ⁻¹	4,89x10 ⁻¹	1,05x10 ⁻³	1,25x10 ⁻³	8,28x10 ⁻⁶	7,80x10 ⁻⁶	9,80x10 ⁻⁴	9,46x10 ⁻⁴
Esc/ 12 e 13	4,90x10 ⁻¹	1,50x10 ⁻³	1,02x10 ⁻³	3,05x10 ⁻⁷	9,20x10 ⁻⁶	2,8x10 ⁻¹²	9,65x10 ⁻⁴	7,85x10 ⁻⁴
Flam/ 1 e 4	4,94x10 ⁻¹	5,48x10 ⁻²	1,38x10 ⁻²	0 ^{***}	5,3x10 ⁻¹⁵	0 ^{***}	9,90x10 ⁻¹	2,17x10 ⁻⁴
Flam/ 2 e 3	9,99x10 ⁻¹	1,56x10 ⁻⁴	9,90x10 ⁻¹	0 ^{***}	5,22x10 ⁻⁴	1,05x10 ⁻⁵	5,38x10 ⁻²	0 ^{***}
Flam/ 9 e 11	4,98x10 ⁻⁸	0 ^{***}	7,83x10 ⁻¹	0 ^{***}	0 ^{***}	0 ^{***}	9,90x10 ⁻¹	5,73x10 ⁻⁴
Flam/ 10	2,87x10 ⁻¹	0 ^{***}	9,90x10 ⁻¹	4,48x10 ⁻¹⁵	3,47x10 ⁻¹	1,3x10 ⁻¹⁰	9,90x10 ⁻¹	0 ^{***}
Flam/ 12 e 13	9,94x10 ⁻¹	4,96x10 ⁻¹	9,90x10 ⁻¹	1,30x10 ⁻³	5,80x10 ⁻³	6,70x10 ⁻⁶	1,90x10 ⁻¹	6,61x10 ⁻⁴

Fonte: Autora, 2020.

* P_{falvo} = 10⁻⁵**P_{falvo} = 10⁻³

*** As probabilidades foram aproximadas para 0 por terem valores muito pequeno

3.4.4.5 Comparação entre as otimizações considerando quatorze variáveis de projeto

A partir da Tabela 80 é possível perceber que a análise RBDO que considera R_1 e R_2 como restrições, possui volume 94,57% superior ao volume ótimo determinístico. Já com a consideração da restrição R_3 , o aumento passa a ser igual a 96,51%.

Tabela 80- Resumos dos volumes obtidos, considerando duas variáveis de projeto

Otimização	Volume (mm ³)
Determinística R_1 e R_2	$4,632 \times 10^7$
Determinística R_1, R_2 e R_3	$4,727 \times 10^7$
Determinística R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)	$7,646 \times 10^7$
Determinística R_1, R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)	$7,718 \times 10^7$
RBDO R_1 e R_2 ($P_{falvo}=10^{-5}$)	$9,012 \times 10^7$
RBDO R_1, R_2 e R_3 ($P_{falvo}=10^{-5}$)	$9,289 \times 10^7$
RBDO R_1 e R_2 ($P_{falvo}=10^{-3}$)	$7,729 \times 10^7$
RBDO R_1, R_2 e R_3 ($P_{falvo}=10^{-3}$)	$7,774 \times 10^7$

Fonte: Autora, 2020.

Quando essa comparação é feita considerando a RBDO e a otimização determinística realizada a partir da utilização dos coeficientes de ponderação da norma, esses valores caem para 17,86% e 20,36%, respectivamente.

3.4.5 Comparação entre as otimizações considerando duas e quatorze variáveis de projeto

Apesar dos comportamentos de todas as otimizações serem parecidos, é notável que enquanto as otimizações que envolvem duas variáveis de projeto resultam em volumes da ordem de grandeza de 10^8 mm³, os volumes obtidos a partir da otimização envolvendo quatorze variáveis de projeto possuem ordem de grandeza de 10^7 mm³, confirmando a necessidade de avaliar cada elemento de

acordo com a sua necessidade, caso contrário, as estruturas se encontrarão superdimensionadas.

A tabela abaixo mostra as diferenças percentuais entre as análises realizadas.

Tabela 81- Resumo dos volumes ótimos da treliça de 13 barras

Otimização	Volume - 2 Variáveis (mm³)	Volume- 14 Variáveis (mm³)	Redução (%)
Determinística R₁ e R₂	6,594x10 ⁷	4,632x10 ⁷	29,76
Determinística R₁, R₂ e R₃	6,594x10 ⁷	4,727x10 ⁷	28,31
Determinística R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)	1,088x10 ⁸	7,646x10 ⁷	29,72
Determinística R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)	1,088x10 ⁸	7,718x10 ⁷	29,07
RBDO R₁ e R₂	1,282x10 ⁸	9,012x10 ⁷	29,71
RBDO R₁, R₂ e R₃	1,282x10 ⁸	9,290x10 ⁷	27,54

Fonte: Autora, 2020.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de todos os resultados encontrados, nota-se que eles se mostraram satisfatórios, garantindo assim, que o processo utilizado ao longo do presente trabalho poderá ser aplicado em projetos com uma determinada confiabilidade. As discussões e comparações específicas em relação a cada resultado encontram-se na seção anterior.

No processo utilizado, os resultados dos exemplos levaram às mesmas conclusões:

- O emprego da RBDO gerou estruturas mais robustas, dentro do limite estabelecido preliminarmente em termos de probabilidade de falha alvo.

- Buscando validar os resultados foram feitas análises de confiabilidade utilizando a transformação FORM, as quais confirmaram a confiabilidade de cada elemento.

- Com a admissão da flambagem como restrição das otimizações realizadas, as probabilidades de falha mostraram-se reduzidas quando comparadas com as otimizações que não consideravam a flambagem. Isso mostra a importância da adoção de todos os modos de falha possíveis da estrutura como restrição dos problemas de otimização.

- A consideração de incertezas das variáveis envolvidas em um projeto deve ser realizada sempre que a estrutura a ser otimizada necessitar de uma confiabilidade mínima garantida, entretanto é válido ressaltar que o processo pode gerar resultados conservadores, como é o caso dos exemplos abordados nesse trabalho.

- O aumento do número de variáveis de projeto utilizadas na otimização gera maior diferença percentual entre os volumes mínimos obtidos, mostrando a importância de avaliar as necessidades de elementos individuais, em estruturas mais simples, ou grupos de elementos no caso de projetos mais complexos.

Sugestões para trabalhos futuros

Buscando continuar os estudos abordados no presente trabalho, a autora sugere os seguintes estudos de extensão:

- Realizar o processo de RBDO a partir de outros algoritmos de otimização, que não sejam de ordem zero.
- Considerar ao longo do processo de otimização baseada em confiabilidade, correlações entre os modos de falha, buscando resultados ainda mais próximos da realidade.
- Estender o presente estudo para análises estruturais não-lineares, a partir da utilização de elementos finitos na sua elaboração, a partir de softwares de análise estrutural, utilizando em paralelo ao Matlab.
- Desenvolver uma RBDO que considere problemas dependentes do tempo (dinâmicos) de utilização da estrutura, e suas possíveis aplicações.

REFERÊNCIAS

ACKLEY, D. H. *A Connectionist Machine for Genetic Hill climbing*. First edition. Springer.[S.I.].1987.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM) – A 36 – *Standard Specification for Carbon Structural Steel*. USA. 2019.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM) – A 500 – *Standard Specification for Cold-Formed Welded and Seamless Carbon Steel Structural Tubing in Round and shapes*. USA. 2020.

ANG, A. H.S; TANG, W. H. *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*. New York: 2nd Edition. John Wiley & Sons, 2007.

ARORA, Jasbir. S. *Introduction to Optimum Design*. Oxford: 3rd ed. Elsevier, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) – NBR – 8800 – *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) – NBR – 6591 – *Tubos de aço-carbono com solda longitudinal de seção circular, quadrada, retangular e especial para fins industriais* - Especificação. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) – NBR – 8261 – *Tubos de aço-carbono, com e sem solda, de seção circular, quadrada ou retangular para usos estruturais* - Requisito. Rio de Janeiro, 2019.

BECK, André, T. *Confiabilidade e segurança das estruturas*. 1^a edição. Rio de Janeiro, Elsevier. 2019.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer, 2003.

CASTRO, Rodrigo Evangelista de. *Otimização de Estruturas com Multi-objetivos Via Algoritmos Genéticos de Pareto*. 224 p. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2001.

Choi, K.K.; Youn, B.D. *An enriched performance measure approach (PMA+) for reliability-based design optimization process*. 2004 SAE World Congress. Detroit, MI, 2004.

CORNELL, C. A. A probability-based structural code. V. 66, p.974-985. 1969.

CORSO, L.L. GOMES, H.M. MEZZOMO, G.P. Mezzomo, MOLTER, A. *Otimização baseada em confiabilidade para uma célula de carga multiaxial utilizando algoritmos genéticos*, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing., 32(4), p 221-229. 2016.

DEB, Kalyanmoy. *An efficient constraint handling method for genetic algorithms*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 186(2–4), pp. 311–338, 2000.

DEEP, Kusum. et al. *A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems*. Applied Mathematics and Computation, 212(2), pp. 505–518, 2009.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E. *Optimization of plane trusses with constraints in the reliability index Beta*. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. 2005.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN) – EN – 103305-3 – *Steel tubes for precision applications - Technical delivery conditions - Part 3: Welded cold sized tubes*. Brussels. 2016.

FRANGOPOL, D. *Structural optimization using reliability concepts*. J. Struct. Eng., v.111, n11, p 2288-2301. 1985.

GEN, Mitsuo; CHENG, Runwei. *Genetic Algorithms and engineering optimization*. First edition. New York: John Wiley & Sons, 1999.

GOLDBERG, D. E.; DEB K. *A Comparative Analysis of Selection Schemes Used in Genetic Algorithms*. *Foundations of Genetic Algorithms*. Morgan Kaufmann, pp. 69-93. 1991.

GOMES, Wellison José de Santana. *Estudo do efeito de incertezas na otimização estrutural*. *Dissertação de mestrado*. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2010.

HASOFER, A.M.; LIND, N.C. *Exact and invariant second moment code format*. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 100. February, p. 111-121. 1974.

HILTON, H. H.; FEIGEN, M. *Minimum weight analysis based on structural reliability*. J. AERO. Sci., v. 27, p.641-653, 1960.

JOHNSON, A.I. *Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures*. *Division of Building. Statistics and Structural Engineering*. Bulletin 12. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. 1953.

KROETZ, Henrique Machado. *Otimização Estrutural sob Incertezas: Métodos e Aplicações*. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2019.

LOPES, M. A. *Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto motor-compressor de alta capacidade*. 2017. 116f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

MELCHERS, R. E. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. 437p. John Wiley & Sons, New York. 2002.

MELCHERS, R.E; BECK, André T., *Structural reliability analysis and prediction*. Hoboken, New Jersey: Third edition. Wiley, 2018.

MOSES, F. *Approaches to Structural Reliability and Optimization, in: An Introduction to Structural Optimization*. Conn M.Z, Ed. University of Waterloo. Ontario, Canada. 1969.

MOUSTAPHA, M. et al. *Quantile-bead optimizations under uncertainties using adaptive Kriging surrogate models*. V. 54, n. 6, p- 1406-1421. New York. 2016.

NEVES, Francisco de Assis das. *Programação com Multi-objetivos Aplicada à Otimização do Projeto de Pontes Estaiadas*. 324 p. Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1997.

OLIVIERI, Bruno Perdigão. *Otimização do Projeto de Pontes Protendidas Pré-Moldadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos*. 129 p. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 2004.

PEREIRA, A. *Projeto ótimo baseado em confiabilidade: Aplicação a treliças espaciais*. Tese de Doutorado. PUC-RJ. Rio de Janeiro. 2007.

RAO, S.S. *Engineering Optimization, Theory and Practice*. Hoboken, New Jersey: 4th ed. John Wiley & Sons, 2009.

ROJAS ERASO, A. I. *Análise de Confiabilidade de Longarinas de Pontes Ferroviárias de Concreto Armado*. Rio de Janeiro.128 p. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011.

ROYSET, J.O.; DER KIUREGHIAN, A.; POLAK, E. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*. Vol. 73, p 213-221. 2001.

SAGRILO, L.V.S. *Confiabilidade Estrutural*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro. 89f. Notas de Aula. Rio de Janeiro, 2004.

SANTIAGO, Wagner Carvalho. *Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural*. São Paulo. São Carlos, 2018.

SEPULVEDA, A.E. *Structural synthesis with reliability constraints using approximation concepts*. AIAA, 35^o Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Vol. 34, p 1641-1643. Hilton Head, SC, 1996.

SOUZA JUNIOR, Antonio Carlos de. *Aplicação de confiabilidade na calibração dos coeficientes parciais de segurança de normas brasileiras de projeto estrutural*. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.

STENVENSON, J.D. *Reliability analysis and optimum design of structural systems with applications to rigid frames*. Division of Solid Mechanics and Structures. Case Western Reserve University. Cleveland, Ohio. 1967.

TEIXEIRA, A. F. A. *Otimização de topologia de treliças considerando incerteza*. Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa. Lisboa. 2017.

TU, J., K.; CHOI, and Y. Park. *A new study on reliability-based design optimization*. ASME, Journal of Mechanical Design, 121, 557-564.1999.

VALDEBENITO, M. A., SCHUELLER, G. I. *A survey on approaches for reliability-based optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. V 42, n. 5,p. 645-663. New York. 2010.

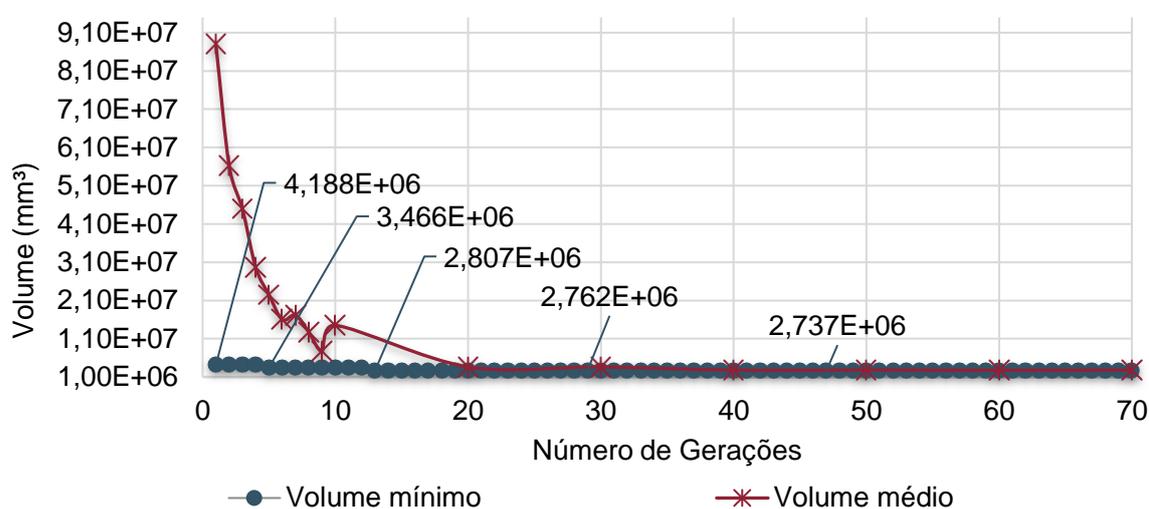
VANDERPLAATS G., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. New York: 1st ed. McGraw-Hill, 1984.

YANG, X.-S. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. Cambridge: Second Edition. Ed. Luniver Press. 2010.

APÊNDICE A- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 3 BARRAS, CONSIDERANDO DUAS VARIÁVEIS DE PROJETO

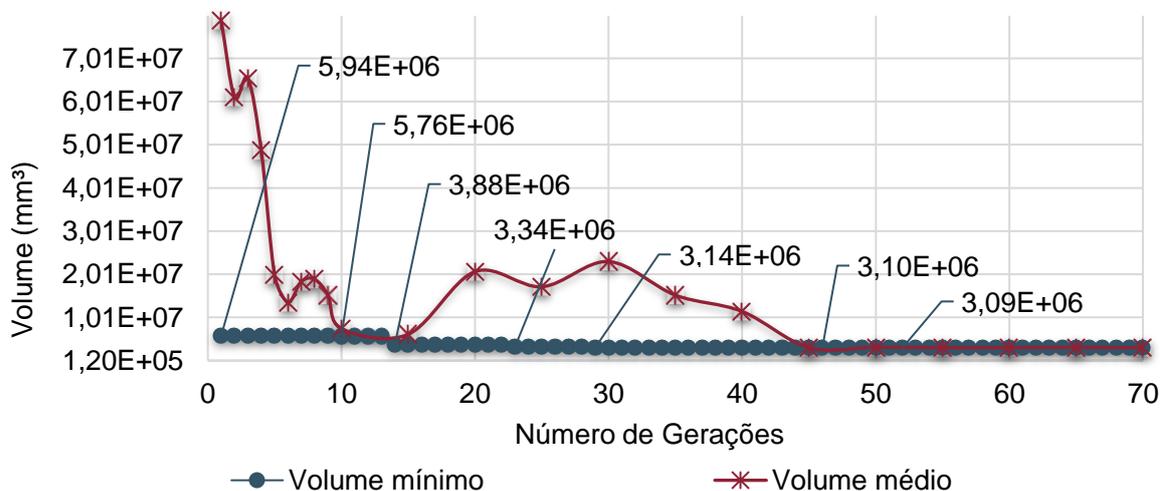
Ao longo dos processos de otimização da treliça de 3 barras, considerando duas variáveis de projeto, as funções objetivo (volume da estrutura) apresentaram os seguintes históricos dos valores mínimos e médios conforme mostram as próximas figuras.

Figura 33- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2



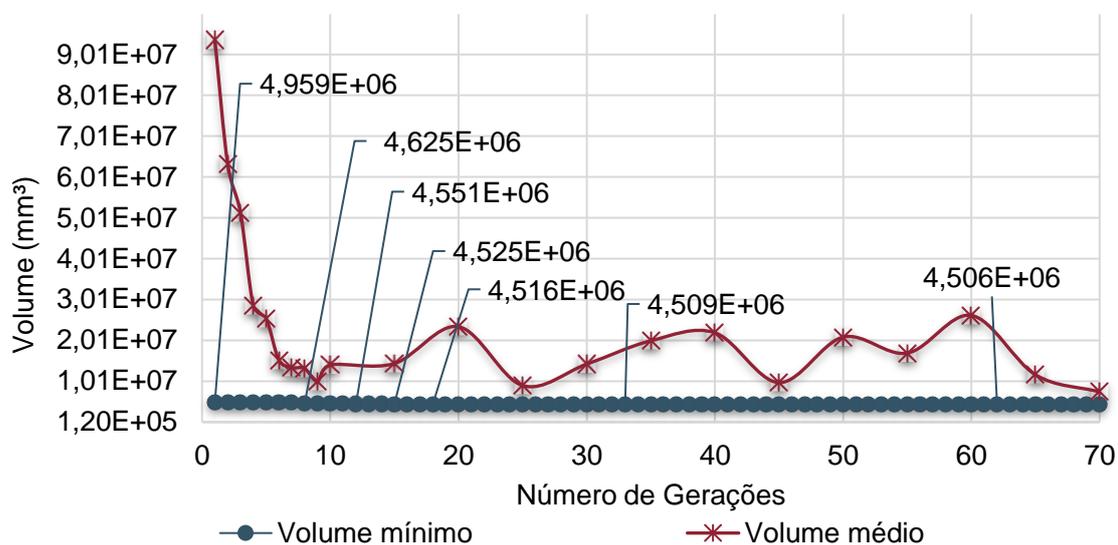
Fonte: Autora, 2020.

Figura 34- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



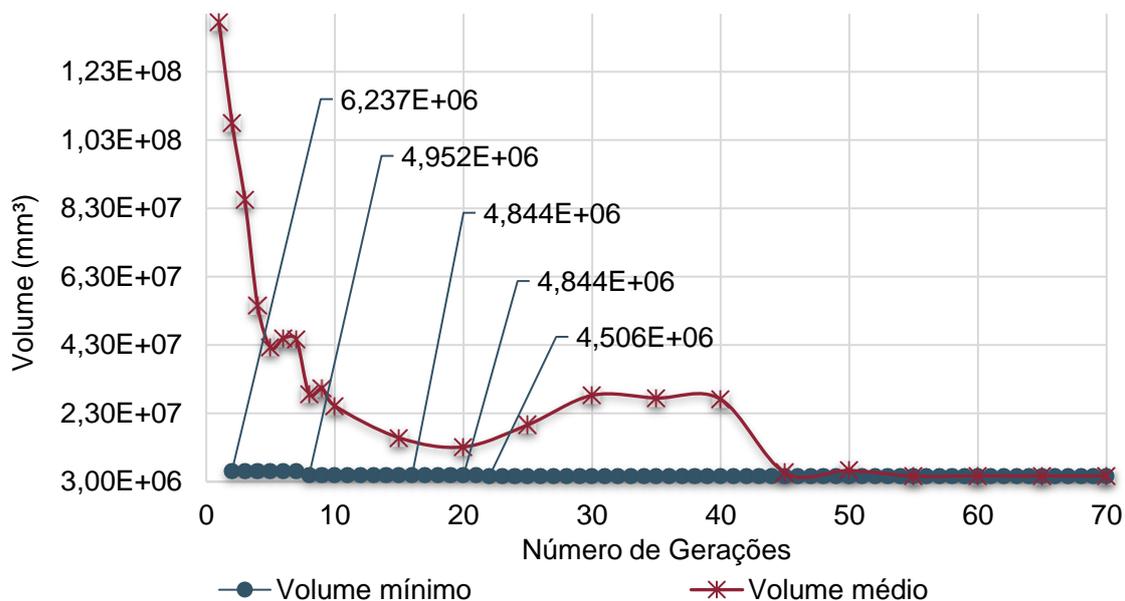
Fonte: Autora, 2020.

Figura 35- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , e R_2 (NBR 8800:2008)



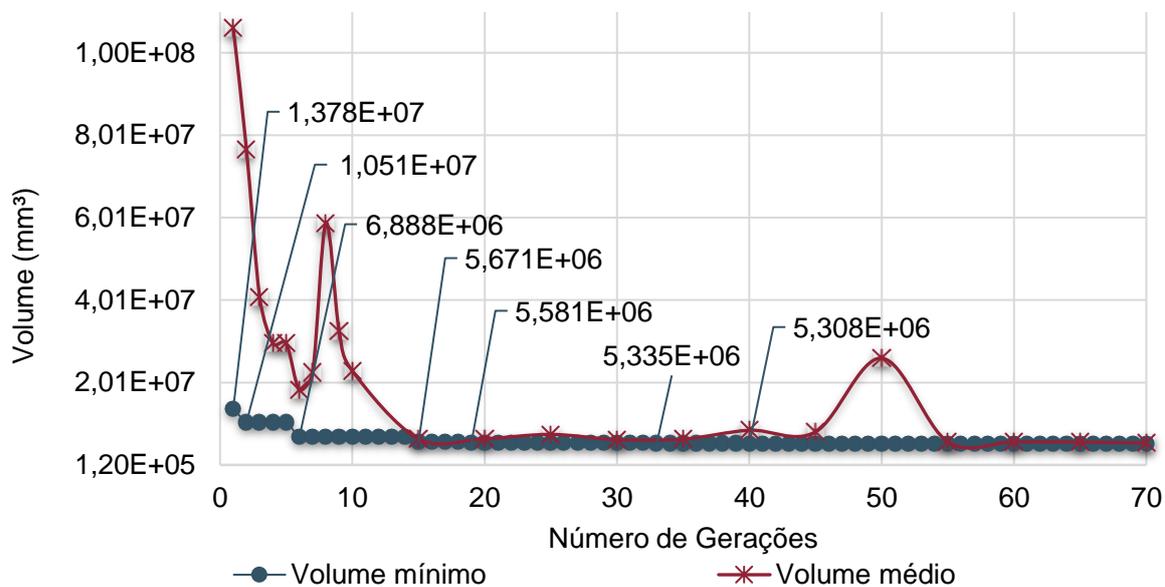
Fonte: Autora, 2020.

Figura 36- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)



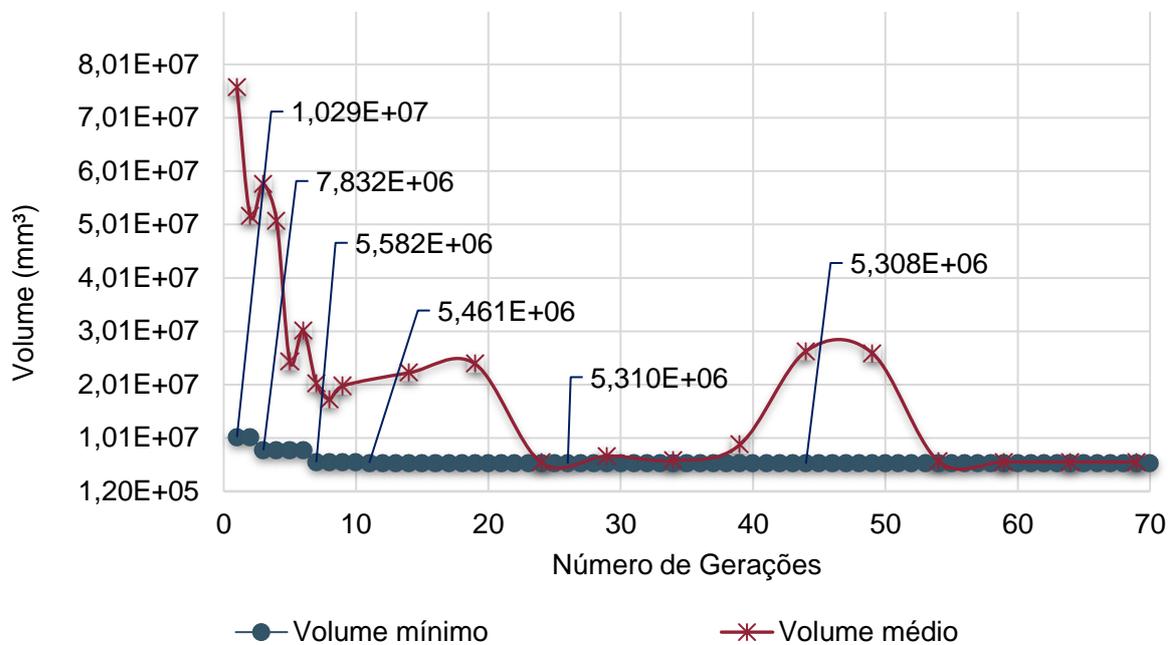
Fonte: Autora, 2020.

Figura 37- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 38- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

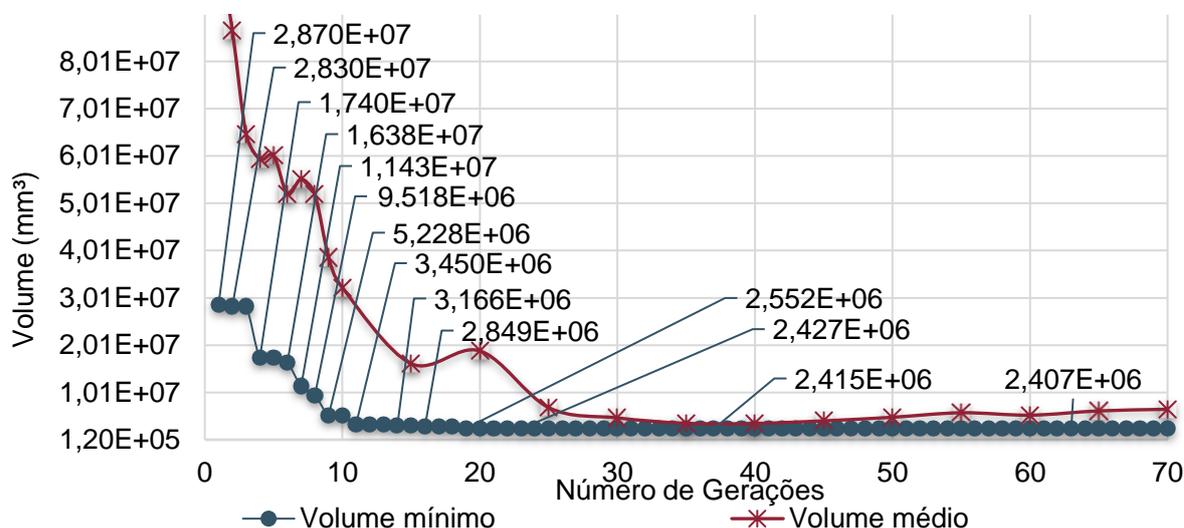


Fonte: Autora, 2020.

APÊNDICE B- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 3 BARRAS, CONSIDERANDO QUATRO VARIÁVEIS DE PROJETO

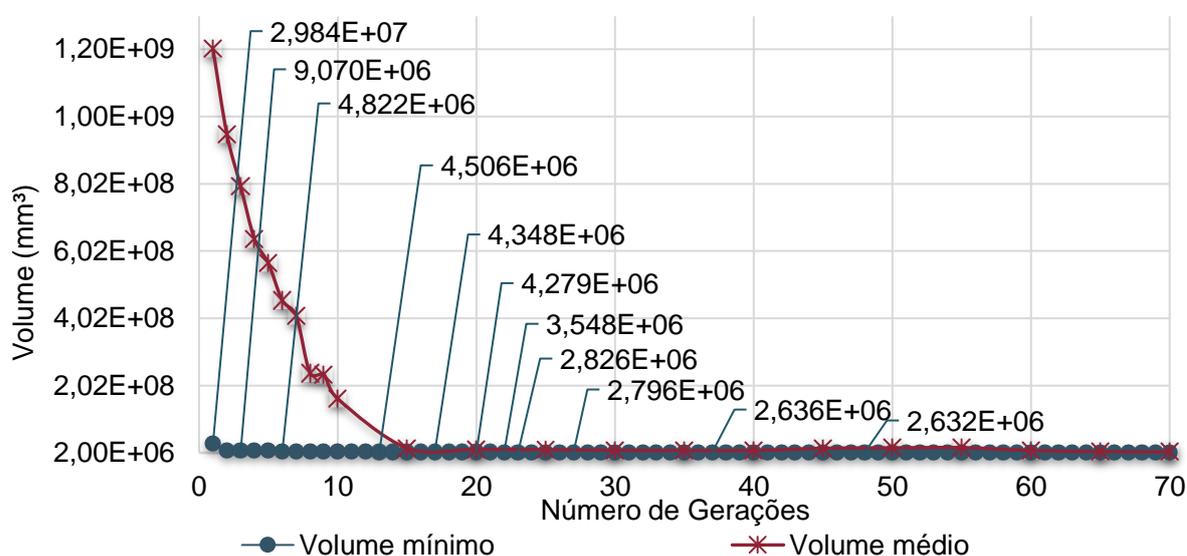
Ao longo dos processos de otimização da treliça de 3 barras, considerando quatro variáveis de projeto, as funções objetivo (volume da estrutura) apresentaram os seguintes históricos dos valores mínimos e médios conforme mostram as próximas figuras.

Figura 39- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2



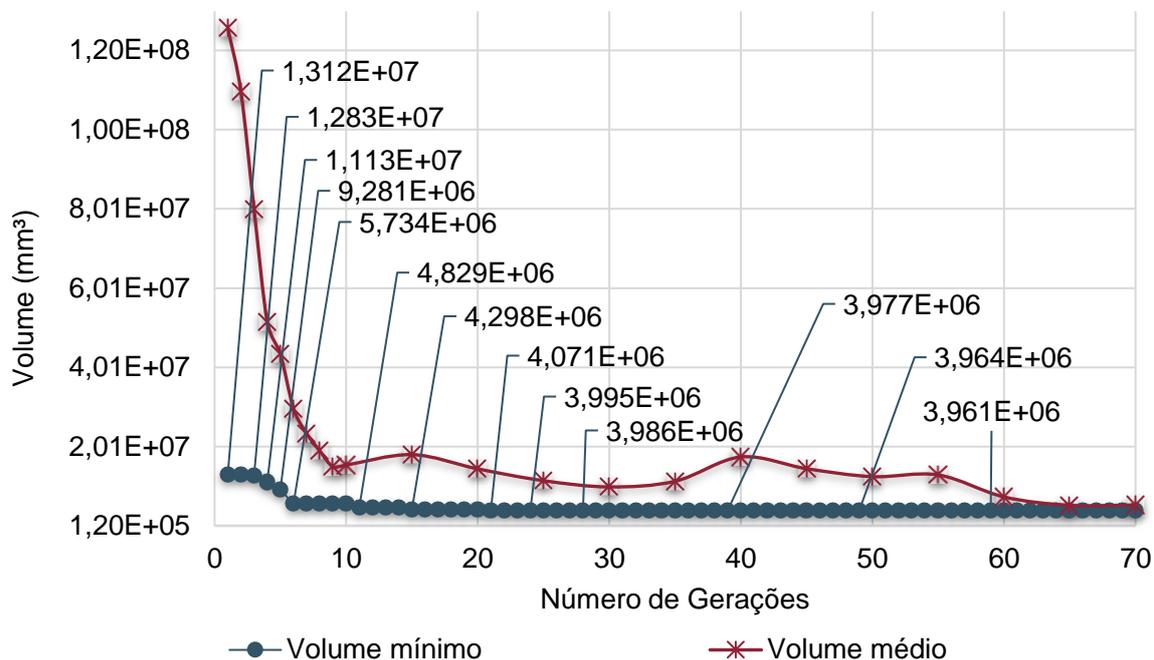
Fonte: Autora, 2020.

Figura 40- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



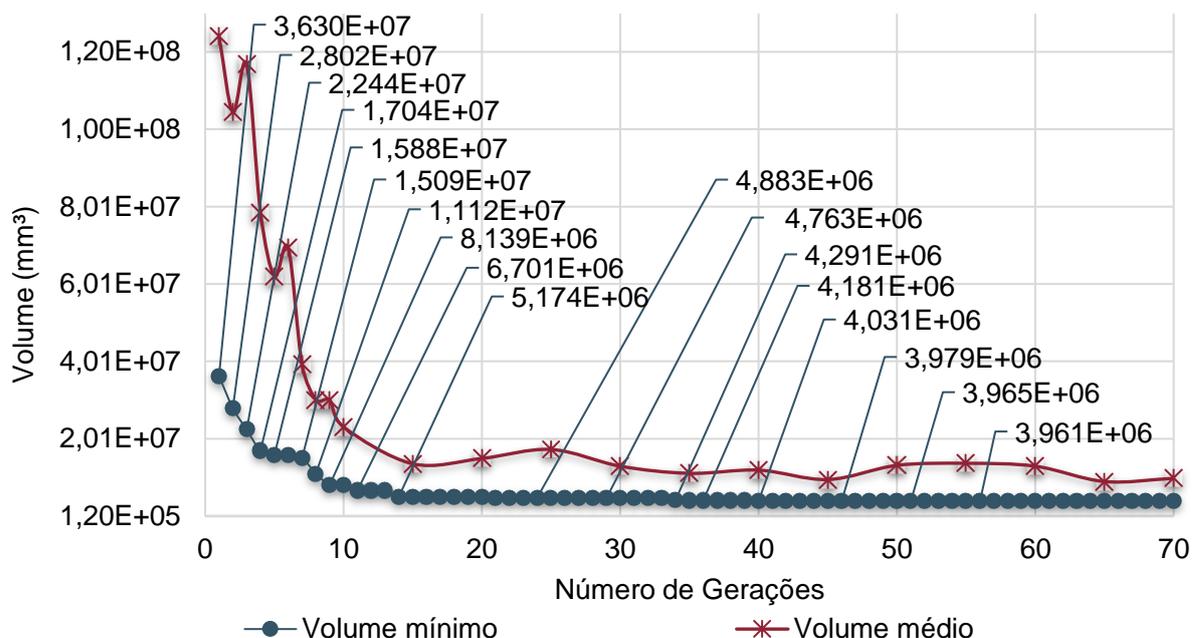
Fonte: Autora, 2020.

Figura 41- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R₁ e R₂ (NBR 8800:2008)



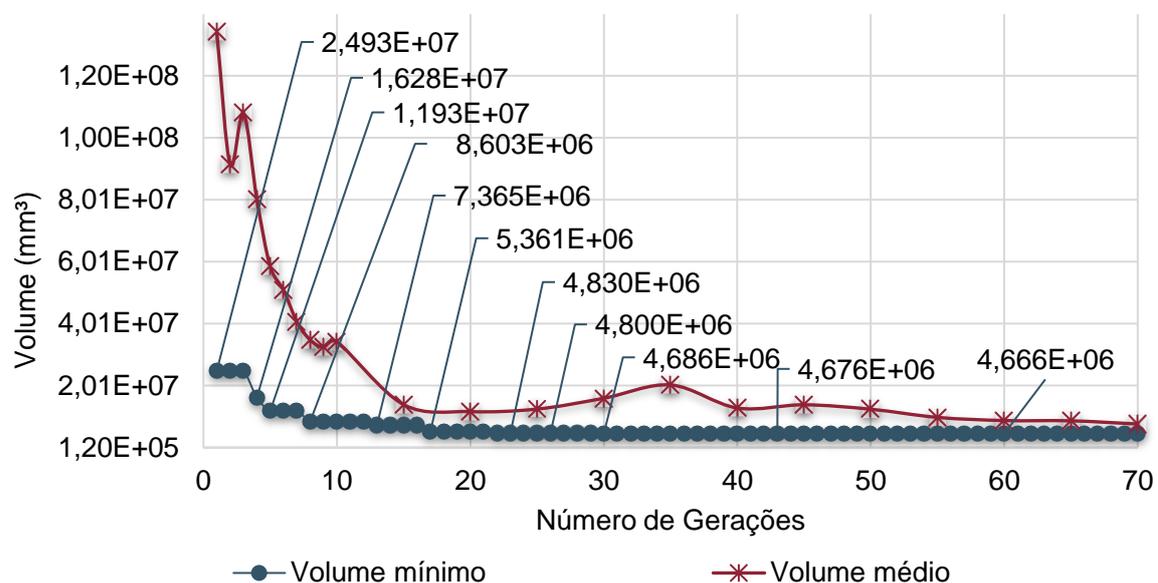
Fonte: Autora, 2020.

Figura 42- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 3 barras, considerando R₁, R₂ e R₃ (NBR 8800:2008)



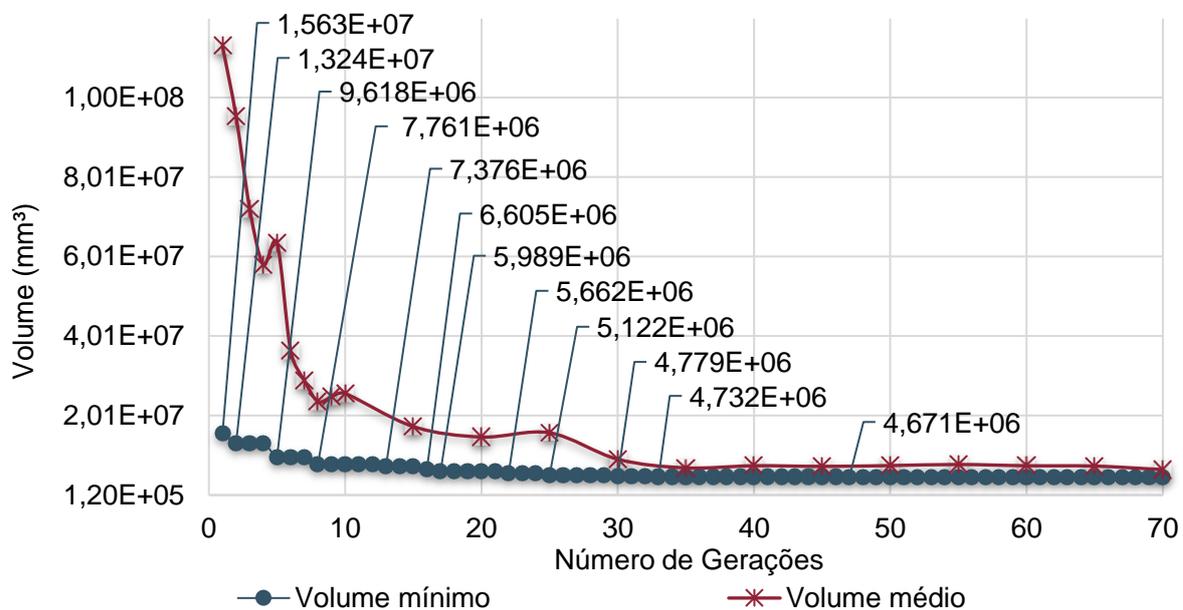
Fonte: Autora, 2020.

Figura 43- Histórico do volume / RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 44- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 3 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

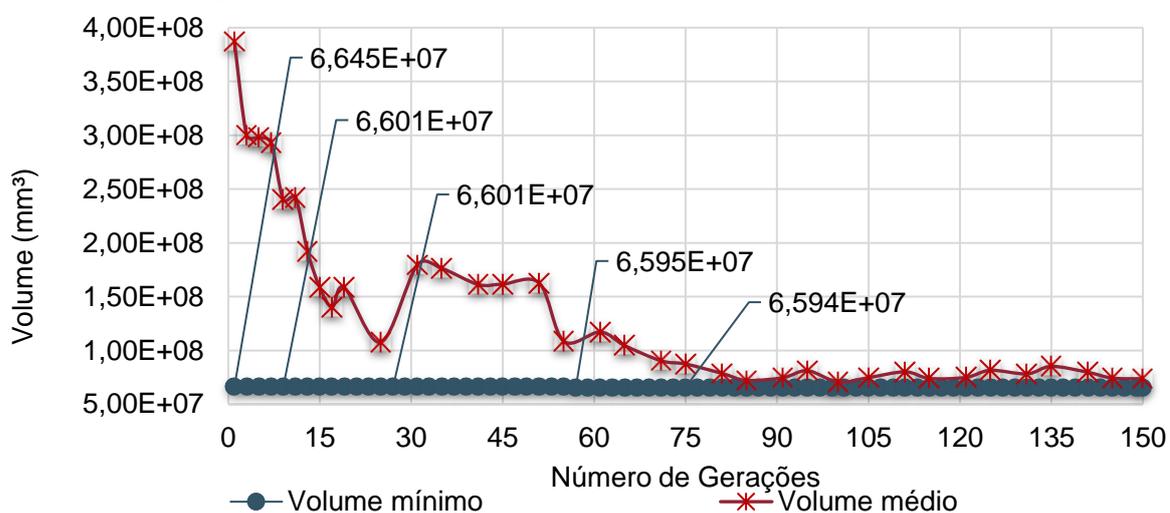


Fonte: Autora, 2020.

APÊNDICE C- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 13 BARRAS, CONSIDERANDO DUAS VARIÁVEIS DE PROJETO

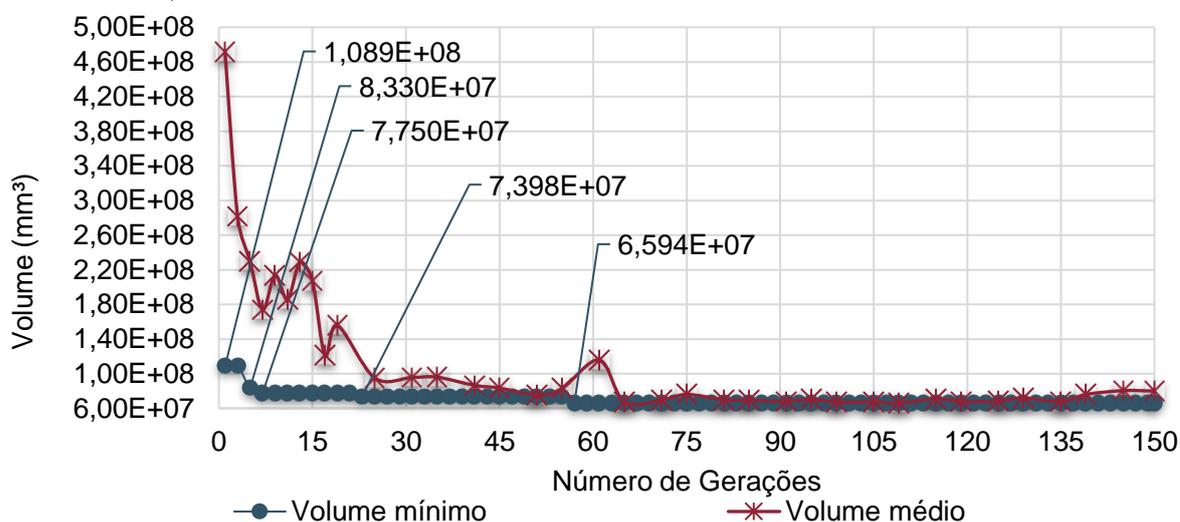
Ao longo dos processos de otimização da treliça de 13 barras, considerando duas variáveis de projeto, as funções objetivo (volume da estrutura) apresentaram os seguintes históricos dos valores mínimos e médios conforme mostram as próximas figuras.

Figura 45- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2



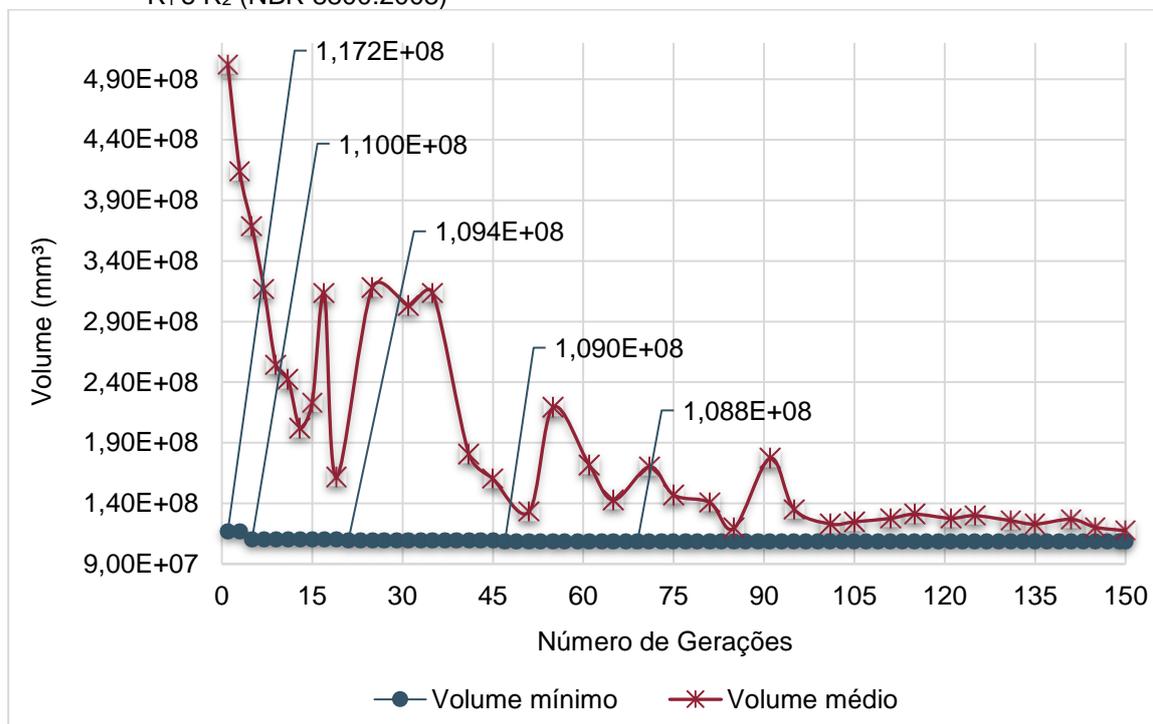
Fonte: Autora, 2020.

Figura 46- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



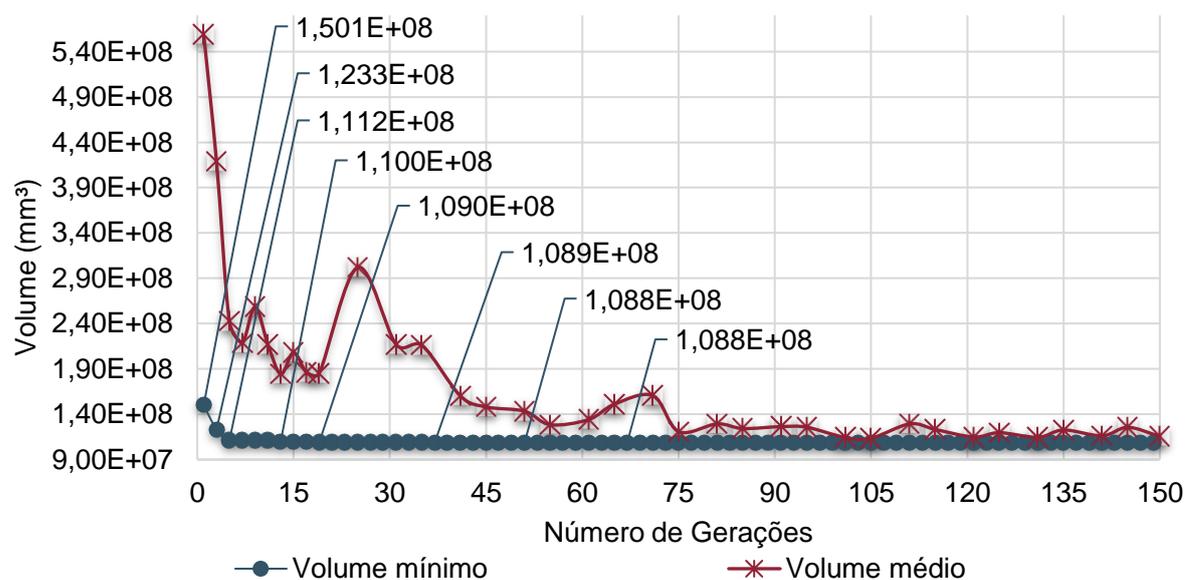
Fonte: Autora, 2020.

Figura 47- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)



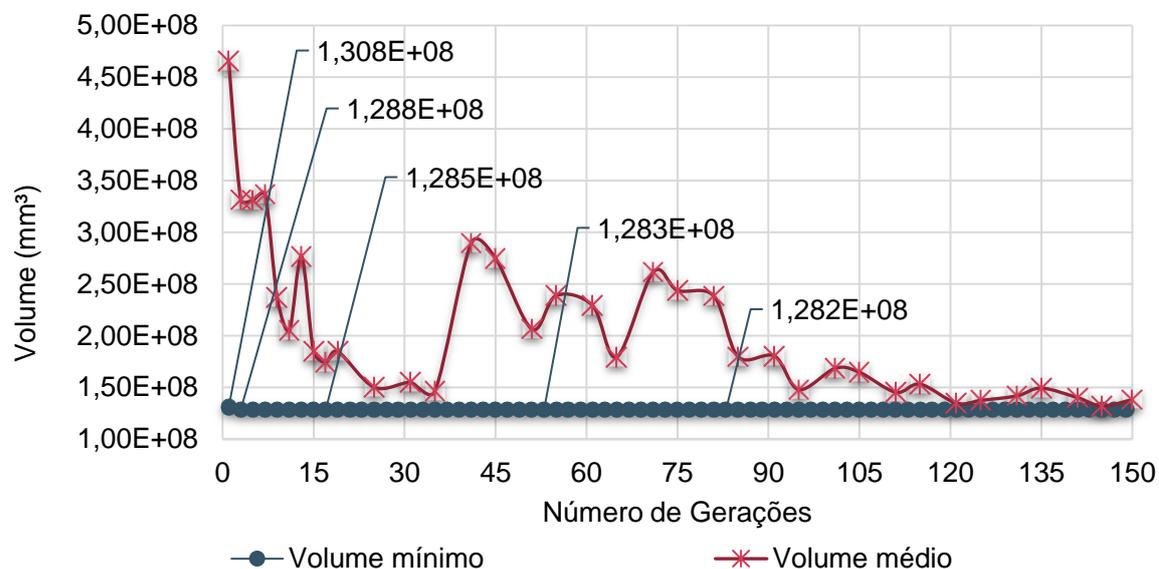
Fonte: Autora, 2020.

Figura 48- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)



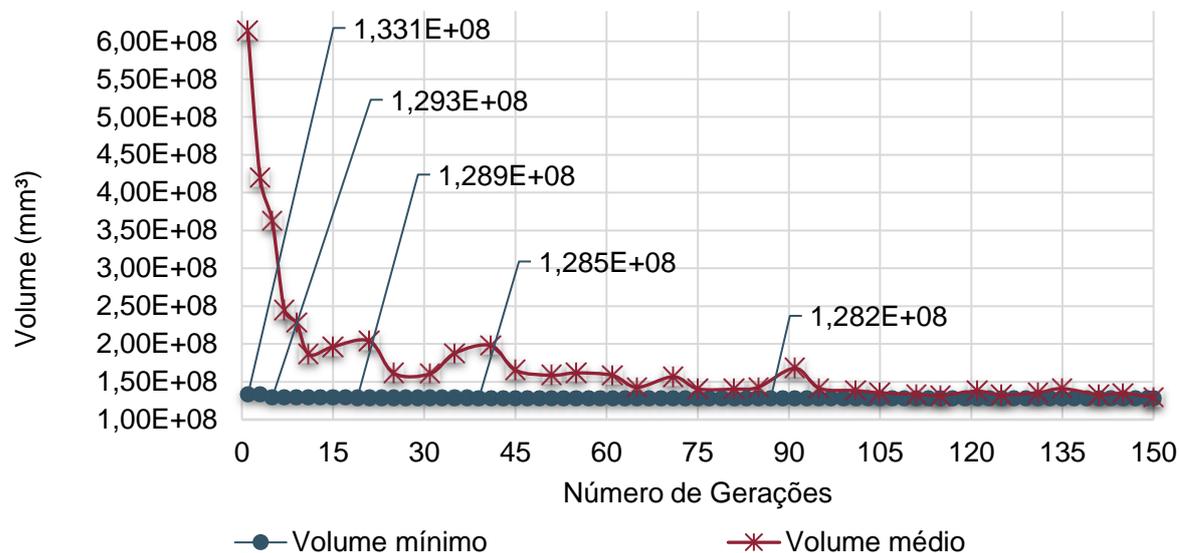
Fonte: Autora, 2020.

Figura 49- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 50- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}

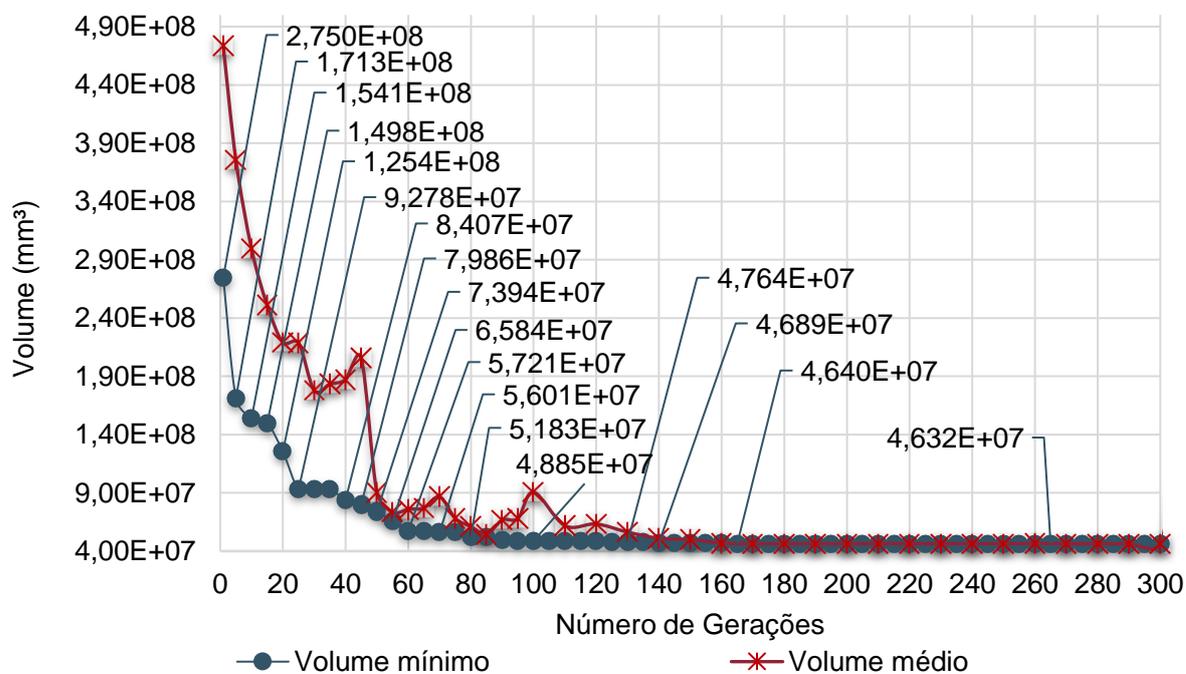


Fonte: Autora, 2020.

APÊNDICE D- HISTÓRICO DO VOLUME DAS OTIMIZAÇÕES REALIZADAS NA TRELIÇA PLANA DE 13 BARRAS, CONSIDERANDO QUATORZE VARIÁVEIS DE PROJETO

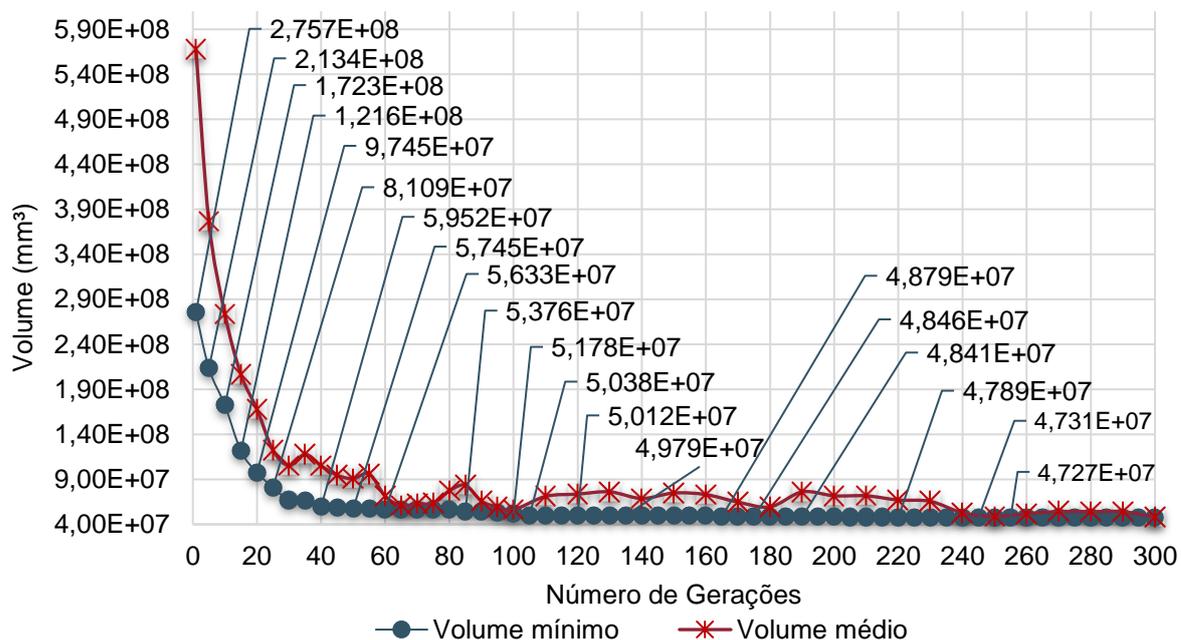
Ao longo dos processos de otimização da treliça de 13 barras, considerando quatorze variáveis de projeto, as funções objetivo (volume da estrutura) apresentaram os seguintes históricos dos valores mínimos e médios conforme mostram as próximas figuras.

Figura 51- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2



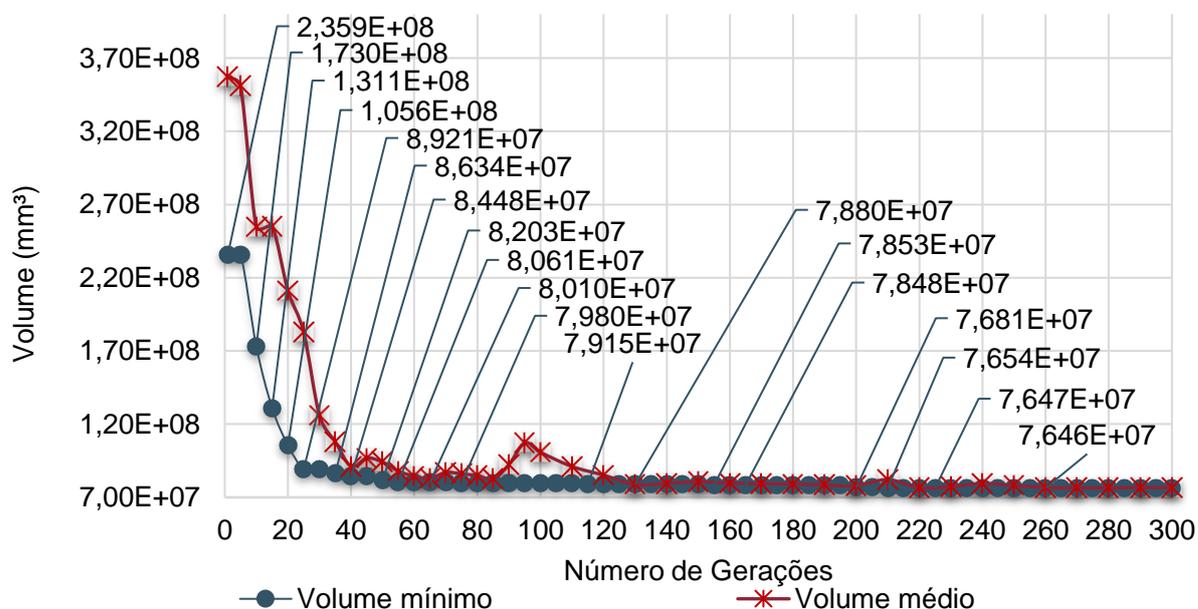
Fonte: Autora, 2020.

Figura 52- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3



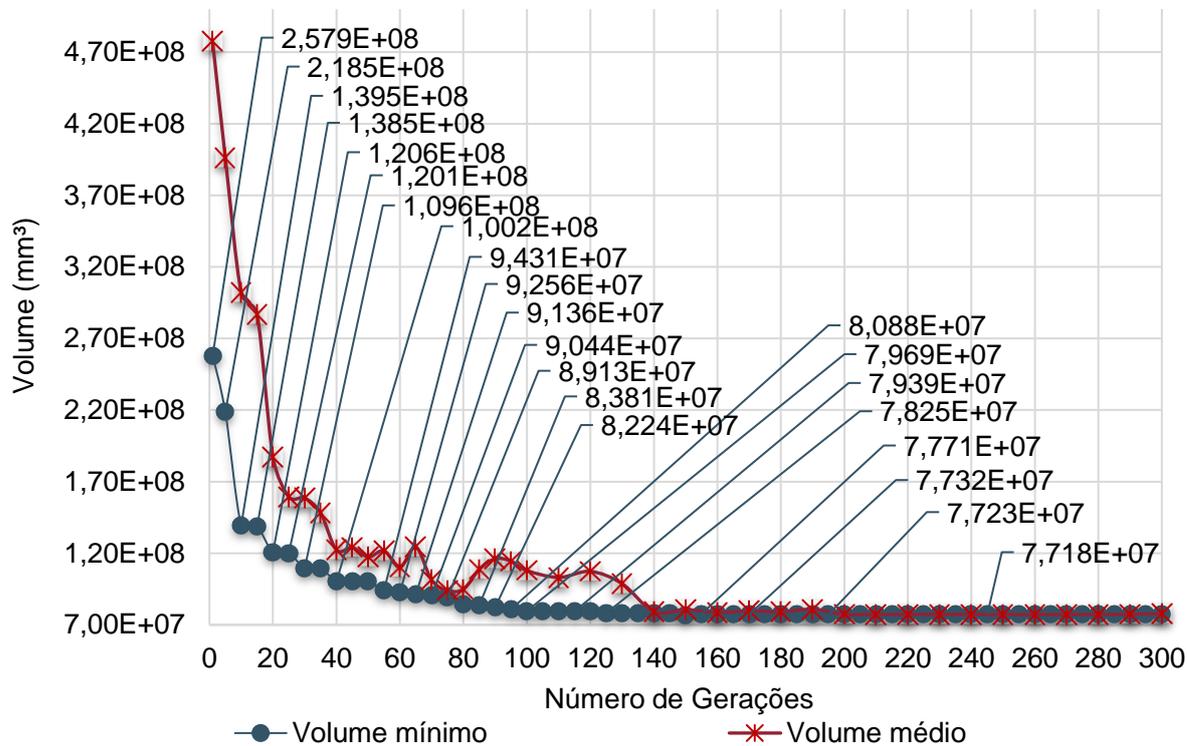
Fonte: Autora, 2020.

Figura 53- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 (NBR 8800:2008)



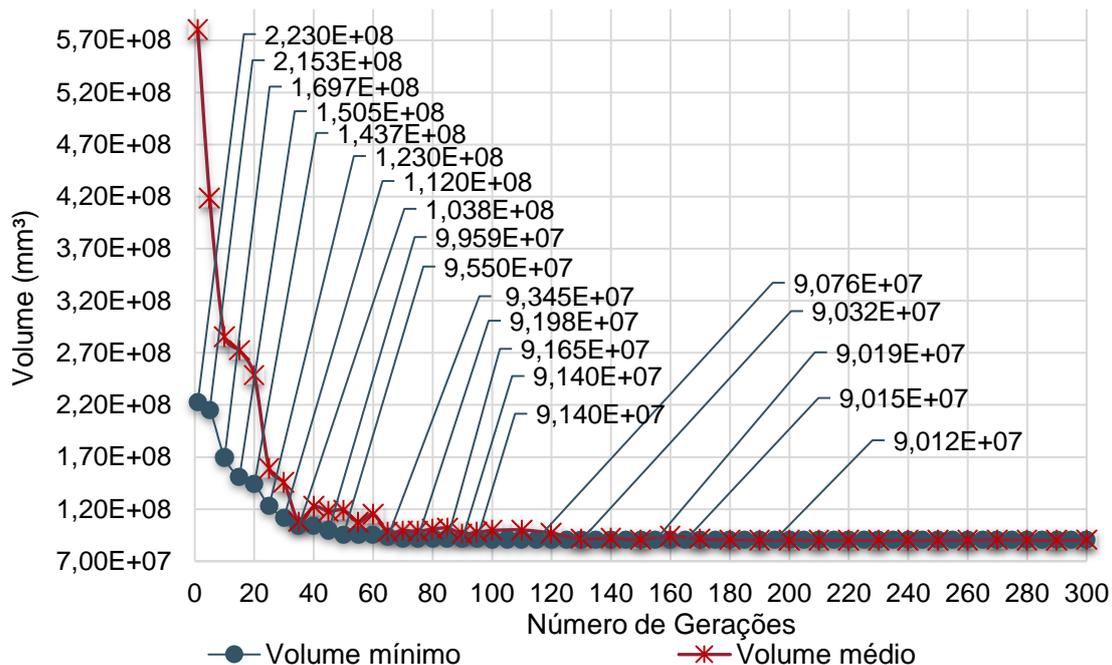
Fonte: Autora, 2020.

Figura 54- Histórico do volume/ otimização determinística da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 (NBR 8800:2008)



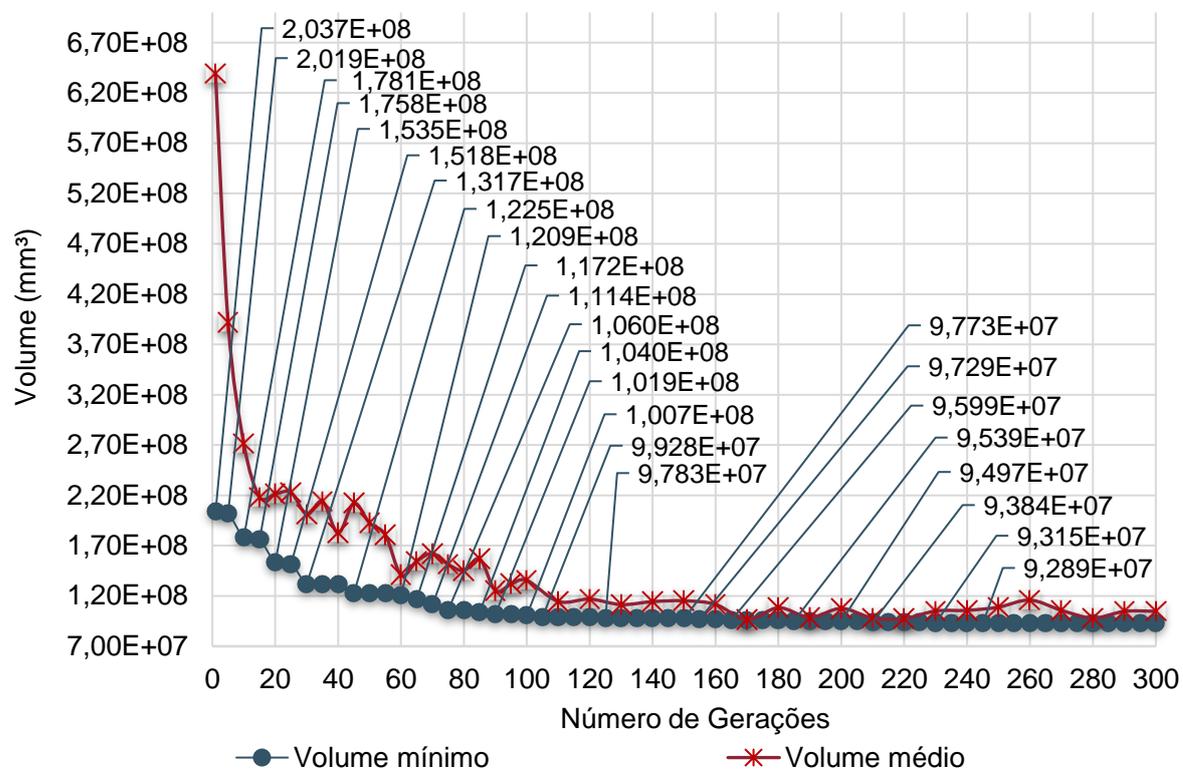
Fonte: Autora, 2020.

Figura 55- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 e R_2 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.

Figura 56- Histórico do volume/ RBDO da treliça de 13 barras, considerando R_1 , R_2 e R_3 com P_f igual a 10^{-5}



Fonte: Autora, 2020.