



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

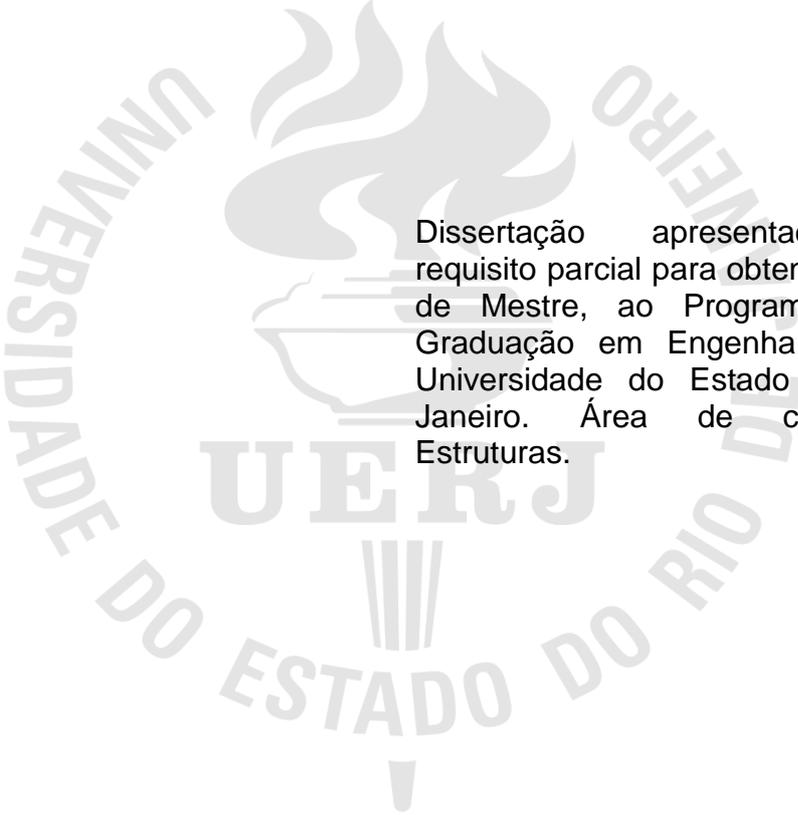
Marcelo Roberto Souza Leite

**Modelagem do Comportamento Estrutural Estático e Dinâmico de
Lajes Nervuradas de Concreto Armado**

Rio de Janeiro
2012

Marcelo Roberto Souza Leite

**Modelagem do Comportamento Estático e Dinâmico de
Lajes Nervuradas de Concreto Armado**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva;
Coorientador (es): Prof.^a Dr.^a Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares;
Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro.

Rio de Janeiro

2012

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

L533 Leite, Marcelo Roberto Souza.
Modelagem do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado. / Marcelo Roberto Souza Leite. – 2012.
141f.

Orientador: José Guilherme Santos da Silva.
Coorientador(es): Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares.
Francisco José da Cunha Pires Soeiro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Civil. 2. Lajes nervuradas - Dissertações. 3. Dinâmica estrutural - Dissertações. I. Silva, José Guilherme Santos da. II. Universidade do Estado do Rio. III. Título.

CDU 624.073.5

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

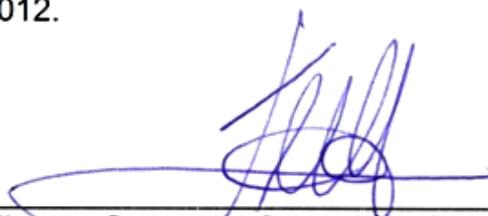
Marcelo Roberto Souza Leite

**Modelagem do Comportamento Estrutural Estático e Dinâmico de Lajes
Nervuradas de Concreto Armado**

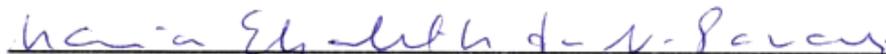
Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 30 de Janeiro de 2012.

Banca Examinadora:



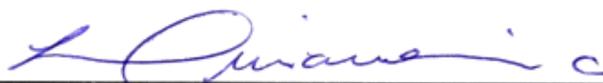
Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva, DSc (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares, DSc (Coorientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro, PhD (Coorientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Luciano Rodrigues Ornelas de Lima DSc
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Wendell Diniz Varela
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro

2012

DEDICATÓRIA

A Deus, por iluminar meu caminho durante essa trajetória, à minha família por compreender a distância e respeitar minha escolha e em especial à minha mãe pelo exemplo de luta, perseverança e incentivo em todos os momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, minhas irmãs e a todos familiares pelo incentivo e motivação.

Ao meu orientador, professor José Guilherme, pela confiança, dedicação, incentivo, paciência e aprendizado nesses dois anos de mestrado. Aos professores Luciano Lima, Maria Elizabeth e Francisco Soeiro que me incentivaram no início e ao longo do curso e aos demais professores do PGECIV pelos ensinamentos.

Aos meus amigos de mestrado, em especial ao Givan Debona, Sidclei Gomes, Tassiana Rocha, Elvis Lopes e Fábio Feitosa que foram muito importantes na fase de estudos. Aos estagiários e funcionários do LABBAS – UERJ , em especial ao Rodolfo.

A UERJ, pelo acolhimento, a CAPES pelo apoio financeiro e a todos aqueles, que embora não citados nominalmente, contribuíram direta e indiretamente para a execução deste trabalho.

E a Deus, acima de tudo, que me dá saúde e força para cada etapa da vida.

O conhecimento torna a alma jovem e diminui a amargura da velhice.
Colhe, pois, a sabedoria. Armazena suavidade para o amanhã.

Leonardo da Vinci

RESUMO

LEITE, Marcelo Roberto Souza. *Modelagem do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado*. 2012. 141f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

Diversos pesquisadores têm estudado o comportamento e o emprego de lajes nervuradas de concreto armado em sistemas estruturais na engenharia civil que demonstrem viabilidade sob o ponto de vista técnico e econômico. Por esta razão, inúmeros trabalhos têm sido publicados nos últimos anos respaldados por testes experimentais e análises numéricas. Neste contexto, diversos tipos de sistemas estruturais de lajes nervuradas têm sido desenvolvidos. Assim sendo, o objetivo desta investigação é o de contribuir, no que tange ao estudo do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado, tendo em mente o emprego destas em sistemas estruturais na engenharia civil. Este trabalho de pesquisa objetiva também o estudo da resposta dinâmica de lajes nervuradas de concreto armado, sob o ponto de vista de conforto humano, especialmente quando essas estruturas encontram-se submetidas a atividades humanas rítmicas. A definição das ações dinâmicas atuantes sobre os modelos estruturais foi feita com base em resultados experimentais, que consideram grupos de indivíduos desenvolvendo atividades rítmicas correspondentes à ginástica aeróbica (atividade sincronizada). São empregadas técnicas usuais de discretização, via método dos elementos finitos (MEF), por meio do programa de elementos finitos ANSYS. No presente modelo computacional, as vigas de bordo, nervuras e a laje de concreto armado são simuladas por elementos finitos de casca. Os resultados obtidos ao longo do estudo, em termos das acelerações de pico, são confrontados e comparados com os limites propostos por normas de projeto, sob o ponto de vista do conforto humano. Com base na análise dinâmica das lajes nervuradas investigadas foi possível verificar que as atividades humanas rítmicas podem vir a gerar valores de acelerações de pico elevados e que violam os critérios de conforto humano. Deste modo, foi observado que, as acelerações nos modelos estudados, podem atingir níveis elevados de vibração que comprometem o conforto dos usuários.

Palavras-chave: Lajes nervuradas; Dinâmica estrutural; Conforto humano; Modelagem computacional.

ABSTRACT

Several researchers have studied the use of reinforced concrete ribbed slabs in civil engineering structural systems that can be viable when the technical and economical point of view is considered. For this reason, a lot of papers were published in the last years based on the experimental and numerical analysis of this slab type. In this context, several slab systems were developed and the reinforced concrete ribbed slabs is present among them. This way, this dissertation investigated the static and dynamic structural behaviour of reinforced concrete ribbed slabs used in civil engineering structures. This research work investigated the dynamic response of reinforced concrete ribbed slabs when subjected to the human rhythmic activities, focusing human comfort criteria. The dynamic loads were obtained through experimental tests with individuals carrying out rhythmic activities corresponding to aerobics (stimulated activities). The computational models are developed based on usual mesh refinement techniques present in finite element method simulations (FEM), implemented in the ANSYS program. In this computational model the reinforced concrete ribbed slabs and beams are represented by shell elements. The numerical results, in terms of peak accelerations, are compared with recommended limits proposed by design codes, under the point of view of human comfort. The reinforced concrete ribbed slabs dynamic analysis indicated that the actions produced by human rhythmic activities could generate peak accelerations that surpass design criteria limits developed for ensuring human comfort. Hence it was observed that the acceleration in the models studied, can achieve high levels of vibration that compromise the comfort of user's.

Keywords: Ribbed slabs; Structural dynamics; Human comfort; Computational Modeling

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Laje nervurada com EPS [4]	22
Figura 2 – Escoramento de lajes nervuradas [6]	23
Figura 3 – Arranjo físico de lajes nervuradas [11]	25
Figura 4 – Transformação de uma Laje Nervurada em Laje Maciça [16]	27
Figura 5 – Laje cogumelo com capitel aparente [27]	35
Figura 6 – Laje cogumelo com capitel invertido e sem capitel [27]	36
Figura 7 – Sistema de coordenadas de um elemento de placa	39
Figura 8 – Lajes Nervuradas – Dimensões mínimas NBR6118: 2007 [8]	43
Figura 9 – Pico de aceleração máximo recomendado para o conforto humano [32].	46
Figura 10 – Comparação entre o sinal experimental, e os obtidos com as funções semi-seno e Hanning [31]	49
Figura 11 – Intervalos de tempo da função adotada [31]	49
Figura 12 – Coeficientes de defasagem para cada atividade rítmica [31]	51
Figura 13 – Coeficientes de defasagem para cada atividade rítmica [31]	52
Figura 14 – Excentricidade existente entre vigas de bordo e laje nervurada [19]	56
Figura 15 – Vista da geometria do Modelo I	57
Figura 16 – Vista em Planta da geometria do Modelos	58
Figura 17 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 1 PESSOA...	59
Figura 18 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 5 PESSOAS	60
Figura 19 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 9 PESSOAS	60
Figura 20 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 13 PESSOAS	60
Figura 21 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 16 PESSOAS	61
Figura 22 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 1 PESSOA..	61
Figura 23 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 5 PESSOAS	61
Figura 24 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 9 PESSOAS	62
Figura 25 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 13 PESSOAS	62
Figura 26 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 16 PESSOAS	62

Figura 27 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 1 PESSOA	63
Figura 28 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 5 PESSOAS	63
Figura 29 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 9 PESSOAS	63
Figura 30 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 11 PESSOAS	64
Figura 31 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 16 PESSOAS	64
Figura 32 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 25 PESSOAS	64
Figura 33 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 1 PESSOA	65
Figura 34 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 5 PESSOAS	65
Figura 35 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 9 PESSOAS	65
Figura 36 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 11 PESSOAS	66
Figura 37 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 16 PESSOAS	66
Figura 38 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 25 PESSOAS	66
Figura 39 – Elemento BEAM44 [25]	69
Figura 40 – Elemento Shell63 [25]	70
Figura 41 – Elemento Beam44 e Shell63 [19]	70
Figura 42 – Modelo elaborado em elementos finitos	71
Figura 43 – Malha de elementos finitos correspondente aos Modelos Estruturais	72
Figura 44 – Exemplo de distribuição de cargas estáticas na laje com viga de bordo com altura de 0,50 m	73
Figura 45 – Exemplo de distribuição de cargas dinâmicas na laje para 25 pessoas	74
Figura 46 – Modelagem em elementos finitos: lajes (casca) + nervuras (casca)	83
Figura 47 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo II - (8,50 x 8,50) m	86
Figura 48 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo III - (9,50 x 9,50) m	87

Figura 49 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m	87
Figura 50 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo V - (11,50 x 11,50) m	87
Figura 51 – Flecha obtida para o Modelo IV com viga de bordo (0,20x0,75)m	88
Figura 52 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo II – (8,50 x 8,50) m	89
Figura 53 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo III – (9,50 x 9,50) m	89
Figura 54 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo IV – (10,50 x 10,50) m	89
Figura 55 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo V – (11,50 x 11,50) m	90
Figura 56 – Variação da tensão de flexão nas nervuras Modelo III (0,15 x 0,70).....	99
Figura 57 – Variação da tensão de flexão nas nervuras.	99
Figura 58 – Variação da tensão de flexão nas nervuras Modelo II (0,15 x 0,70). ...	100
Figura 59 – Variação da tensão de flexão nas nervuras.	100
Figura 60 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo II - (8,50 x 8,50) m	106
Figura 61 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo III - (9,50 x 9,50) m	107
Figura 62 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m	107
Figura 63 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo V - (11,50 x 11,50) m	107
Figura 64 – Modos de vibração do Modelo II - (8,50 x 8,50) m	108
Figura 65 – Modos de vibração do Modelo III - (9,50 x 9,50) m	109
Figura 66 – Modos de vibração do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m.....	110
Figura 67 – Modos de vibração do Modelo V - (11,50 x 11,50) m.....	111
Figura 68 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 1 pessoa	114
Figura 69 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 5 pessoas	115

Figura 70 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 9 pessoas	115
Figura 71 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 11 pessoas	115
Figura 72 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 16 pessoas	116
Figura 73 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 25 pessoas	116
Figura 74 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas bordo – Modelo II	122
Figura 75 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II	122
Figura 76 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II	123
Figura 77 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II	123
Figura 78 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II	123
Figura 79 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III	124
Figura 80 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III	124
Figura 81 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III	125
Figura 82 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III	125
Figura 83 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III	125
Figura 84 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	126
Figura 85 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	126
Figura 86 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	127

Figura 87 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	127
Figura 88 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	127
Figura 89 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV	128
Figura 90 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	128
Figura 91 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	129
Figura 92 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	129
Figura 93 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	129
Figura 94 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	130
Figura 95 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de momentos fletores obtidos pelos métodos Pinheiro [13] e por meio do programa GPLAN3 [14]	26
Tabela 2 – Faixa de frequência das atividades [32]	47
Tabela 3 – Parâmetros experimentais utilizados [31]	50
Tabela 4 – Valores do Coeficiente de defasagem obtidos	51
Tabela 5 – Características dos modelos	71
Tabela 6 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo II ($b_w = 0,15$ m)	77
Tabela 7 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo II ($b_w = 0,20$ m)	77
Tabela 8 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo III ($b_w = 0,15$ m)	78
Tabela 9 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo III ($b_w = 0,20$ m)	78
Tabela 10 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo IV ($b_w = 0,15$ m)	79
Tabela 11 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo IV ($b_w = 0,20$ m)	79
Tabela 12 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo V ($b_w = 0,15$ m)	80
Tabela 13 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo V ($b_w = 0,20$ m)	80
Tabela 14 – Desempenho computacional	81
Tabela 15 – Relação entre os resultados obtidos	83
Tabela 16 – Deslocamentos e esforços correspondentes à seção do meio do vão do modelo estrutural	84
Tabela 17 – Frequências naturais do modelo estrutural	85
Tabela 18 – Tensões de tração: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,15$ m .	91
Tabela 19 – Tensões de compressão: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,15$ m	91
Tabela 20 – Tensões de tração: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,20$ m .	92
Tabela 21 – Tensões de compressão: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,20$ m	92
Tabela 22 – Tensões de tração: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,15$ m	93
Tabela 23 – Tensões de compressão: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,15$ m	93
Tabela 24 – Tensões de tração: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,20$ m	94
Tabela 25 – Tensões de compressão: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,20$ m	94

Tabela 26 – Tensões de tração: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$	95
Tabela 27 – Tensões de compressão: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$	95
Tabela 28 – Tensões de tração: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$	96
Tabela 29 – Tensões de compressão: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$	96
Tabela 30 – Tensões de tração: Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$	97
Tabela 31 – Tensões de compressão: Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$	97
Tabela 32 – Tensões de tração : Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$	98
Tabela 33 – Tensões de compressão : Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$	98
Tabela 34 – Frequências naturais – Modelo II - (8,50 x 8,50) m	102
Tabela 35 – Frequências naturais – Modelo II - (8,50 x 8,50) m	102
Tabela 36: – Frequências naturais – Modelo III - (9,50 x 9,50) m	103
Tabela 37 – Frequências naturais – Modelo III - (9,50 x 9,50) m	103
Tabela 38 – Frequências naturais – Modelo IV - (10,50 x 10,50) m	104
Tabela 39 – Frequências naturais – Modelo IV - (10,50 x 10,50) m	104
Tabela 40 – Frequências naturais – Modelo V - (11,50 x 11,50) m	105
Tabela 41 – Frequências naturais – Modelo V - (11,50 x 11,50) m	105
Tabela 42 – Frequência crítica para estruturas de concreto NBR6118:2007 [8]	106
Tabela 43 – Valores acelerações do Modelo II (8,50 x 8,50)m	117
Tabela 44 – Valores acelerações do Modelo II (8,50 x 8,50)m	118
Tabela 45 – Valores acelerações do Modelo III (9,50 x 9,50)m	118
Tabela 46 – Valores acelerações do Modelo III (9,50 x 9,50)m	119
Tabela 47 – Valores acelerações do Modelo IV (10,50 x 10,50)m	119
Tabela 48 – Valores acelerações do Modelo IV (10,50 x 10,50)m	120
Tabela 49 – Valores acelerações do Modelo V (11,50 x 11,50)m	120
Tabela 50 – Valores acelerações do Modelo V (11,50 x 11,50)m	121

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AISC	American Institute of Steel Construction
a_{lim}	Aceleração limite
CD	Coeficiente de defasagem
CEB	Committee Europeau du Béton
cm	Centímetro
cos	Cosseno
E_{qs}	Equações
$F(t)$	Representação matemática do carregamento no tempo em (N)
FAD	Fator de amplificação dinâmico
FDN	Força dinâmica normalizada
f_{ck}	Resistência característica do concreto à compressão
g	Aceleração da gravidade
Hz	Hertz
k_p	Coeficiente de Impacto
kN	Kilonewton
kN/m^2	Kilonewton por metro quadrado
m^3	Metro cúbico
m^2	Metro quadrado
min	Minutos
MPa	Mega Pascal
N	Newton
N/m^2	Newton por metro quadrado
P	Peso da pessoa em (N)

s	Segundos
sen	seno
T	Período da atividade em (s)
T_c	Período de contacto da atividade em (s)
T_s	Período sem contacto da atividade em (s)
Δ_t	Intervalo de tempo

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distancia entre eixos das nervuras
b_w	Largura da nervura
b_f	Distancia entre eixos das nervuras
b	Largura da base da viga de bordo
d	Altura total da laje
D_x	Rigidez a flexão na direção x
D_y	Rigidez a flexão na direção y
e	Excentricidade entre laje e viga
h	Altura total da laje
h_f	Altura da mesa
K	Matriz de rigidez da estrutura
I_x	Momento de Inércia de acordo com o eixo x
I_y	Momento de Inércia de acordo com o eixo y
n	Número máximo de harmônicos
v_D	Deslocamento dinâmico
v_E	Deslocamento estático
m_x	Momento por faixa em x
m_y	Momento por faixa em y
x, y	Eixos de coordenadas ortogonais para o plano médio da capa
W	Deslocamento medido perpendicularmente ao plano
σ_x	Tensão normal na direção x
σ_y	Tensão normal na direção y
σ_z	Tensão normal na direção z
τ_{xy}	Tensão cisalhante na direção xy
τ_{yz}	Tensão cisalhante na direção yz
τ_{xz}	Tensão cisalhante na direção xz
ω_{0i}	Frequência natural circular do modo i
ω_{0i}	Frequência natural circular do modo i
α_i	Coeficiente dinâmico
β	Relação entre a frequência de excitação e a frequência natural

δ	Parâmetro de amortecimento proporcional à matriz de rigidez
ξ	Taxa de amortecimento modo
ϕ_i	Ângulo de fase
Σ	Somatório
J_p	Inércia à torção
I_{yy}	Inércia à flexão
ω_{0i}	Frequência natural circular do modo i
f(Hz)	Frequência em hertz
f	Frequência de excitação
f_n	Frequência natural
$f_{crít}$	Frequência crítica
f_p	Frequência do passo

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	21
1	ASPECTOS DE PROJETO	33
1.1	Generalidades	33
1.2	Lajes Nervuradas em concreto armado	33
1.2.1	Quanto à Forma.....	34
1.2.2	Quanto à Natureza	34
1.2.3	Quanto ao Tipo de Apoio.....	35
1.2.4	Quanto ao Tipo de Armação.....	36
1.3	Teoria das Placas	37
1.3.1	Equação de Lagrange	38
1.3.2	Soluções por meio de séries	40
1.4	Normas e Recomendações de projeto	43
2	MODELAGEM DAS AÇÕES DINÂMICAS RÍTMICAS	45
2.1	Generalidades	45
3	DESCRIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL	54
3.1	Generalidades	54
3.2	Sistema Construtivo	54
3.3	Propriedades físicas e geométricas	55
3.3.1	Concreto	55
3.3.2	Módulo de elasticidade	55
3.3.3	Peso específico	56
3.3.4	Vigas de Bordo	56
3.4	Modelo Estrutural Investigado	57
3.4.1	Ações Estáticas	59
3.4.2	Ações Dinâmicas	59
4	MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL	67
4.1	Generalidades	67
4.2	Descrição dos Elementos Utilizados na Análise	69
4.3	Modelagem Computacional	71
4.4	Esquema de aplicação de cargas estáticas e dinâmicas	73
4.4.1	Cargas estáticas.....	73

4.4.2	Cargas dinâmicas	73
4.5	Modelagem do amortecimento estrutural	74
4.6	Esforço Computacional	81
5	ANÁLISE ESTÁTICA	82
5.1	Generalidades	82
5.2	Estudo do efeito da excentricidade	82
5.3	Análise das flechas	86
5.4	Análise dos momentos	88
5.5	Análise das tensões	90
6	ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO	101
6.1	Generalidades	101
6.1	Análise das frequências naturais (Autovalores).....	101
6.2	Análise dos modos de vibração (Autovetores).....	108
7	ANÁLISE DO CONFORTO HUMANO	113
7.1	Generalidades	113
7.2	Parâmetros Iniciais.....	113
7.3	Análise quantitativa das acelerações de pico.....	117
7.4	Análise qualitativa das acelerações de pico	122
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131
8.1	Generalidades	131
8.2	Conclusões Alcançadas	132
8.3	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	135
	REFERÊNCIAS	137

INTRODUÇÃO

A procura crescente por edificações com maior liberdade de espaços, principalmente quando se refere a projetos com grandes vãos livres tem exigido dos escritórios de estruturas um estudo que possa identificar a melhor solução estrutural para as edificações. Uma das opções para possibilitar essa liberdade de espaço, melhor aproveitamento da área construída vinculada a economia, seria a utilização de lajes nervuradas, pois apresenta vantagem em relação a outros sistemas construtivos como a liberdade arquitetônica por possibilitar grandes vãos.

Em um estudo sobre custos na construção, Albuquerque [1] demonstrou que a utilização de lajes nervuradas com caixotes de polipropileno pode reduzir o custo total da obra em 15,15%. Em um estudo técnico elaborado pela empresa ARCTEC – Arquitetura, Construção e Tecnologia do Rio de Janeiro [2] sobre a utilização de cubas cilíndricas como nervuras, foi comprovada que a economia em comparação com lajes maciças pode reduzir em até 5% nas formas, 26% no aço e 26% no volume de concreto.

Contudo, as lajes nervuradas têm sido tema de estudos por inúmeros pesquisadores que tentam aperfeiçoar os métodos de cálculo para esse tipo de estrutura. Dessa maneira, a determinação dos esforços mais próximos do real e dos efeitos dinâmicos é indispensável.

De acordo com Lima [3] o sistema de laje nervurada tem sua origem em 1854, quando William Boutland Wilkinson patenteou um sistema em concreto armado de pequenas vigas regularmente espaçadas, onde os vazios entre as nervuras foram obtidos pela colocação de moldes de gesso, sendo uma fina camada de concreto executada como plano de piso. Essa laje, ainda de acordo com o mesmo autor, possuía um vão de 4 metros em cada direção e uma malha de aço na sua parte inferior da camada de concreto e 4 cm de espessura cobrindo as nervuras. Esse é o mesmo princípio realizado até os dias atuais, onde a mesa de concreto resiste aos esforços de compressão e as pequenas vigas os de tração.

Atualmente, no espaço entre as nervuras, costuma-se colocar material inerte com peso próprio reduzido servindo como preenchimento. Dentre os materiais utilizados existem os tijolos de argila, placas de gesso, blocos de poliestireno

expandido (EPS) e caixas de fibrocimento. A Figura 1 apresenta um exemplo de material inerte (EPS) utilizado como nervura.



Figura 1 – Laje nervurada com EPS [4]

Conforme Franca & Fusco [5], as lajes nervuradas são uma evolução natural das lajes maciças. E normalmente são apoiadas em vigas mais rígidas que as nervuras, sendo assim chamadas de convencionais. Porém, esse processo de construção foi também variando e hoje se podem encontrar essas lajes apoiadas diretamente em pilares sem a necessidade de vigas. A escolha do tipo de laje nervurada a ser utilizada dependerá da análise de todas as possibilidades estruturais. Dessa forma, há uma necessidade de conhecimento amplo dos esforços que atuam na laje.

A laje nervurada pode ser moldada no local ou executada com nervuras pré-moldadas. A execução das lajes “*in loco*” exige alguns cuidados além da utilização de materiais como fôrmas e escoramentos conforme a Figura 2. A retirada desses materiais deve ser feita quando o concreto estiver suficientemente endurecido para resistir às ações atuantes sobre as lajes e que não produzam deformações inaceitáveis que possam prejudicar o funcionamento estrutural a qual foi dimensionada, tendo em vista que o baixo módulo de deformação longitudinal do concreto nas primeiras idades torna maior a probabilidade de deformação para o concreto solicitado com pouca idade.



Figura 2 – Escoramento de lajes nervuradas [6]

Um dos fatores que não são considerados em projetos estruturais é o dos efeitos dinâmicos nas estruturas. Muitos projetistas desconsideram o efeito de vibrações nos pisos de concreto quando submetidos a excitações dinâmicas induzidas por pessoas. Tal efeito é relevante para uma avaliação mais apropriada das frequências naturais da estrutura, objetivando evitar problemas de vibração excessiva e posterior desconforto humano.

Na prática corrente de projeto, os engenheiros estruturais limitam-se apenas a proceder a uma análise estática dos sistemas correntes na engenharia civil. Nos sistemas estruturais supõe-se que as cargas atuantes serão aplicadas muito lentamente. Essa hipótese é aceitável quando se considera apenas uma análise estática das estruturas submetidas a ações como peso próprio e cargas permanentes. O dimensionamento desses modelos estruturais puramente calcados em uma análise estática pode levar, em determinados casos, a que o piso apresente vibrações excessivas, comprometendo a segurança e prejudicando a sua utilização. Pois, em muitos casos, as ações são variáveis ao longo do tempo e pode depender da incidência dos ventos, tráfego de veículos ou movimentos de pessoas sobre o piso. Portanto, os efeitos dinâmicos podem ser decisivos para a resposta final do sistema e assim deverão ser considerados na execução do projeto da estrutura. Nos últimos anos, inúmeros autores têm contribuído para análise desses efeitos sobre estruturas de concreto armado e mistas.

Revisão bibliográfica (Estado da Arte)

Apresenta-se a seguir, um resumo de trabalhos realizados ao longo dos anos sobre o assunto em estudo com relevância para análise do comportamento real de estruturas de lajes nervuradas em concreto armado.

De acordo com Baykov e Sigalov [7] o concreto possui resistência à compressão em torno de dez vezes mais que a resistência a tração. Dessa maneira, quando está sujeito à tração pode resultar numa baixa capacidade de resistir a alguns esforços. Para segurança e efeito de cálculo considera-se que seja desprezada a parcela de resistência à tração do concreto. Contudo, para assegurar uma capacidade resistente, utiliza-se armadura na zona tracionada que, para o caso de uma viga, a resistência à flexão de uma seção armada poderá ser aumentada em até 20 vezes.

Essa análise demonstra que um determinado arranjo estrutural pode resultar em estruturas mais eficientes e econômicas e para este fim é importante que se tenha conhecimento dos sistemas estruturais existentes.

Conforme a NBR 6118:2007 [8] as lajes de concreto são elementos estruturais de superfície plana que estão sujeitas a ações perpendiculares ao seu plano. Em geral, possuem dupla função estrutural: funcionam como placa e chapa. Na função de placa elas recebem as ações verticais, perpendiculares à superfície média, e as transmitem para os apoios. No comportamento como chapa, atuam como diafragma horizontal rígido, distribuindo as ações horizontais entre os diversos pilares da estrutura.

Segundo Polillo [9], lajes são placas de material litóide que tem uma das dimensões muito menor que as demais e destinam-se a receber cargas verticais dos pisos e a transmiti-las às vigas ou pilares que a suportam. Além dessa característica principal, as lajes também apresentam outras funções importantes que auxiliam no contraventamento das estruturas, funcionando como diafragma, pois é um elemento infinitamente rígido no seu plano, e assim distribuem as cargas horizontais atuantes entre toda a estrutura. Segundo os mesmos autores, as lajes quando construídas monoliticamente com as vigas, contribuem para seu enrijecimento, funcionando como mesas de compressão em seção T.

Para Souza e Cunha [10] as lajes são componentes básicos das estruturas,

elementos estruturais planos bidirecionais, geralmente retangulares e monolíticos, onde a espessura “ h ” é muito menor que as outras dimensões, com carregamento predominantemente transversal.

De acordo com todos esses autores e com a verificação da grande utilidade das lajes de concreto, ao longo dos anos, foram desenvolvidos métodos de análise, variação de forma e composição de maneira que melhorem seu desempenho estrutural e resultem em maior economia. A escolha mais adequada do tipo de laje para determinado projeto estrutural dependerá dos requisitos arquitetônicos, econômicos e de segurança.



Figura 3 – Arranjo físico de lajes nervuradas [11]

Segundo Franca e Fusco [5] as lajes nervuradas resultam da eliminação da maior parte do concreto abaixo da linha neutra em um padrão rítmico de arranjo conforme a Figura 3. Dessa maneira, há uma diminuição do peso próprio no dimensionamento da estrutura e melhor aproveitamento dos materiais do aço e do concreto.

Diversos métodos de análise e dimensionamento de lajes de concreto armado têm sido utilizados ao longo dos anos dentre eles: analogia de grelha, método dos elementos finitos e método de charneiras plásticas. A escolha da análise a ser utilizada está vinculada a melhor precisão e integração das informações necessárias para o dimensionamento.

Conforme Bocchi Jr [12], as lajes nervuradas apresentam um comportamento elástico intermediário entre placa e grelha. Dessa forma, as Normas Técnicas permitem calcular os esforços solicitantes e deslocamentos segundo a teoria das placas e pode-se fazê-lo segundo a teoria das grelhas. Porém, na Tabela 1, o autor demonstra que os resultados obtidos para esforços solicitantes e deslocamentos empregando-se a teoria das placas, por meio de tabelas (Pinheiro) [13], e teoria das grelhas, por meio do programa GPLAN3 [14], apresentam uma diferença. Para uma laje quadrada de 6,48 m de lado, com distância entre nervuras menor que 50 cm, apresentam valores com discrepâncias de momentos fletores da nervura de até 18% entre os processos.

Tabela 1 – Valores de momentos fletores obtidos pelos métodos Pinheiro [13] e por meio do programa GPLAN3 [14]

Método	Momentos fletores			
	a>50 cm		a<50 cm	
	Mesa kNm/m	Nervura kNm/m	Mesa kNm/m	Nervura kNm/m
Pinheiro		10,01		4,38
GPLAN3		11,76		5,32

Segundo Dias [15], Marsh em 1904 analisou uma laje maciça uniformemente carregada na qual foi substituída por uma malha de vigas que se cruzavam. Verificou-se que, nessa análise, foram negligenciados os momentos torçores da placa, gerando assim um erro de 25% nos momentos fletores para uma placa simplesmente apoiada.

Desde as primeiras verificações sobre lajes nervuradas, a NBR 6118:2007 [8] considera que estas podem ser calculadas como elementos de placa. Tendo essa consideração, Barbirato [16] transformou uma laje nervurada em uma laje maciça equivalente, conforme Figura 4, através de uma equivalência da inércia à flexão. Neste estudo não foi considerada a rigidez à torção, e foi realizada a seguinte consideração: o módulo de deformação transversal do concreto corresponde a 1% do valor calculado pela equação obtida através da teoria clássica da elasticidade.

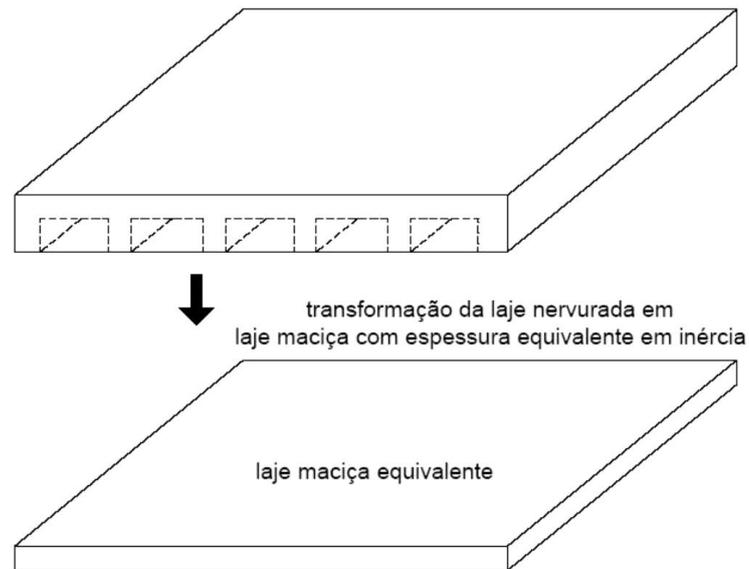


Figura 4 – Transformação de uma Laje Nervurada em Laje Maciça [16]

Nesse método, a placa enrijecida por nervuras é convertida em uma placa maciça de espessura constante equivalente em comportamento à laje nervurada. Assim, a flexão geral do sistema de placa enrijecida por nervuras é computada utilizando-se algum método convencional e os resultados são superposições daqueles obtidos da flexão local das nervuras e painéis de laje.

Araújo [17][18] em um estudo comparativo entre lajes maciças e nervuradas dividiu uma espessura “ h ” em diversas lâminas ou camadas de pequena espessura baseado na teoria das placas de Mindlin. A análise estrutural foi realizada com o emprego do método dos elementos finitos considerando-se a não-linearidade física do concreto em compressão e a colaboração do concreto tracionado entre fissuras.

Coimbra [19] descreve que nesse método, denominado de método Laminar, a laje nervurada de concreto armado é tratada como uma laje maciça com propriedades equivalentes para as camadas de concreto situadas na região das nervuras. Ou seja, deve-se trabalhar com propriedades equivalentes do concreto, para que o modelo seja capaz de representar os vazios deixados na estrutura pela eliminação de parte do concreto da zona tracionada. Quando os vazios forem permanentemente preenchidos com blocos de um material inerte (aquele com peso próprio reduzido em comparação com o concreto), esse efeito favorável poderá ser considerado, adotando-se propriedades equivalentes para esse material. As

armaduras também podem ser consideradas, substituindo-as por uma lâmina contínua.

Em seus trabalhos, Araújo [17][18] conclui que as lajes nervuradas de concreto armado apresentam um comportamento muito semelhante ao das lajes maciças, o que permite que o cálculo seja feito como uma laje maciça equivalente com rigidez à torção igual à rigidez à flexão.

Stramandinoli [20] estudou os resultados dos esforços através dos métodos de analogia de grelha, através do método tridimensional em elementos finitos e pelo método de lajes equivalentes e constatou resultados insatisfatórios com a substituição de lajes nervuradas por placas elásticas, onde os momentos elásticos e as flechas foram menores do que os obtidos por analogia de grelha e por elementos finitos. Nesse estudo Stramandinoli [20] conclui e recomenda que as lajes nervuradas só sejam assim calculadas se os esforços forem obtidos sem a consideração da rigidez à torção.

Coelho & Loriggio [21] desenvolveram estudos de lajes através dos métodos dos elementos finitos e analogia de grelha e concluíram que esta última é uma ferramenta útil na análise e dimensionamento de lajes de concreto armado, pois consegue simulá-las adequadamente e de maneira prática fornecendo resultados muito próximos da teoria das placas delgadas em regime elástico.

Sheikh & Mukhopadhyay apud Dias [15] demonstrou que a modelagem de placas enrijecidas através de sistemas de grelhas têm fracassado na evolução de uma solução genérica satisfatória. Em seus estudos foram realizadas análises numéricas de dois modelos computacionais, sendo um gerado com elementos finitos de placa no software SAP 90, baseado no conceito de rigidez equivalente à flexão na região nervurada considerando a rigidez à torção da laje, e outro com elementos de grelha no software GRELHA-TQS, o qual desprezou a influência da torção.

Das análises dos resultados, Sheikh & Mukhopadhyay apud Dias [15] concluem que o cálculo que melhor simula o comportamento elástico-linear da estrutura é o que utiliza elementos finitos de placa, sendo o mais rígido, discretizado pelo software SAP 90. Entretanto, à medida que a fissuração da laje evolui durante o ensaio reduzindo assim, sua rigidez, o seu comportamento se aproxima do previsto pelo modelo numérico menos rígido, gerado com elementos de grelha no software GRELHA – TQS. Nos últimos estágios de carga, a fissuração do microconcreto

provoca um comportamento o qual nenhum dos dois modelos numéricos é capaz de reproduzir seu desempenho elasto-plástico.

Dias [15] apresentou um estudo sobre a placa-viga no cálculo estrutural de lajes nervuradas, aplicando o Método dos Elementos Finitos, considerando como fator principal de análise a excentricidade existente entre o eixo da nervura e o plano médio da placa e sua influência nos deslocamentos e esforços. Nesse estudo Dias [15] avaliou a influência das variáveis como número de nervuras e as características como espaçamento entre as nervuras e altura em relação à altura da placa. Dias [15] também apresentou comparações entre as teorias de cálculo simplificadas (Teoria da Placa Ortotrópica Equivalente e Teoria de Grelha) e modelos mais realistas (com elementos finitos que consideram a excentricidade na formulação), buscando determinar o quanto as simplificações influenciam na análise estrutural das lajes nervuradas.

Vasconcelos [22] apresentou um estudo sobre atenuações de vibrações em lajes nervuradas de piso de concreto armado na qual introduzia sistemas passivos de reduções de vibrações otimizados para atenuar os efeitos causados pelo nível excessivo de vibrações induzidas a este tipo de lajes. Este trabalho pode ser considerado como um dos pioneiros em análises de carregamento dinâmico em lajes nervuradas com elaboração de modelos computacionais.

Coimbra [19] e Silva [23] estudaram o comportamento estático e dinâmico de Lajes Nervuradas executada com sistema de cubas REDUZCON no qual simularam modelos numéricos e analisaram a influência da relação entre vãos e o número de nervuras para lajes cuja quantidade de nervuras era diferente nos dois sentidos.

Nessa abrangência de pesquisa pode-se concluir que os estudos sobre lajes nervuradas concentraram-se mais nas duas últimas décadas e com ferramentas computacionais que auxiliaram na criação de modelos numéricos com base no método dos elementos finitos de maneira que se aproximam mais da realidade.

Objetivos e Motivações

No âmbito da engenharia civil, as lajes nervuradas de concreto armado têm sido escolhidas como opções construtivas cada vez mais utilizadas, diante da necessidade de racionalização do espaço físico e, ainda, objetivando a minimização dos custos e prazos.

Além do critério economia, outros que influenciam decisivamente para a escolha das lajes nervuradas como solução estrutural para pisos de edificações dizem respeito à liberdade arquitetônica, pois permitem grandes vãos e, também, a simplificação na execução da obra, em termos de formas e escoramentos.

Apesar das vantagens apresentadas anteriormente, como em qualquer decisão associada à escolha de um sistema estrutural a ser construído, alguns cuidados devem ser tomados para que as lajes nervuradas apresentem um comportamento estrutural adequado tanto sob o ponto de vista dos estados limites de utilização quanto dos estados limites de serviço. No que tange aos critérios de resistência e estabilidade percebe-se que os estados limites últimos têm sido atendidos. Entretanto, os problemas relacionados aos estados limites de utilização, associados às vibrações excessivas, devem ser analisados de forma mais cuidadosa, procurando-se buscar alternativas viáveis para minimizar os efeitos de vibrações induzidas por pessoas.

É notório que, na prática corrente de projeto, os engenheiros estruturais limitam-se apenas a proceder a uma análise estática dos sistemas correntes na engenharia civil. O dimensionamento desses modelos estruturais puramente calcados em uma análise estática pode levar, em determinados casos, a que o piso apresente vibrações excessivas, comprometendo a segurança e prejudicando a sua utilização.

Em 2009, por exemplo, os usuários do Edifício Seguros Unimed localizado em São Paulo, mais exatamente no dia 14/10/2009, chegaram a relatar que esta edificação “tremia”, gerando pânico e evacuação imediata. No estudo realizado pelo IEME Engenharia Consultiva [24] foi constatado que a atividade física realizada no 12º pavimento foi a responsável pelas vibrações que causaram desconforto aos usuários da edificação. Ainda com relação às conclusões obtidas indicaram que o

edifício não é adequado para a prática de atividades físicas, principalmente nos pavimentos superiores.

Estas foram as principais motivações para o desenvolvimento de uma metodologia de projeto baseada na análise da resposta dinâmica de lajes nervuradas de concreto armado quando submetidas a atividades humanas rítmicas. A metodologia de análise desenvolvida fundamenta-se na modelagem computacional, através do emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF). Os modelos numéricos são desenvolvidos com base em técnicas usuais de discretização, por meio do programa Ansys [25]. As respostas dinâmicas foram obtidas mediante a aplicação de cargas considerando pessoas praticando atividades rítmicas (ginástica aeróbica). A análise dinâmica das lajes nervuradas contempla uma análise crítica acerca dos valores das acelerações máximas (acelerações de pico).

Neste trabalho de pesquisa objetiva-se modelar o comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado. Para tal, a resposta estática (deslocamentos, esforços e tensões) e a resposta dinâmica (frequências naturais e acelerações de pico) de inúmeros modelos estruturais de lajes nervuradas são obtidas e investigadas qualitativa e quantitativamente. Alguns parâmetros de projeto são estudados ao longo da investigação, tais como: comprimento dos vãos dos modelos e geometria das vigas de bordo. Os valores das acelerações máximas (acelerações de pico) dos modelos são comparados com os limites propostos por recomendações de projeto, de forma a avaliar o conforto humano.

Escopo do Trabalho

Neste primeiro capítulo foi apresentada uma introdução acerca do que se pretende investigar neste trabalho. Foi relatado um breve histórico sobre lajes nervuradas em concreto armado demonstrando alguns métodos de cálculos desse sistema construtivo que se apresenta como uma alternativa sofisticada e econômica.

No Capítulo I serão apresentados os aspectos de projeto utilizados no trabalho, no qual estão descritos a fundamentação teórica com um breve conceito sobre lajes, normas de projeto e teorias de cálculo utilizado para resolução de problemas de teoria de placas.

No Capítulo II será demonstrada a metodologia utilizada para modelagem dinâmica com a descrição das formulações matemáticas que descrevem as atividades humanas rítmicas consideradas neste trabalho.

O Capítulo III apresenta a descrição dos modelos estruturais desenvolvidos utilizados na avaliação estática e dinâmica. Serão descritas as características de cada modelo com as propriedades físicas e geométricas, os carregamentos adotados e o sistema estrutural com a distribuição das cargas dinâmicas.

O Capítulo IV refere-se à modelagem computacional dos elementos, onde se busca expressar uma realidade do sistema de lajes nervuradas, através do método dos elementos finitos utilizando técnicas usuais de discretização, por meio do programa Ansys [25]. Também será descrito o esquema de aplicação de cargas estáticas e dinâmicas e a modelagem do amortecimento estrutural.

O Capítulo V apresenta as análises estáticas e o estudo do efeito da excentricidade existente entre o eixo longitudinal das nervuras e o plano médio da laje e o Capítulo VI a resposta dinâmica dos modelos através das frequências e modos de vibração.

No Capítulo VII serão analisadas as acelerações de pico correspondentes à taxa de ocupação em cada modelo. No Capítulo VIII serão feitas as considerações finais deste trabalho.

1 ASPECTOS DE PROJETO

1.1 Generalidades

Segundo Franca e Fusco [5] a laje nervurada é uma evolução natural da laje maciça, resultando da eliminação da maior parte do concreto abaixo da linha neutra, o que permite redução da espessura total pela criação de vazios em um padrão rítmico de arranjo, ou com a utilização de material inerte que não colabore com a resistência da laje.

Segundo Pinheiro e Rezende [26], quanto à execução, as lajes nervuradas podem ser moldadas no local ou podem ser executadas com nervuras pré-moldadas. Para ambas, é necessário o uso de fôrmas e de escoramentos, além do material de enchimento. Ainda segundo Pinheiro e Rezende [26] a prática usual consiste em adotar painéis com vãos maiores que os das lajes maciças, apoiados em vigas mais rígidas que as nervuras.

De acordo com esses autores e com a verificação da grande utilidade das lajes nervuradas de concreto, ao longo dos anos, foram desenvolvidos métodos de análise, variação de forma e composição de maneira que melhorem seu desempenho estrutural e resultem em maior economia. A escolha mais adequada do tipo de laje para determinado projeto estrutural dependerá muito da funcionalidade, de maneira que agreguem os requisitos arquitetônicos, econômicos e de segurança.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos e considerações adotadas em projeto no que se refere ao dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado.

1.2 Lajes Nervuradas em concreto armado

Alguns autores definem que cada tipo de laje possui características próprias quanto à construção e desempenho, mas de forma geral, os autores classificam quanto à forma, quanto à natureza, tipo de apoio e tipo de armação.

1.2.1 Quanto à Forma

As lajes podem obter formas de acordo com o projeto arquitetônico. Podendo ser:

- a) Poligonais: podendo ser retangulares, quadradas, triangulares, octogonais, etc.;
- b) Elípticas: circulares ou anelares.

1.2.2 Quanto à Natureza

Nesse caso as lajes podem ser consideradas:

- a) Lajes maciças: são constituídas por placas monolíticas de concreto armado ou protendido com espessura definida em projeto. São as mais comuns, mas não vencem grandes vãos;
- b) Lajes nervuradas: Segundo a NBR 6118:2007 [8] as lajes nervuradas são definidas como lajes cuja zona de transição é constituída por nervuras entre as quais podem ser colocados materiais inertes com a finalidade de tornar plana a superfície externa. Nesse caso, o peso próprio da laje é reduzido, uma vez que se elimina uma parte do concreto que ficaria na zona tracionada. Esse tipo de laje é utilizado para vencer grandes vãos ou para casos de carregamentos específicos;
- c) Lajes mistas: Segundo Donin [27], são lajes nervuradas, mas o espaço entre as nervuras é preenchido por blocos cerâmicos na qual participa com uma parcela de resistência mecânica contribuindo na resistência à flexão da região comprimida. Outra característica é a não utilização da mesa comprimida e o revestimento é assentado diretamente sobre as nervuras ortogonais de concreto e sobre a face superior dos blocos cerâmicos;
- d) Lajes em grelhas: Ainda segundo Donin [27] são também lajes nervuradas, mas com características particulares. Nesse tipo de laje,

as vigas são aparentes e as nervuras possuem grandes alturas e o espaçamento entre elas é superior a 1 metro. O dimensionamento da capa de concreto é feito considerando a possibilidade de punção de uma sobrecarga pontual. Seu cálculo é feito como lajes maciças contínuas e o vigamento como grelha;

- e) Lajes duplas: Donin [27] ainda define este tipo de laje como as que apresentam duas capas de concreto, sendo a superior trabalhando a compressão e uma inferior. Entre as duas capas ficam as vigas ou nervuras de concreto. Esse tipo de laje está em desuso e pode ser encontrada em pilotis ou pavimentos de transição em edifícios mais antigos;
- f) Lajes pré-fabricadas: São lajes formadas por vigotas e blocos cerâmicos ou de concreto e uma camada de concreto na zona comprimida. Podem ser unidirecionais ou bidirecionais. Esses dois tipos de lajes são regulamentados por normas brasileiras;
- g) Lajes cogumelo: São lajes apoiadas diretamente sobre os pilares podendo ter capitéis sobre os pilares ou não conforme a Figura 5.

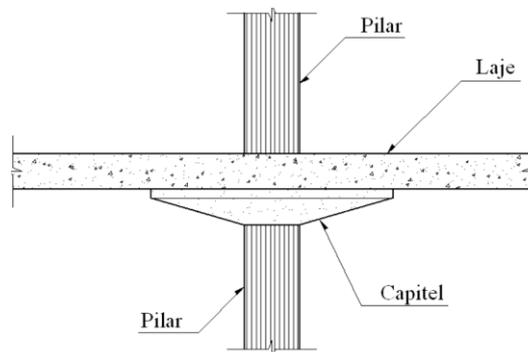


Figura 5 – Laje cogumelo com capitel aparente [27]

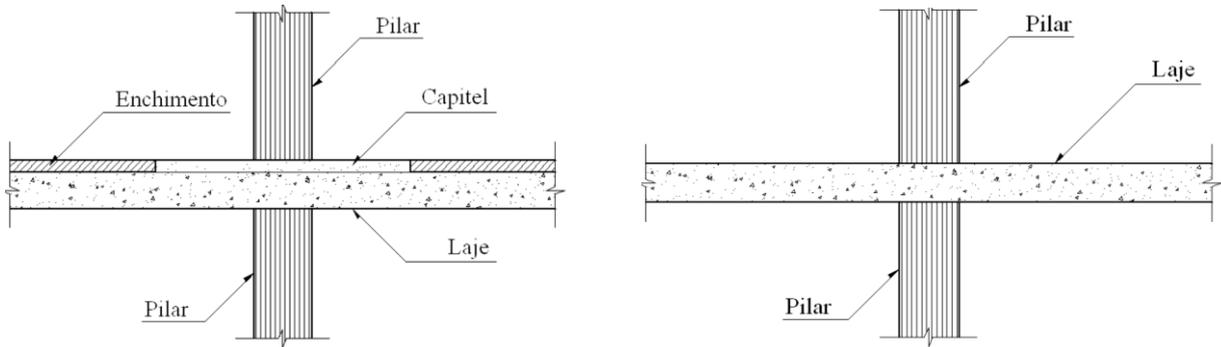
1.2.3 Quanto ao Tipo de Apoio

O apoio é um elemento estrutural que distribui a carga que atua sobre a laje e transfere para outro ponto da estrutura. Esses apoios podem ser:

- a) Apoio contínuo: é o caso comum normalmente visto em obra. A laje

está apoiada sobre uma linha contínua de alvenaria, parede de concreto e vigas com os bordos apoiados ou livres;

- b) Apoio discreto: é o caso de lajes cogumelos ou laje plana. Podendo estar reforçado com capitel, capitel invertido ou sem capitel.



a) Laje cogumelo com capitel invertido

b) Laje cogumelo sem capitel

Figura 6 – Laje cogumelo com capitel invertido e sem capitel [27]

1.2.4 Quanto ao Tipo de Armação

Segunda Rocha [28] pode-se classificar as lajes em dois grandes grupos, de acordo com o modo de dimensionamento:

- a) Lajes armadas numa só direção: Também conhecida como laje corredor quando a relação entre o maior e o menor vão for maior que dois. Essas lajes apresentam solicitações dos esforços em apenas uma direção e a maior parte do carregamento é suportada pelos apoios de menor direção;
- b) Lajes armadas em duas direções: Também definidas como lajes armadas em cruz, são quando a relação entre o maior e o menor vão da laje é menor ou igual a 2.

É importante ressaltar que, mesmo as lajes ditas armadas em uma única direção, têm armaduras positivas nas duas direções principais, porém, elas são calculadas levando-se em conta apenas a direção principal.

1.3 Teoria das Placas

Placas são corpos sólidos tridimensionais limitados por duas superfícies sendo que a distância entre elas é muito pequena quando comparada as outras duas, e que estão submetidas a um carregamento perpendicular. A Teoria das Placas é a base para aplicação numérica na resolução de cálculos de lajes.

A Teoria de Placas fundamenta-se na Teoria da Elasticidade, que segundo Araújo [29], as hipóteses básicas variam de acordo com o tipo de placa considerada. Para as de pequena espessura, a exemplo de lajes de edifícios, aplicam as seguintes hipóteses básicas:

- O material é elástico, homogêneo e isotrópico;
- A espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões (ordem de 1/10);
- As deformações angulares da superfície média são pequenas comparadas à unidade;
- Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos comparados com a espessura da placa (inferiores a 1/10, para que se possam considerar pequenas deformações);
- As cargas dinâmicas e estáticas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- Linhas retas, inicialmente normais à superfície média, permanecem retas e normais à superfície média após as deformações;
- As deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas;
- A deformação da placa é produzida por deslocamentos dos pontos da superfície média perpendicular ao plano indeformado;
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às tensões no mesmo plano.

1.3.1 Equação de Lagrange

Segundo Ajdukiewicz e Starosolski apud Donin [27] a análise estrutural de lajes nervuradas pode ser feita pela analogia às grelhas e pela analogia a lajes maciças isotrópicas com rigidez equivalente. No entanto, a utilização do modelo de laje ortotrópica leva a melhores resultados, podendo ser empregados modelos elásticos e rígido-plástica aproximados ou exatos. Desse modo é possível escrever a equação diferencial de equilíbrio proposta por Lagrange na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{(g + q)}{D} \quad (1)$$

Na qual:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

Definições:

D: rigidez da placa à flexão;

E: módulo de deformação longitudinal do material;

h: altura da laje;

ν : coeficiente de Poisson do material;

(g + q): ação devida ao peso próprio e aos carregamentos externos aplicados perpendicularmente ao plano da placa no interior da placa;

w: deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje;

x, y: eixo de coordenadas ortogonais para o plano médio da placa.

Segundo Coimbra [19], a resolução da equação dependerá das determinações das condições de contorno, que sofrerá variação com o tipo de vinculação. Para bordas simplesmente apoiadas perpendiculares ao eixo Ox,

conforme Figura 7, os deslocamentos w serão nulos, e se não houver momentos prescritos, o valor do momento fletor m_x também será nulo. Assim:

$$w = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

No estudo, o sistema de coordenadas adotado é apresentado na Figura 7.

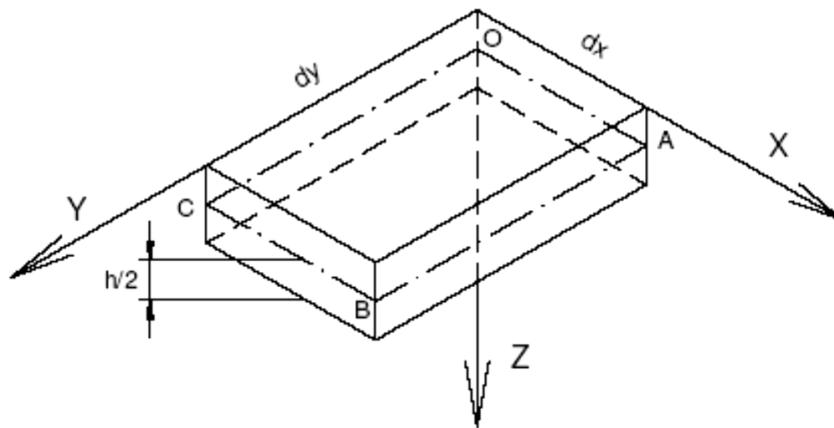


Figura 7 – Sistema de coordenadas de um elemento de placa

Para bordas com engastamento perfeito, perpendiculares ao eixo Ox , os deslocamentos w serão nulos e a rotação θ_x , não sendo prescrita, também será nula ao longo dessa borda, de acordo com a Figura 7.

$$w = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x = 0 \quad (6)$$

Com relação às bordas livres, perpendiculares ao eixo Ox , verifica-se que os esforços cortantes r_x e o momento fletor m_x ao longo desse apoio deverão ser nulos. Dessa maneira:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \int_{x=a} = 0 \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \int_{x=a} = 0 \quad (8)$$

Para bordas perpendiculares ao eixo Oy, as equações serão as mesmas anteriormente demonstradas, alterando apenas as variáveis x e y.

Integrando-se a equação diferencial, obtém-se o deslocamento ortogonal ao plano em qualquer ponto da placa e, com este, utilizando-se combinações de derivadas da função de deslocamentos, os momentos, os esforços cortantes e as reações. As tensões podem ser calculadas através de momentos e esforços cortantes.

Ainda segundo Coimbra [19], a equação de Lagrange descreve um problema com poucas soluções exatas, restringindo-se, somente, a casos comuns de geometria da placa e do carregamento como, por exemplo, lajes circulares e retangulares simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído.

1.3.2 Soluções por meio de séries

A Academia Francesa de Ciências apresentou a solução da equação de placas utilizando séries duplas trigonométricas de uma placa retangular simplesmente apoiada, na qual permite calcular placas desse gênero com qualquer tipo de carregamento $p_{(x,y)}$. Esse carregamento pode ser representado aproximadamente por séries duplas de Fourier abaixo:

$$p = p_{(x,y)} = \sum_m \sum_n p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

Em que:

a e b = dimensões da placa

m e n = número de retângulos em que se divide a placa, cada um com lados

$$\frac{a}{m} \text{ e } \frac{b}{n};$$

p_{mn} = valor máximo da ação no centro de cada retângulo.

Assim a linha elástica $w_{(x,y)}$ é dada por uma série dupla obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno para placa apoiada ao longo das bordas e com rotações livres, resultando:

$$w = \sum \sum \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

Em que os valores de p_{mn} são dados por:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p_{(x,y)} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (11)$$

Para o caso de uma placa retangular com carregamento uniformemente distribuído em sua superfície $\bar{p} = p_{(x,y)}$, pode-se adotar o valor p_{mn} dado pela expressão:

$$p_{mn} = \frac{16\bar{p}}{\pi^2 mn} \quad (12)$$

Visto que m e n são números ímpares, pois caso fossem pares teriam valores de $p_{mn} = 0$.

Substituindo-se na expressão da linha elástica, tem-se a função que descreve a flecha de uma placa retangular para o carregamento uniformemente distribuído em

sua superfície:

$$w = \frac{16\bar{p}}{\pi^2 mn} \sum \sum \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (13)$$

Para calcular os valores dos esforços como momentos fletores por unidade de comprimento m_x e m_y nas direções x e y , a partir das derivadas da expressão da linha elástica $w_{(x,y)}$ resultando nas expressões abaixo:

$$m_x = \frac{16\bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (14)$$

$$m_y = \frac{16\bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{b^2} + \nu \frac{n^2}{a^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (15)$$

Verifica-se que as expressões acima dependem somente das dimensões a e b da placa e do carregamento \bar{p} . E que a precisão dos resultados está relacionada com quantos valores de m e n serão adotados.

A solução do problema de placas pelo caminho clássico é, portanto, limitada a um número relativamente pequeno de geometrias, de carregamentos e condições de contorno, o que, para casos mais complexos, torna a análise impraticável, especialmente quando os efeitos das deformações dos elementos de apoio precisam ser levados em consideração. Devido à essas restrições e complexidades, o cálculo envolvendo problema de placas é feito com o auxílio de programas computacionais.

1.4 Normas e Recomendações de projeto

Apresentam-se a seguir, as dimensões limites para lajes nervuradas, segundo a NBR 6118:2007 [8], item 13.2.4.2. A vinculação está definida com base na resistência do concreto à compressão.

As prescrições quanto às dimensões mínimas da mesa e das nervuras são:

a) Espessura da mesa

Quando não houver tubulações horizontais embutidas, a espessura da mesa deve ser maior ou igual a $1/15$ da distância entre nervuras e não menor que 3 cm;

A espessura da mesa deve ser maior ou igual a 4 cm, quando existirem tubulações embutidas de diâmetro máximo 12,5mm.

b) Largura das nervuras

A largura das nervuras não deve ser inferior a 5 cm;

Se houver armaduras de compressão, a largura das nervuras não deve ser inferior a 8 cm.

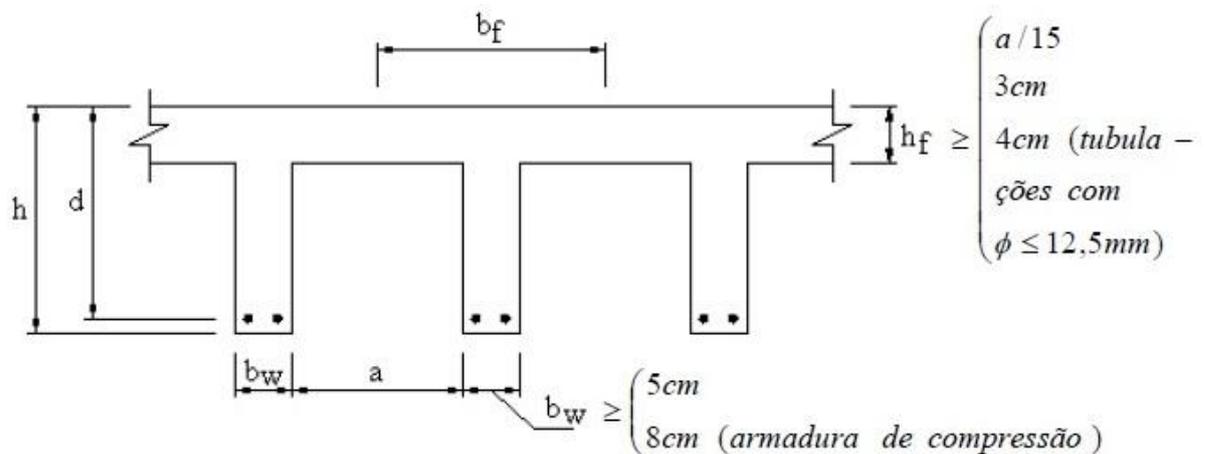


Figura 8 – Lajes Nervuradas – Dimensões mínimas NBR6118: 2007 [8]

Os critérios de projeto dependem do espaçamento e entre os eixos das nervuras. Para a distância entre eixos das nervuras menores que 65 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa e, para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje.

Se o espaçamento entre nervuras for entre 65 e 110 cm, há exigência da verificação da flexão da mesa e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento

como vigas; assim permite-se essa verificação como laje se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras for maior que 12cm;

Para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

Outra recomendação para as lajes nervuradas é evitar engastes e balanços, visto que, nesses casos, têm-se esforços de compressão na face inferior, região em que a área de concreto é reduzida. Nos casos em que o engastamento for necessário, duas providências são possíveis:

- limitar o momento fletor ao valor correspondente à resistência da nervura à compressão;
- utilizar mesa na parte inferior, situação conhecida como laje dupla, ou região maciça de dimensão adequada.

Quanto às ações, devem ser calculadas de acordo com a NBR 6120:1980 [30] – Cargas para o cálculo de estruturas de edificações.

A laje nervurada pode ser tratada como placa em regime elástico. Assim, o cálculo dos esforços solicitantes em nada difere daquele realizado para lajes maciças.

Na análise da flecha em lajes, a NBR 6118:2007 [8] estabelece limites segundo a tabela 13.2, levando-se em consideração as combinações de ações. Para o cálculo utilizam-se processos analíticos dividindo-se em duas considerações: flecha imediata e flecha diferida. A flecha imediata, aquela referente ao deslocamento imediato após a aplicação dos carregamentos, é abordada no item 17.3.2.1.1 da norma. A flecha diferida é a parcela decorrente das cargas de longa duração, em função da fluência, e é abordada no item 17.3.2.1.2.

Para lajes nervuradas de grandes dimensões em planta e submetidas a cargas concentradas elevadas, deve-se considerar no cálculo, a posição dessas cargas, a localização e a rigidez das nervuras, as condições de apoio das lajes, a posição dos pilares e a deformabilidade das vigas de sustentação. Para isso podem ser utilizados programas computacionais adequados para cada descrição do modelo estrutural a ser projetado.

2 MODELAGEM DAS AÇÕES DINÂMICAS RÍTMICAS

2.1 Generalidades

As ações em estruturas de concreto são comumente analisadas sendo aplicadas lentamente. Esse critério baseia-se em análise de ações estáticas, nas quais se pode considerar como ações, o peso próprio da estrutura. Porém, há casos de ações que não devem ser omitidos como, por exemplo, a incidência dos ventos sobre edifícios altos, sismos, frenagem e aceleração de veículos sobre pontes e movimentos de pessoas (caminhar, pular e saltar) sobre uma laje.

A evolução nos processos de avaliação estrutural com o desenvolvimento dos *softwares* e computadores, aliados a pesquisas e materiais mais resistentes, propicia a execução de estruturas cada vez mais flexíveis. Dessa forma, há uma preocupação crescente com a verificação dessas ações dinâmicas e como devem ser estudadas e consideradas quando em contato com as estruturas.

Diversos autores têm estudado as ações dinâmicas provocadas por pessoas em contato com a estrutura. Dentre os autores pode-se citar Faísca [31] e Murray, Allen e Ungar [32]. A grande dificuldade encontrada pelos autores é como essas ações podem ser representadas e utilizadas em simulações de modelos numéricos. Essa complexidade está determinada pelas particularidades de como esses carregamentos são gerados pois, cada indivíduo tende a assumir um tipo de marcha e de velocidade mais eficiente de acordo com a estrutura.

Nos estudos elaborados por Murray et al. [32] que fazem parte de uma série de livros denominados Steel Design Guide Series, desenvolvidos no American Institute of Steel Construction (AISC), são fornecidos princípios básicos e ferramentas para analisar sistemas de pisos e passarelas submetidas a atividades humanas. Neste guia, os valores obtidos de aceleração de pico (aceleração máxima) são comparados com os valores limites definidos na curva base da ISO (1989), conforme Figura 9, que representa o limite no qual as acelerações verticais passam a ser perceptíveis.

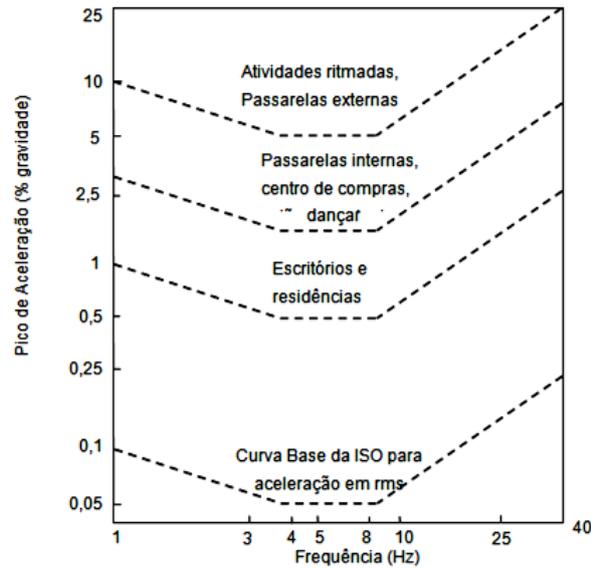


Figura 9 – Pico de aceleração máxima recomendado para o conforto humano [32]

Este guia propõe considerar a solicitação dinâmica como uma componente harmônica dependente do tempo que se iguala a frequência natural da estrutura, na tentativa de causar a ressonância, como mostra a equação (16):

$$F(t) = P\alpha_i \cos(2\pi i f_p t) \quad (16)$$

Na qual:

$F(t)$: força representativa da atividade humana ao longo do tempo (N);

P : peso do indivíduo;

i : múltiplo harmônico da frequência do passo;

α_i : coeficiente de Fourier associado ao êxito harmônico da atividade;

f_p : frequência do passo da atividade (Hz);

t : tempo (s).

Os valores da frequência do passo da atividade (f_p) e coeficientes dinâmicos (α_i) podem ser vistos na Tabela 2, considerando diversos tipos de atividades, como a caminhada, a atividade aeróbica e a dança.

Tabela 2 – Faixa de frequência das atividades [32]

Frequência de excitação do passo (f_p) e coeficientes dinâmicos* (α_i)						
Harmônico	Caminhada		Atividade aeróbica		Dança	
i	f_p (Hz)	α_i	f_p (Hz)	α_i	f_p (Hz)	α_i
1	1,6 a 2,2	0,5	2,0 a 2,75	1,5	1,5 a 3,0	0,5
2	3,2 a 4,4	0,2	4,0 a 5,5	0,6	-	-
3	4,8 a 6,6	0,1	6,0 a 8,25	0,1	-	-
4	6,4 a 8,8	0,05	-	-	-	-

* Coeficiente dinâmico = pico da força senoidal/ peso da(s) pessoa(s).

De acordo com este guia de projeto, o sistema de piso é considerado satisfatório se o pico de aceleração, a_p , devido à excitação da caminhada, em função da aceleração da gravidade, g , determinada através da equação (17), não exceder a aceleração limite, a_p/g , para a ocupação apropriada.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_0 \exp(0,35f_n)}{\beta W} \leq \frac{a_0}{g} \quad (17)$$

Na qual:

$\frac{a_p}{g}$: razão entre a aceleração do piso e a aceleração da gravidade em (m/s^2);

$\frac{a_0}{g}$: aceleração limite recomendada de acordo com a curva limite em (%g);

f_n : frequência natural do sistema estrutural em (Hz);

P_0 : carga constante de valor igual a 0,29 kN para painéis de piso e 0,41 kN para passarelas;

β : taxa de amortecimento modal;

W : peso efetivo total do piso em (kN).

Para a avaliação da estrutura quanto a atividades rítmicas, calcula-se a relação a_p/g (g é a aceleração da gravidade), dada pela equação (18), na ressonância, ou seja, fazendo a frequência do passo se igualar a frequência natural da estrutura ($f_p = f_n$).

$$\frac{a_p}{g} = \frac{1,3\alpha_i w_p}{2\xi w_t} \quad (18)$$

Na qual:

a_p/g : razão entre a aceleração de pico e a aceleração da gravidade;

α_i : coeficiente de Fourier associado ao i -ésimo harmônico da atividade;

w_p : carga efetiva por unidade de área das pessoas distribuídas sobre o piso;

w_t : carga total por unidade de área do piso, incluindo os ocupantes;

ξ : taxa de amortecimento modal.

Neste trabalho, os valores das acelerações de pico, obtidas na fase permanente da resposta dos modelos estruturais investigados, são comparados com valores limites propostos em recomendações de projeto, admissíveis sob o ponto de vista de conforto humano do *Guia Prático do AISC* elaborado por Murray et al [32].

Faísca [31], em sua investigação, observou que para diferentes atividades como saltos à vontade, ginástica aeróbica e show/torcida, os gráficos que relacionam a função força x tempo apresentaram características semelhantes, ocorrendo variações apenas na amplitude máxima e no período das atividades. Isso possibilitou o emprego de uma única metodologia para o processamento dos sinais.

Dessa investigação foi verificado que a função semi-seno, antes utilizada para representar tipos de carregamentos dinâmicos, não é tão adequada para representar esses tipos de carregamentos. Através de um estudo com várias funções, foi sugerida a função conhecida como função Hanning. A comparação do sinal experimental pode ser vista na Figura 10.

A equação (19) representa matematicamente a função da figura 10:

$$F(t) = CD \left\{ K_p P \left[0,5 - 0,5 \cos \left(\frac{2\pi}{T_c} t \right) \right] \right\}, \text{ para } t \leq T_c \quad (19)$$

$$F(t) = 0, \text{ para } T_c < t \leq T$$

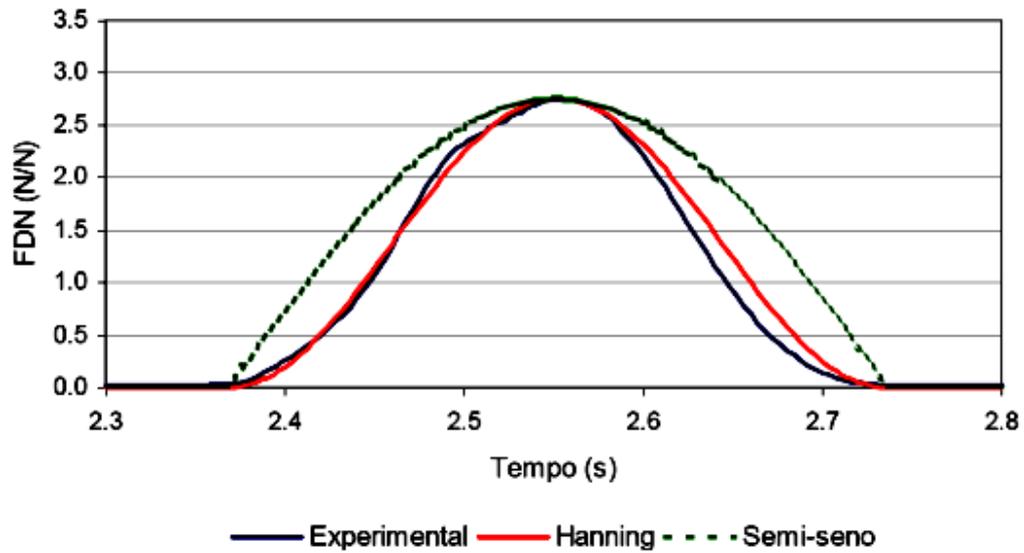


Figura 10 – Comparação entre o sinal experimental, e os obtidos com as funções semi-seno e Hanning [31]

Na qual:

$F(t)$: representação matemática do carregamento no tempo (N);

CD: coeficiente de defasagem;

K_p : coeficiente de impacto;

P: peso da pessoa (N);

T: período da atividade (s);

T_c : período de contato da atividade (s);

t: tempo (s).

A Figura 11 ilustra os intervalos de tempo aos quais se referem a equação (19).

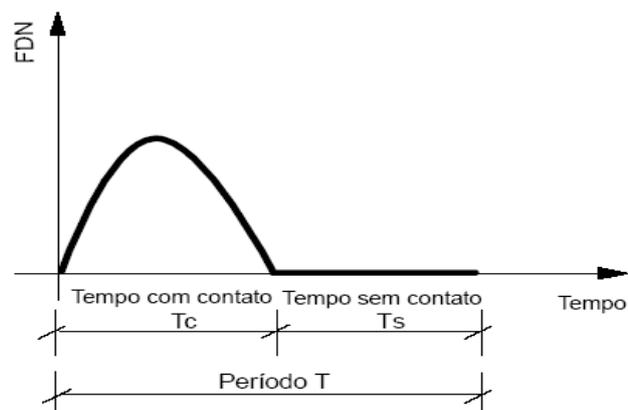


Figura 11 – Intervalos de tempo da função adotada [31]

Dos parâmetros da equação (19), o coeficiente de impacto (K_p), é um coeficiente de majoração da carga, que considera o impacto do salto sobre a estrutura. O coeficiente K_p deve ser obtido calculando-se o pico máximo de cada salto.

A partir das diferentes situações estudadas por Faísca [31] que avaliou a influência da flexibilidade da estrutura nas respostas dinâmicas, foram obtidos diferentes resultados para os parâmetros que caracterizam cada atividade. Na Tabela 3 estão representados os valores considerados para ginástica aeróbica como atividade rítmica. Neste trabalho serão adotados os valores médios.

Tabela 3 – Parâmetros experimentais utilizados [31]

Atividade	T (s)	T _c (s)	K _p
Ginástica Aeróbica	0,44 ± 0,09	0,34 ± 0,09	2,78 ± 0,60

O coeficiente de defasagem (CD) é um coeficiente de ponderação da carga, determinado em função da atividade realizada e do número de pessoas que atuam sobre o piso. Esse parâmetro leva em consideração os efeitos de multidão, ou seja, o grau de sincronismo entre as pessoas que atuam na estrutura. Através dele são consideradas possíveis defasagens, variações de ritmo, etc., que levariam à redução do carregamento.

$$CD = \frac{\text{Pico do sinal da soma}}{\sum_{i=1}^n K_{pi}} \quad (20)$$

A Figura 12 representa o gráfico do coeficiente de defasagem (CD) para três atividades estudadas por Faísca [31], extrapolado para um grande número de pessoas. Isso permite que as cargas possam ser usadas para representar multidões.

Percebe-se, através da Figura 12, que o coeficiente de defasagem não varia muito para a atividade aeróbica como varia para a atividade de saltos à vontade, na medida em que o número de pessoas é aumentado. Isso ocorre porque há um maior sincronismo na atividade aeróbica.

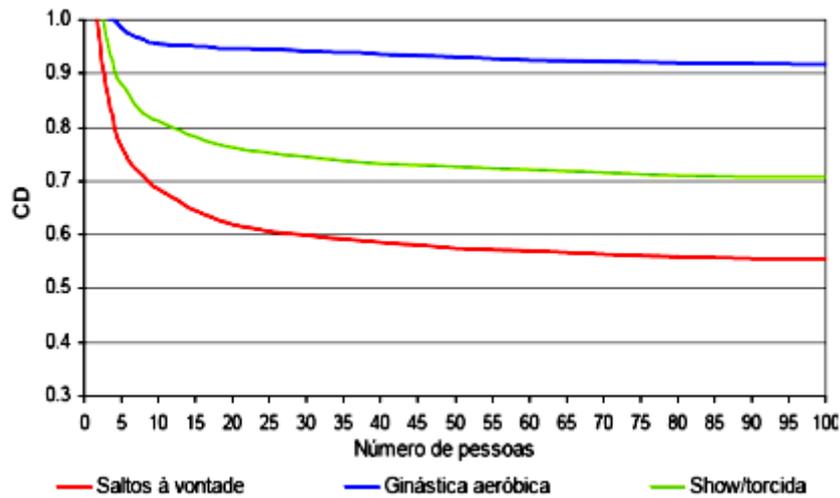


Figura 12 – Coeficientes de defasagem para cada atividade rítmica [31]

Para as análises realizadas neste trabalho, os valores de CD adotados são apresentados na Tabela 4. Estes foram tomados do gráfico com coeficientes propostos apresentado detalhadamente na Figura 12, de acordo com a atividade rítmica executada, que neste trabalho será ginástica aeróbica.

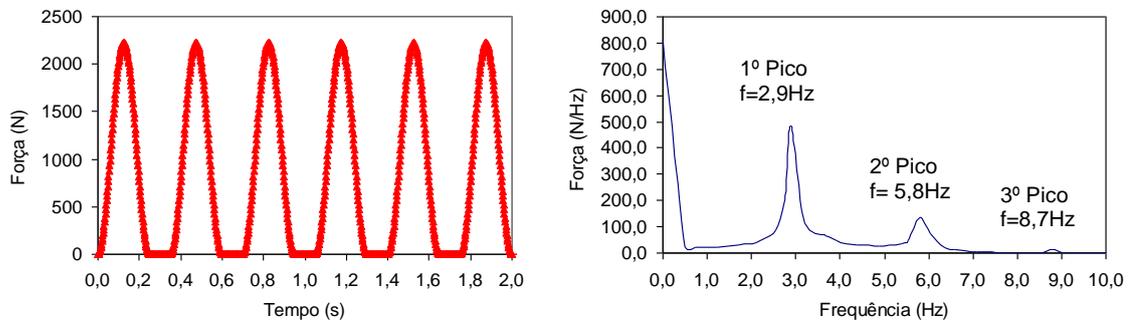
Verifica-se que o gráfico extrapola um grande número de pessoas, mas para a atividade de ginástica aeróbica, os valores não variam muito, pois há um maior sincronismo.

Tabela 4 – Valores do Coeficiente de defasagem obtidos

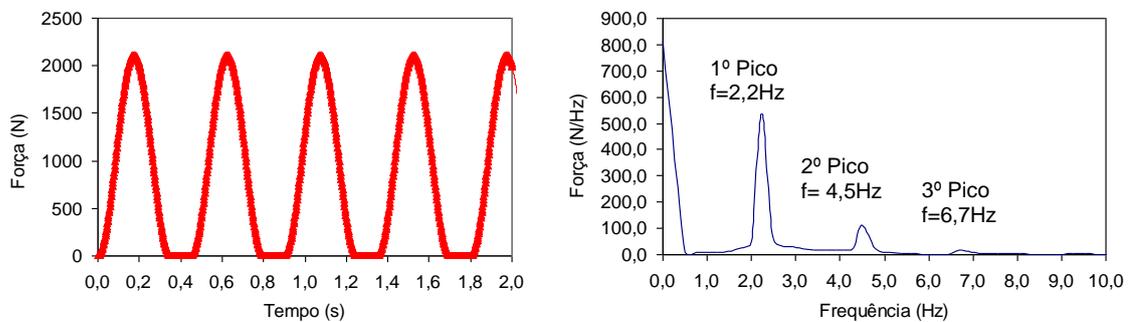
Nº Pessoas	CD
	Ginástica aeróbica
1	1
5	1
9	0,97
11	0,96
13	0,96
16	0,95
25	0,93

De forma a ilustrar a modelagem do tipo de carregamento dinâmico utilizado, ginástica aeróbica, a Figura 13 apresenta exemplos, de maneira geral, de sinais da

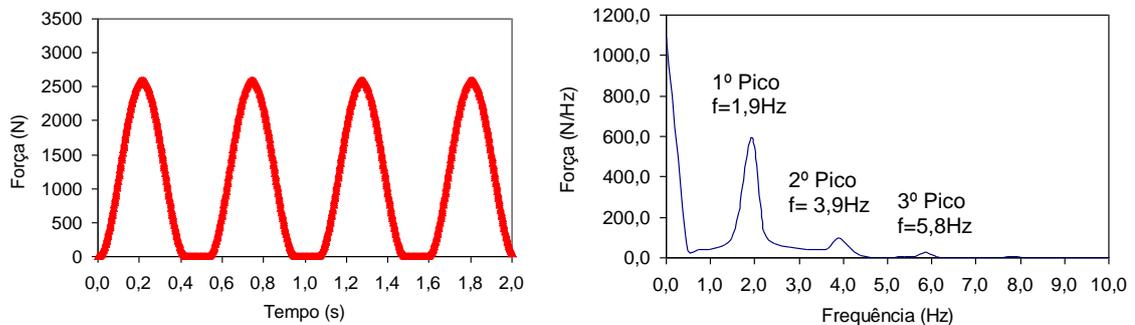
força no tempo e o espectro de frequência da força para diferentes valores dos parâmetros T , T_c , K_p e CD , variando na faixa dos dados experimentais propostos por Faisca [31].



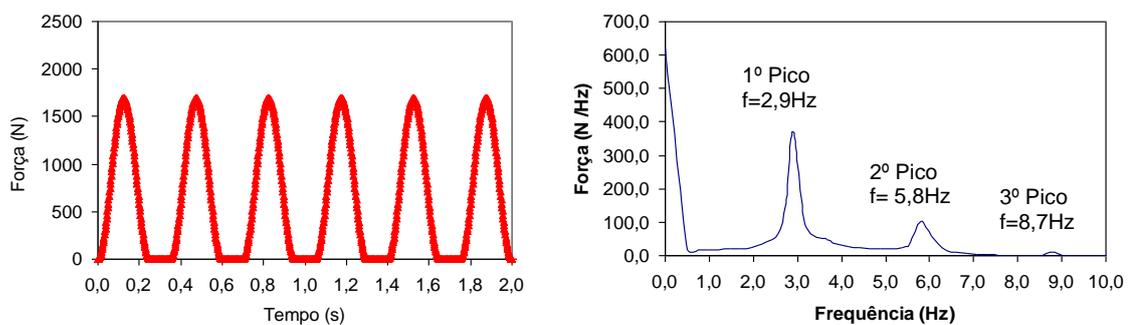
a) $T=0,35\text{s}$, $T_c=0,25\text{s}$, $K_p=2,78$, $CD=1$



b) $T=0,45\text{s}$, $T_c=0,35\text{s}$, $K_p=2,78$, $CD=0,95$



c) $T=0,53\text{s}$, $T_c=0,43\text{s}$, $K_p=3,38$, $CD=0,96$



d) $T=0,35\text{s}$, $T_c=0,25\text{s}$, $K_p=2,18$, $CD=0,97$

Figura 13 – Coeficientes de defasagem para cada atividade rítmica [31]

A Figura 13 apresenta o espectro da carga dinâmica, obtido via emprego da Transformada Rápida de Fourier (TRF). Desta forma, ilustra a função de tempo da carga dinâmica, $F(t)$, e sua respectiva transformada no domínio da frequência, $F(\omega)$.

A ação dinâmica proveniente da ginástica aeróbica apresenta três harmônicos, perfeitamente identificados na Figura 13 de acordo com a variação do período da atividade desenvolvida pelo ser humano sobre o piso. Sendo assim, se considera, por exemplo, $T = 0,35s$, o primeiro harmônico da carga, no domínio da frequência, associa-se ao pico com frequência de 2,9 Hz, de acordo com a Figura 13.

3 DESCRIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL

3.1 Generalidades

Este capítulo apresenta a descrição dos modelos estruturais desenvolvidos utilizados na avaliação estática e dinâmica. Serão descritas as características de cada modelo com as propriedades físicas e geométricas, os carregamentos adotados e o sistema estrutural utilizado nos modelos das lajes nervuradas estudadas.

A análise dos elementos estruturais por meio de métodos numéricos é muito utilizada nos escritórios de projeto. O auxílio de *softwares* tem possibilitado uma análise mais refinada de melhor precisão além da necessidade de verificação das diversas possibilidades e viabilidades econômicas.

Bocchi Jr [7] verificou a necessidade de racionalização na construção civil com a minimização de custo e prazos, utilizando as lajes nervuradas como uma opção rentável. Com esse crescente aumento procurou-se a necessidade de estudos para maior entendimento dos resultados de análise e também aumentar a confiabilidade desse tipo de laje.

Assim, com o desenvolvimento computacional, aumentam as possibilidades de verificação de algumas análises em projeto que antes eram negligenciadas nos cálculos tornando o comportamento dos elementos estruturais mais próximos do real.

3.2 Sistema Construtivo

A qualidade e o desempenho estrutural das lajes nervuradas dependem também de como é desenvolvido todo o processo construtivo.

Para o sistema construtivo das lajes nervuradas é necessário o uso de fôrmas, escoramentos e material de enchimento. Para fôrmas e escoramentos deve-se atentar para o nivelamento e o acerto do piso que serve de apoio, como também

para as distâncias entre as escoras. Na colocação dos elementos de enchimento, deve-se tomar cuidado para que as distâncias definidas em projeto e alinhamentos sejam atendidas. Nas armaduras, é importante garantir o posicionamento adequado para evitar o deslocamento no momento do lançamento e vibração do concreto.

3.3 Propriedades físicas e geométricas

3.3.1 Concreto

Nas análises, o concreto foi considerado com resistência característica à compressão (f_{ck}), aos 28 dias, de 30 MPa e o coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2, adotado de acordo com a item 8.2.9 da NBR 6118:2007 [8].

3.3.2 Módulo de elasticidade

Segundo NBR 6118:2007 [8] o módulo de elasticidade a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para a determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites, deve ser o módulo secante, dado por:

$$E_{cs} = 0,85 \times E_c \text{ [MPa]} \quad (21)$$

Em que:

E_{cs} : módulo de elasticidade secante do concreto;

E_c : módulo de elasticidade tangente do concreto;

f_{ck} : resistência característica do concreto à compressão.

O módulo de elasticidade secante será descrito conforme Equação 22.

$$E_{cs} = 0,85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}} \text{ [MPa]} \quad (22)$$

A consideração de apenas 85% do módulo de elasticidade tangente do concreto é uma forma de compensar os efeitos da deformação lenta nas peças de concreto. Neste trabalho, para o módulo de elasticidade secante (E_{cs}), adotou-se 26,1 GPa.

3.3.3 Peso específico

Neste trabalho foi adotado o peso específico de 25 kN/m³, de acordo com o item 8.2.8 da norma NBR 6118:2007 [8].

3.3.4 Vigas de Bordo

No estudo das lajes nervuradas, neste trabalho são consideradas as inércias das vigas de bordo e sua influência na análise das cargas estáticas e dinâmicas distribuídas nos modelos conforme Figura 14. A influência está relacionada a excentricidade existente entre os centróides das nervuras, lajes e vigas de bordo. Dessa forma, foram utilizadas vigas de bordo com alturas de 0,50 m a 1,00 m, variando de 5 cm em 5 cm.



Figura 14 – Excentricidade existente entre vigas de bordo e laje nervurada [19]

3.4 Modelo Estrutural Investigado

O Modelo I consiste de uma laje nervurada de concreto armado, quadrada, com 8,5 m x 8,5 m simplesmente apoiada semelhante ao modelo representado pelo ALTO QI [37]. A Figura 15 ilustra as características geométricas do modelo estrutural da laje nervurada de concreto armado estudada. Nesse modelo foi estudado o efeito de excentricidade laje-nervura considerando-se, inicialmente, um modelo numérico mais simples onde a laje de concreto é discretizada por elementos de casca e as nervuras por elementos de viga tridimensionais. Este modelo difere dos demais em características geométricas, pois foi o primeiro modelo a ser estudado.

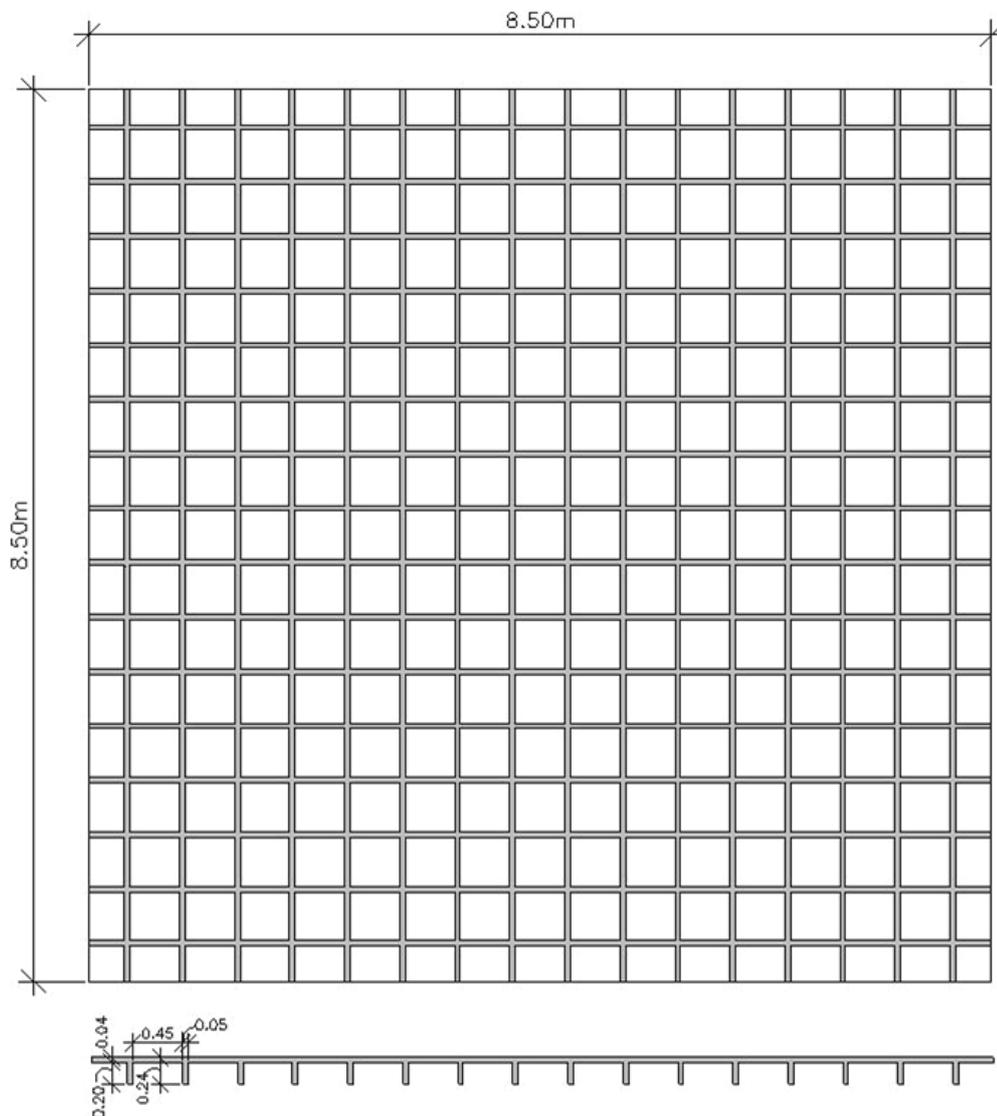


Figura 15 – Vista da geometria do Modelo I

A Figura 16 ilustra as características geométricas dos demais modelos estruturais da laje nervurada de concreto armado estudada. Esses modelos diferem nos comprimentos e larguras (conforme Figura 16 as dimensões A e B) e apresentam as mesmas características geométricas (altura, base e distância entre as nervuras e espessura da mesa). Dessa forma será possível analisar e comparar os resultados obtidos conforme limite da NBR 6118:2007 [8].

O Modelo II consiste de uma laje nervurada de concreto armado, quadrada, com dimensões $A=8,50$ m e $B=8,50$ m. O Modelo III consiste de uma laje nervurada de concreto armado, quadrada, com $A=9,50$ m e $B=9,50$ m. Os Modelos IV e V possuem dimensões de $10,50$ m x $10,50$ m e $11,50$ m x $11,50$ m, respectivamente.

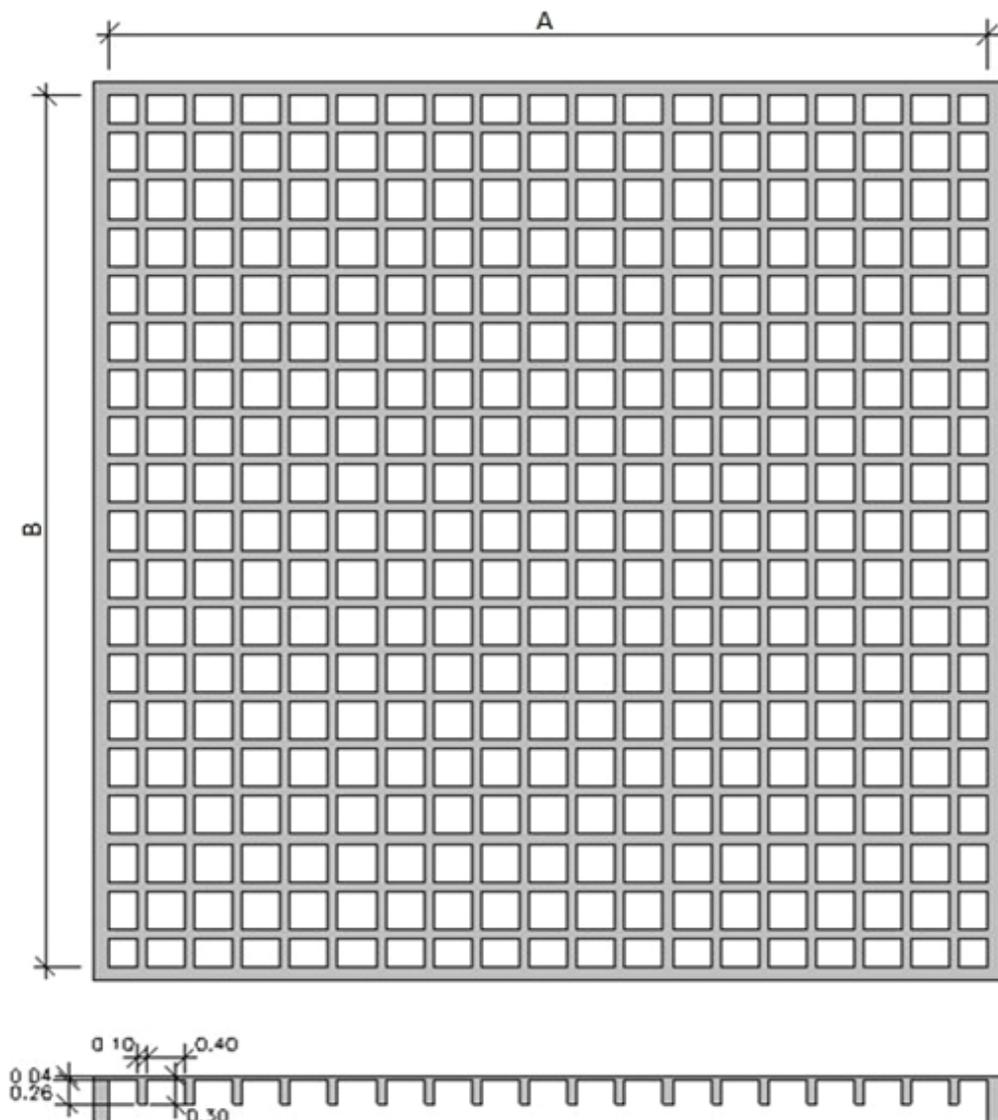


Figura 16 – Vista em Planta da geometria do Modelos

3.4.1 Ações Estáticas

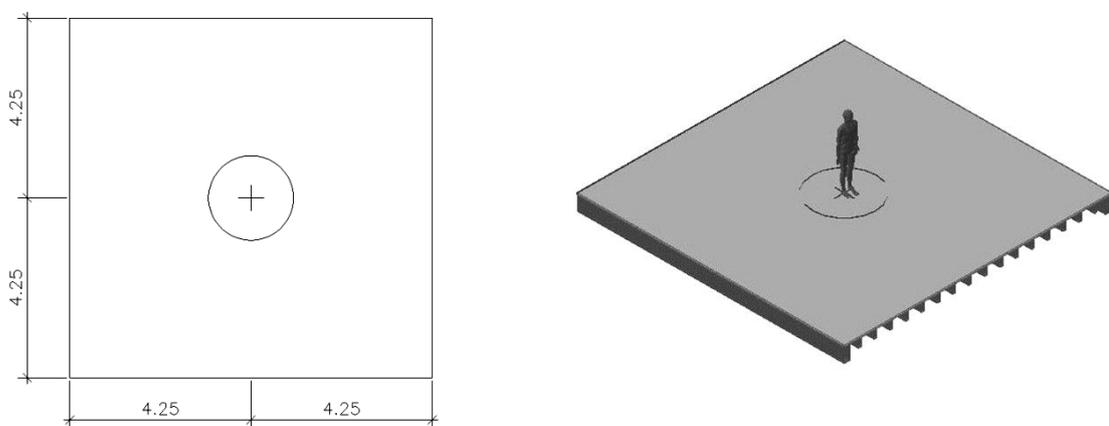
Os modelos estudados foram submetidos a dois tipos de carregamentos: o carregamento estático e o carregamento dinâmico.

No carregamento estático foram adotadas carga permanente e carga acidental correspondente a funcionalidade do piso estudado. Para a carga permanente foi adotado revestimento de $1,0 \text{ kN/m}^2$ e carga acidental de 5 kN/m^2 (NBR 6120:1980) [30]. O peso próprio foi calculado considerando-se um peso específico de 25 kN/m^3 .

3.4.2 Ações Dinâmicas

Para a análise do carregamento dinâmico representado por atividades humanas considera-se o peso médio do indivíduo de 800 N . Foram aplicados nos modelos, carregamentos correspondentes a 1 pessoa, 5 pessoas, 9 pessoas, 11 pessoas, 13 pessoas, 16 pessoas e 25 pessoas. Sendo que o número máximo de pessoas que ocuparam as lajes variará com as dimensões do modelo.

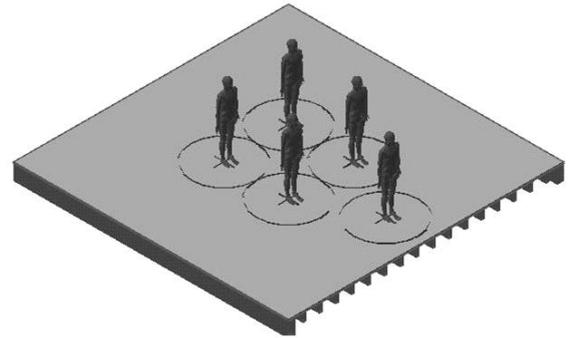
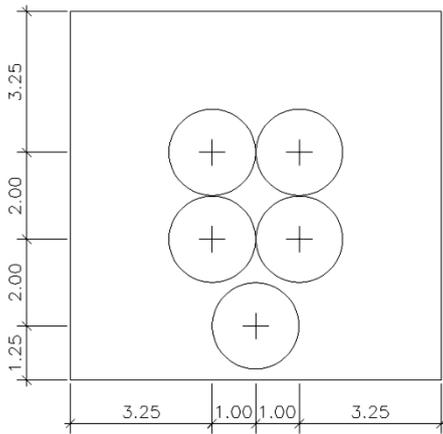
As Figuras 17 a 38 a seguir ilustram a distribuição em metros de todos os carregamentos correspondentes a cada modelo estudado. Os Modelos II e Modelos III apresentam distribuição semelhante modificando os vãos que são $(8,50 \times 8,50) \text{ m}$ e $(9,50 \times 9,50) \text{ m}$ respectivamente.



a) Planta referente a 1 pessoa

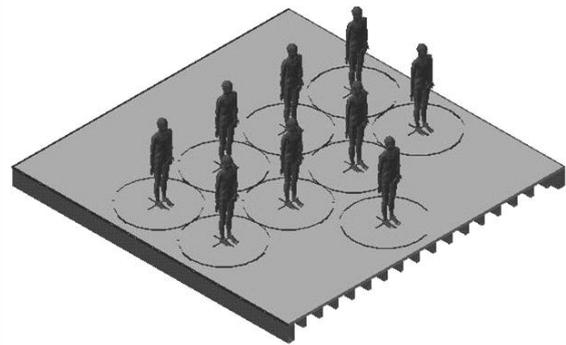
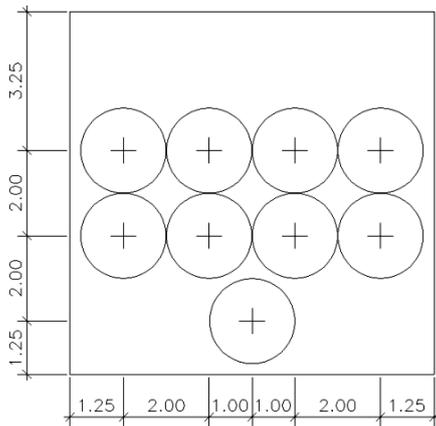
b) Perspectiva referente a 1 pessoa

Figura 17 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 1 PESSOA



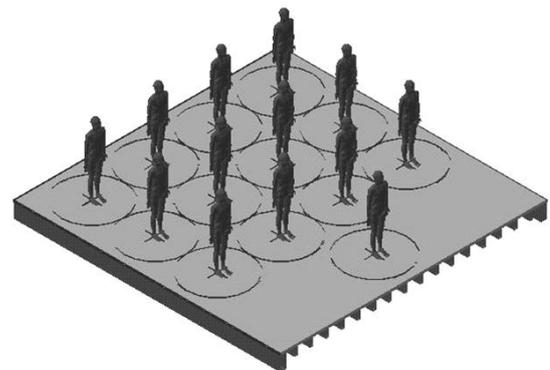
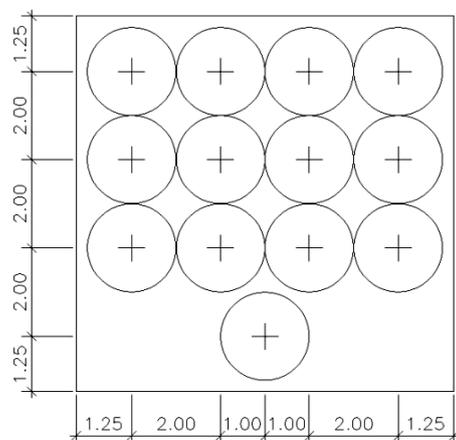
a) Planta referente a 5 pessoas

b) Perspectiva referente a 5 pessoas

Figura 18 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 5 PESSOAS

a) Planta referente a 9 pessoas

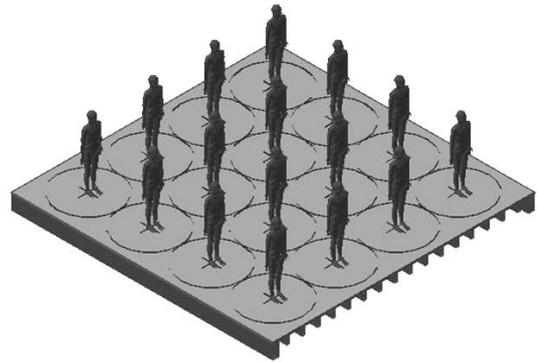
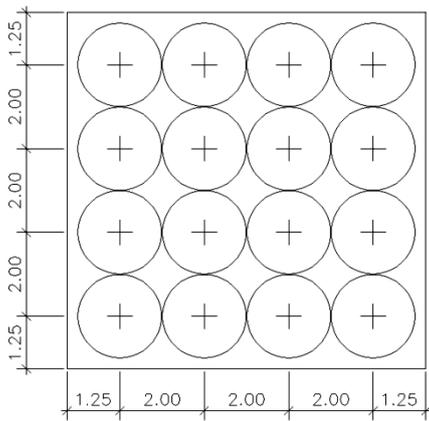
b) Perspectiva referente a 9 pessoas

Figura 19 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 9 PESSOAS

a) Planta referente a 13 pessoas

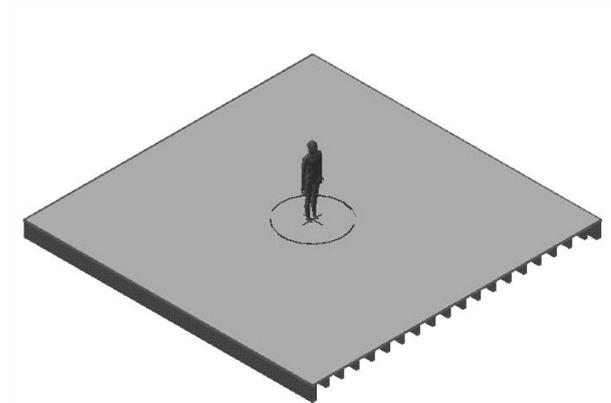
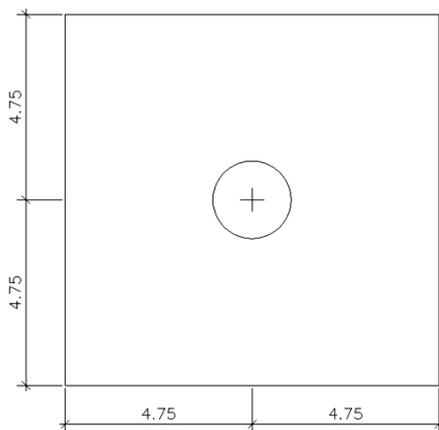
b) Perspectiva referente a 13 pessoas

Figura 20 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 13 PESSOAS



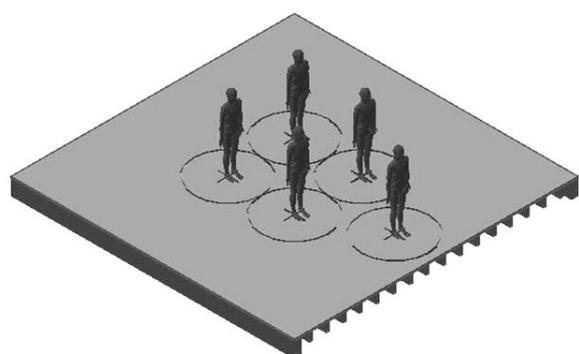
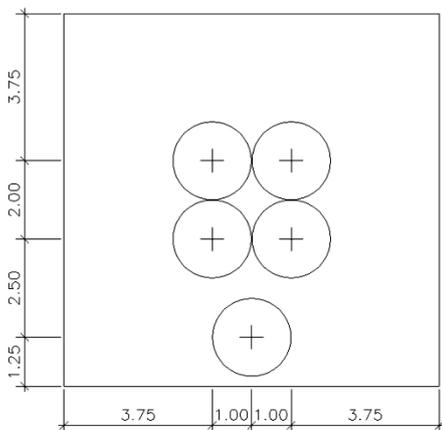
a) Planta referente a 16 pessoas

b) Perspectiva referente a 16 pessoas

Figura 21 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo II – 16 PESSOAS

a) Planta referente a 1 pessoa

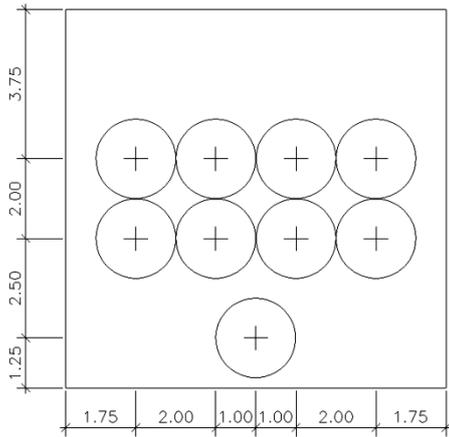
b) Perspectiva referente a 1 pessoa

Figura 22 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 1 PESSOA

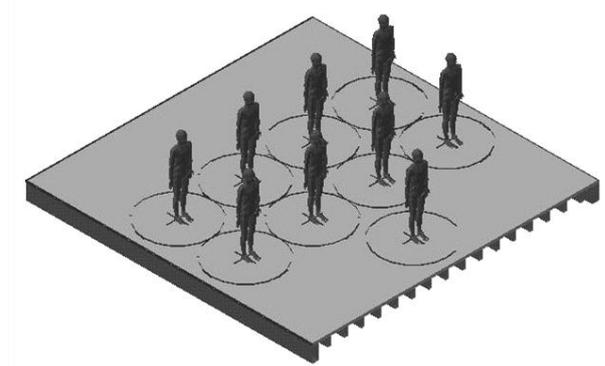
a) Planta referente a 5 pessoas

b) Perspectiva referente a 5 pessoas

Figura 23 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 5 PESSOAS

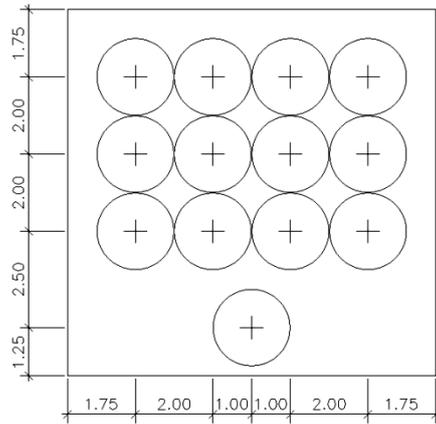


a) Planta referente a 9 pessoas

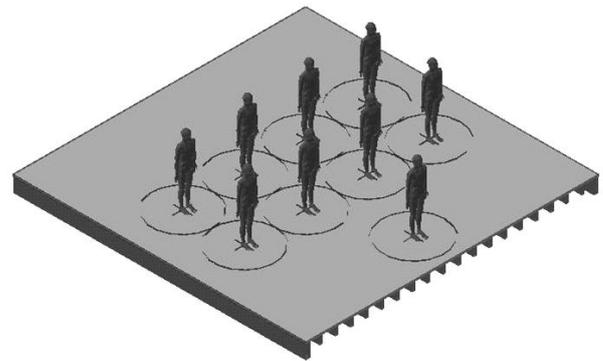


b) Perspectiva referente a 9 pessoas

Figura 24 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 9 PESSOAS

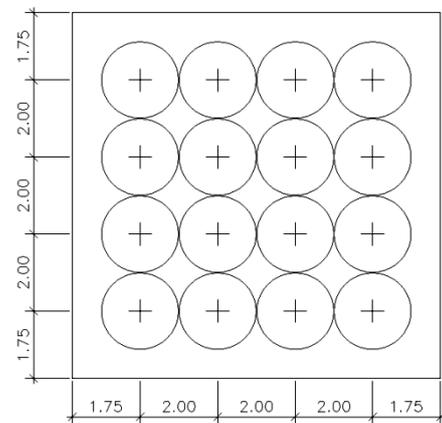


a) Planta referente a 13 pessoas

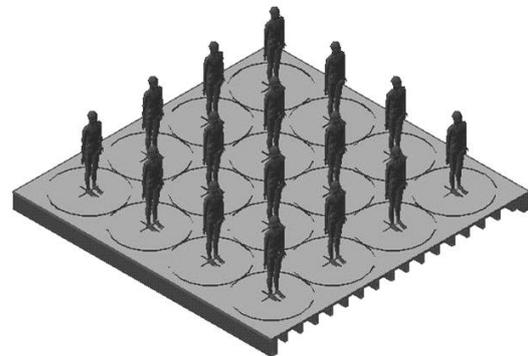


b) Perspectiva referente a 13 pessoas

Figura 25 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 13 PESSOAS

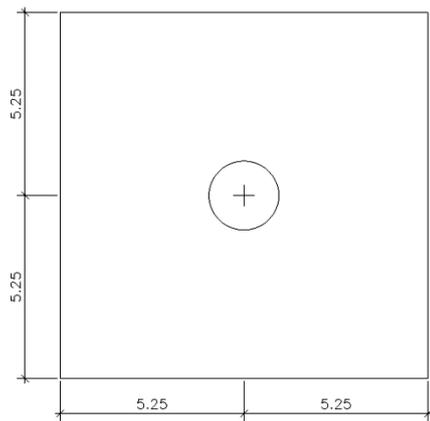


a) Planta referente a 16 pessoas

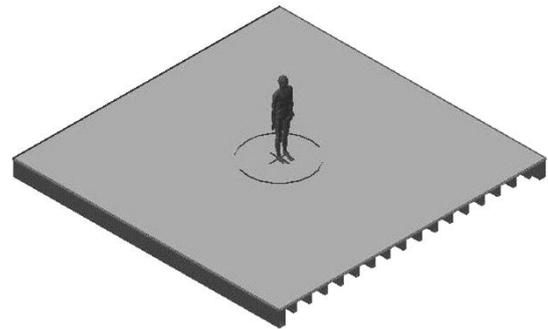


b) Perspectiva referente a 16 pessoas

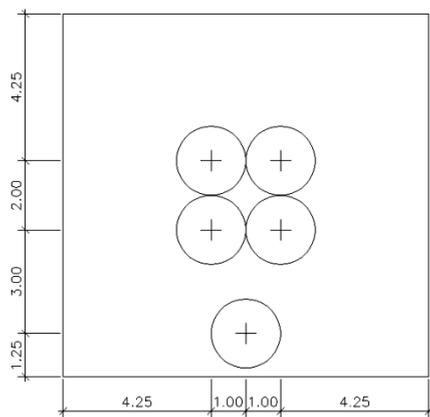
Figura 26 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo III – 16 PESSOAS



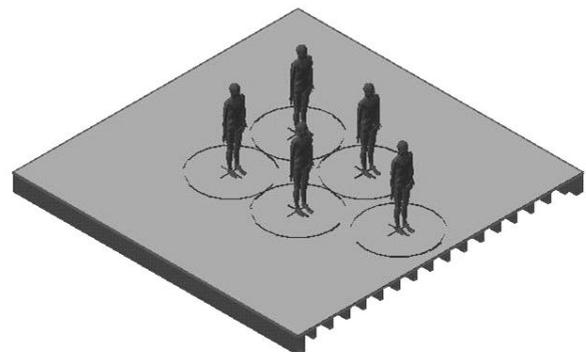
a) Planta referente a 1 pessoa



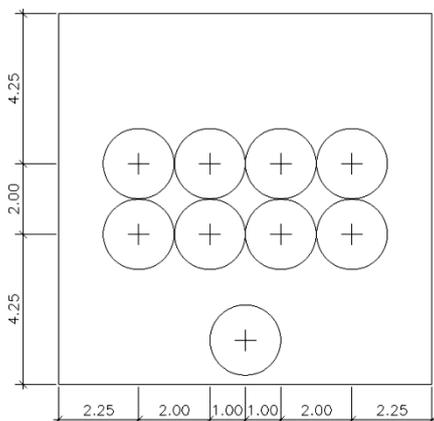
b) Perspectiva referente a 1 pessoa

Figura 27 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 1 PESSOA

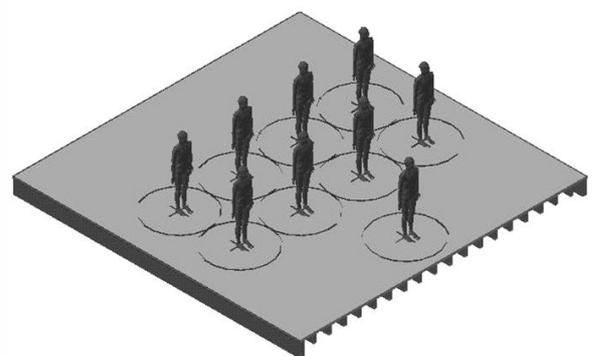
a) Planta referente a 5 pessoas



b) Perspectiva referente a 5 pessoas

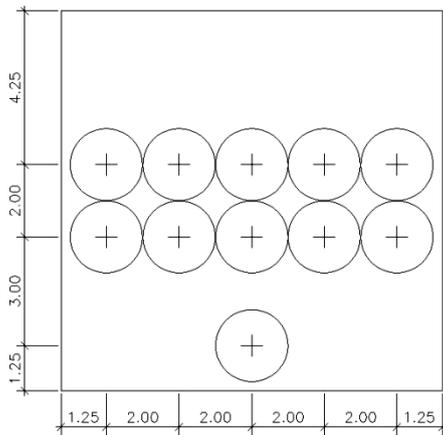
Figura 28 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 5 PESSOAS

a) Planta referente a 9 pessoas

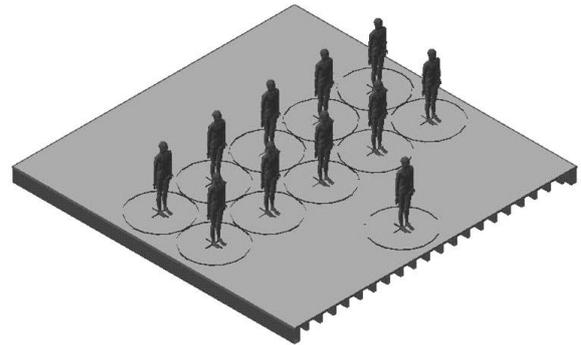


b) Perspectiva referente a 9 pessoas

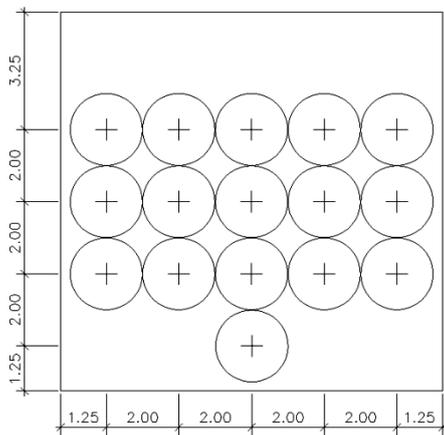
Figura 29 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 9 PESSOAS



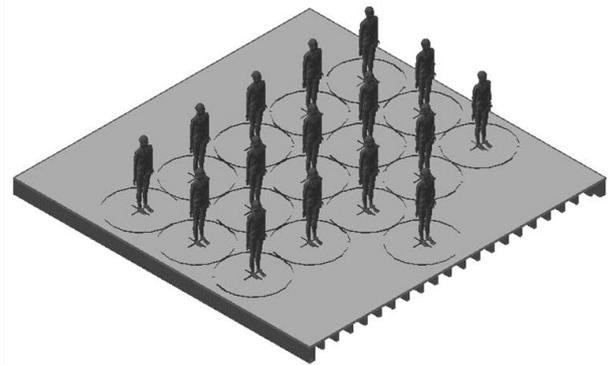
a) Planta referente a 11 pessoas



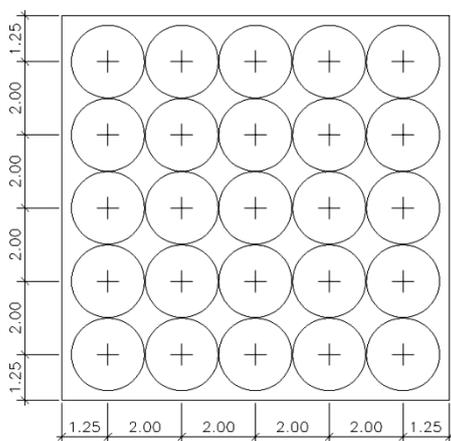
b) Perspectiva referente a 11 pessoas

Figura 30 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 11 PESSOAS

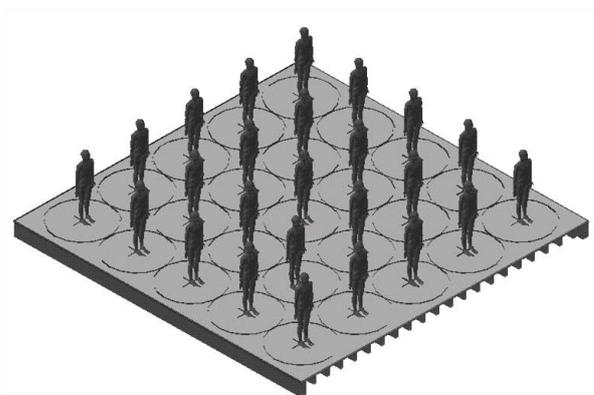
a) Planta referente a 16 pessoas



b) Perspectiva referente a 16 pessoas

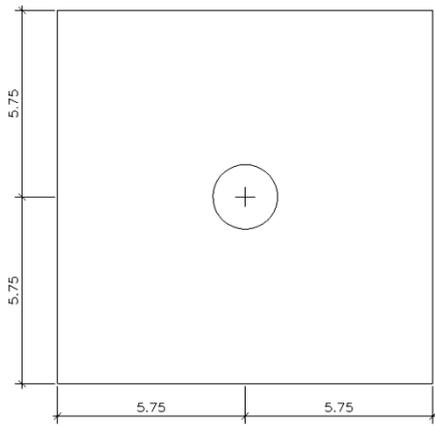
Figura 31 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 16 PESSOAS

a) Planta referente a 25 pessoas

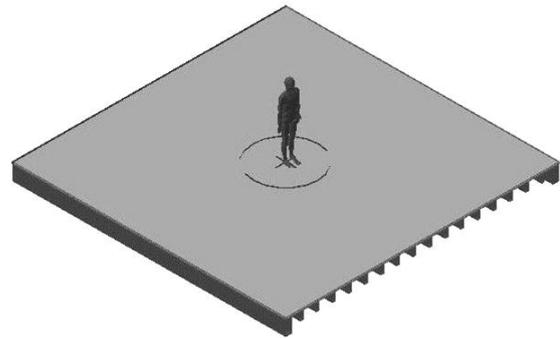


b) Perspectiva referente a 25 pessoas

Figura 32 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo IV – 25 PESSOAS

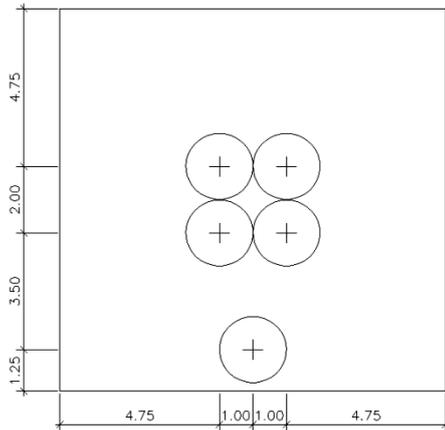


a) Planta referente a 1 pessoa

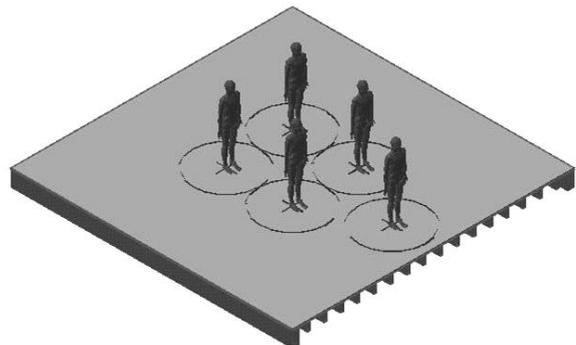


b) Perspectiva referente a 1 pessoa

Figura 33 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 1 PESSOA

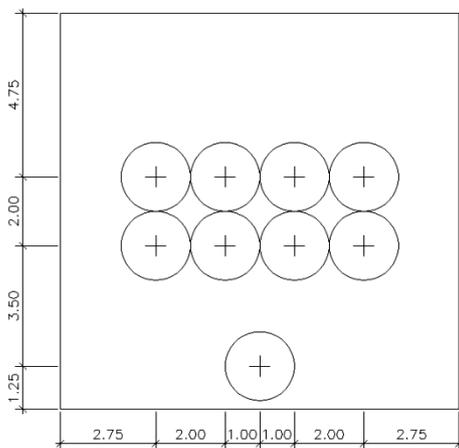


a) Planta referente a 5 pessoas

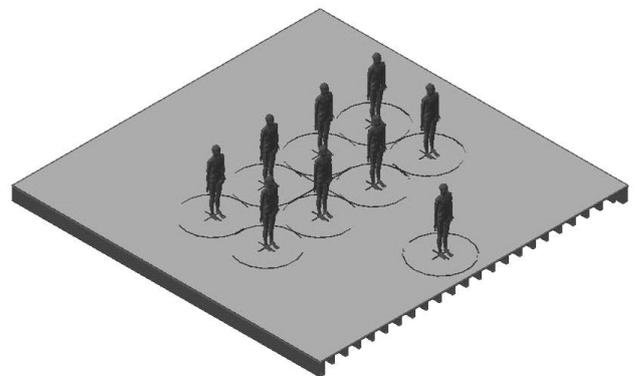


b) Perspectiva referente a 5 pessoas

Figura 34 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 5 PESSOAS

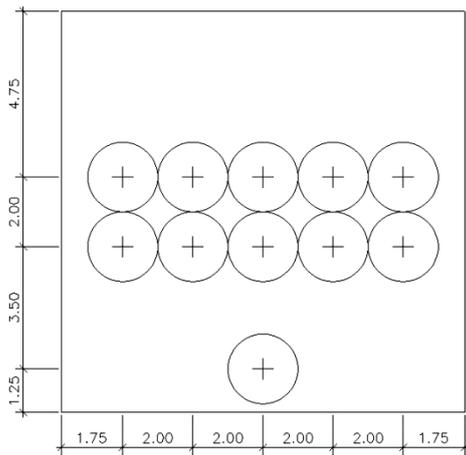


a) Planta referente a 9 pessoas

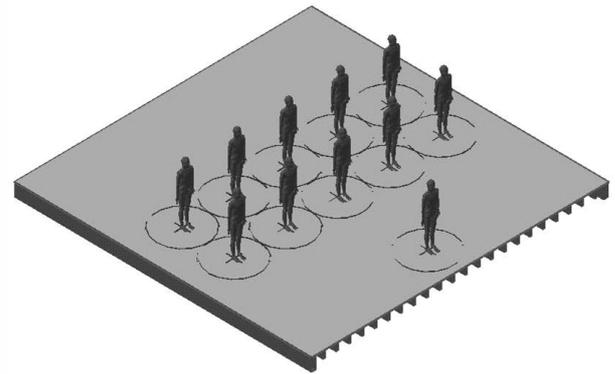


b) Perspectiva referente a 9 pessoas

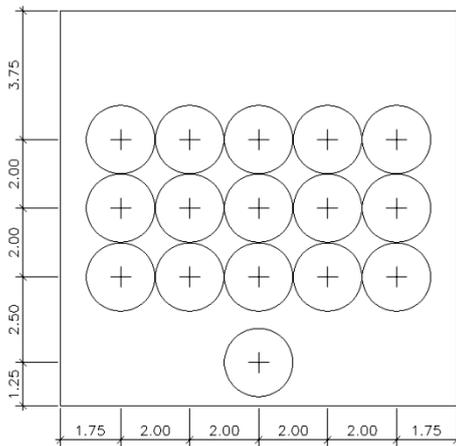
Figura 35 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 9 PESSOAS



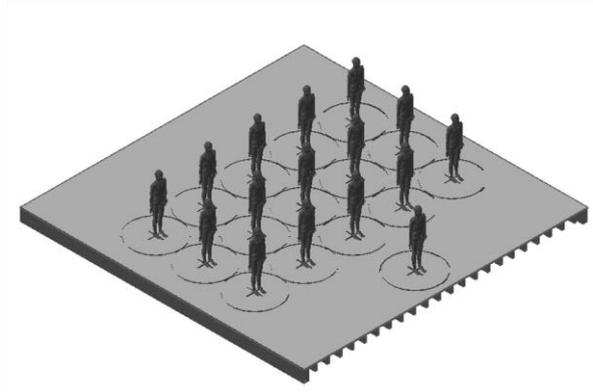
a) Planta referente a 11 pessoas



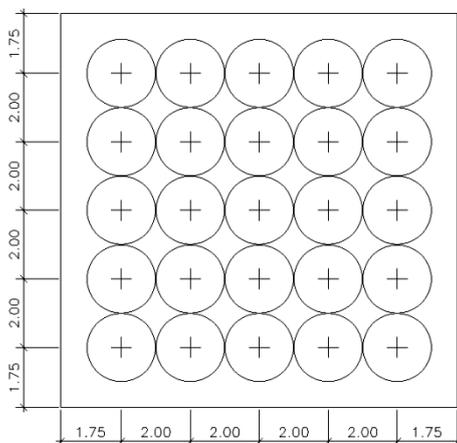
b) Perspectiva referente a 11 pessoas

Figura 36 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 11 PESSOAS

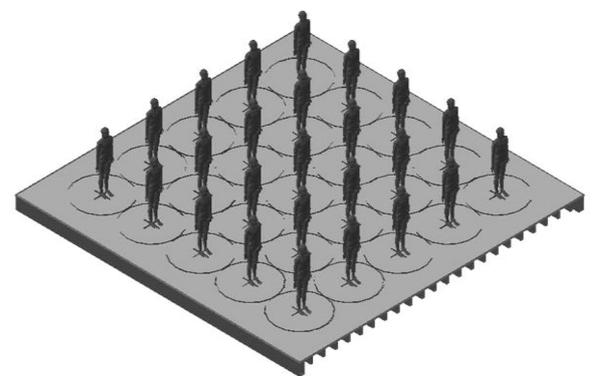
a) Planta referente a 16 pessoas



b) Perspectiva referente a 16 pessoas

Figura 37 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 16 PESSOAS

a) Planta referente a 25 pessoas



b) Perspectiva referente a 25 pessoas

Figura 38 – Distribuição dos carregamentos aplicados no Modelo V – 25 PESSOAS

4 MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

4.1 Generalidades

A modelagem computacional utilizada como ferramenta nas análises numéricas pode expressar uma realidade mais aproximada dos sistemas de lajes estruturais. O método dos elementos finitos é o método numérico mais utilizado na análise estrutural, pois é capaz de ser aplicado a diversos tipos de estruturas com resultados satisfatórios. Portanto, neste estudo, serão aplicadas nos exemplos numéricos das lajes nervuradas, técnicas usuais de discretização, via método dos elementos finitos (MEF), por meio do programa Ansys [25].

Algumas características sobre o MEF a serem citadas. (Campos e Silva [34]):

- a) O campo contínuo ou domínio é subdividido em células, chamados elementos, os quais formam uma malha. Os elementos possuem uma forma triangular, quadrilateral ou cúbica, podendo ser retilíneos ou curvos.
- b) A solução do problema é assumida, a priori, para ter uma forma descrita. A solução tem que pertencer a um espaço de funções variando linearmente ou quadraticamente entre os valores dos pontos nodais. Esses pontos referem-se aos vértices, aos pontos médios dos lados e aos pontos médios do elemento. Assim, a representação da solução fica vinculada a representação geométrica do domínio.
- c) A procura por uma solução integral da equação diferencial parcial. Em uma forma mais geral, a formulação integral é obtida a partir da formulação residual ponderada. Por esta formulação, o método adquire a capacidade para incorporar naturalmente condições de contorno do tipo diferencial. Esta propriedade constitui a segunda importante vantagem do MEF, a qual não é partilhada por nenhum outro método. A combinação da representação da solução num dado espaço de funções com a formulação tratando rigorosamente as condições de contorno, dá ao método, uma fundamentação matemática extremamente rigorosa e robusta e permite, por exemplo, uma boa precisão.

O processamento de uma estrutura através de um *software* baseado na teoria do MEF possui de acordo com Coimbra [19], a sequência abaixo:

- Modelagem: consiste no desenho em CAD da estrutura a ser calculada. Pode ser executado no próprio programa ou importado de outros via desenho ou texto;
- Malha de elementos finitos: consiste na discretização da estrutura, ou seja, a sua divisão em elementos conectados por nós;
- Condições de contorno:
 - a) Restrições: definem como a estrutura relaciona-se com o meio ambiente (engastamentos);
 - b) Carregamentos: definem as solicitações às quais a estrutura está submetida (forças nodais, pressões, momentos, carga térmica, etc.).
- Propriedades do material: definição das características físicas do material a ser utilizado na estrutura (módulo de elasticidade, densidade, coeficiente de Poisson);
- Processamento: montagem da matriz de rigidez e cálculo dos deslocamentos nodais e tensões;
- Deslocamentos: a estrutura pode ser visualizada deformada e também se pode conhecer os deslocamentos individuais de cada nó;
- Tensões: as tensões podem ser visualizadas (na forma de mapas de cores) nas direções principais e secundárias com valores máximos e mínimos.

A aplicação clássica do MEF na solução de problemas estende-se em várias áreas da engenharia tais como engenharia mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial, onde são necessárias análises das estruturas e peças mecânicas de máquinas, automóveis, caminhões, navios, aviões e espaçonaves. Nesse aspecto, é utilizado como uma poderosa ferramenta na análise de diversos fenômenos físicos, e no projeto e análise de diversos equipamentos, dispositivos e processos industriais. Na área da mecânica dos sólidos, por exemplo, podem ser realizadas: análise estática, análise modal (problemas de autovalor e autovetor, para estudo de vibrações e instabilidade estrutural) e análise dinâmica.

As análises que podem ser executadas pelo MEF abrangem várias áreas de aplicação dentre as quais se pode citar: transferência de calor, eletroestática, eletromagnetismo, acústica, fadiga, mecânica da fratura, hidráulica, hidrodinâmica, aerodinâmica, biomecânica, lubrificação, problemas de interação fluido-estrutura, problemas de propagação de ondas, dispersão de contaminantes, etc.

4.2 Descrição dos Elementos Utilizados na Análise

Os modelos foram elaborados com o auxílio do *software* Ansys [25]. Ao longo da análise foi considerado um comportamento elástico-linear para o material concreto armado.

Neste trabalho foram utilizados dois elementos para análise. O elemento Beam 44 e o elemento Shell63. O Beam44 é um elemento uniaxial, linear com capacidades de atuar na tração, compressão, torção e flexão. Este elemento possui seis graus de liberdade em cada nó, ou seja: 3 translações referentes às direções x , y e z , além de 3 rotações em torno dos eixos cartesianos. A orientação do elemento vai do nó I para o nó J, estando orientado sobre o eixo x . Os eixos principais y e z podem ser visualizados na Figura 39.

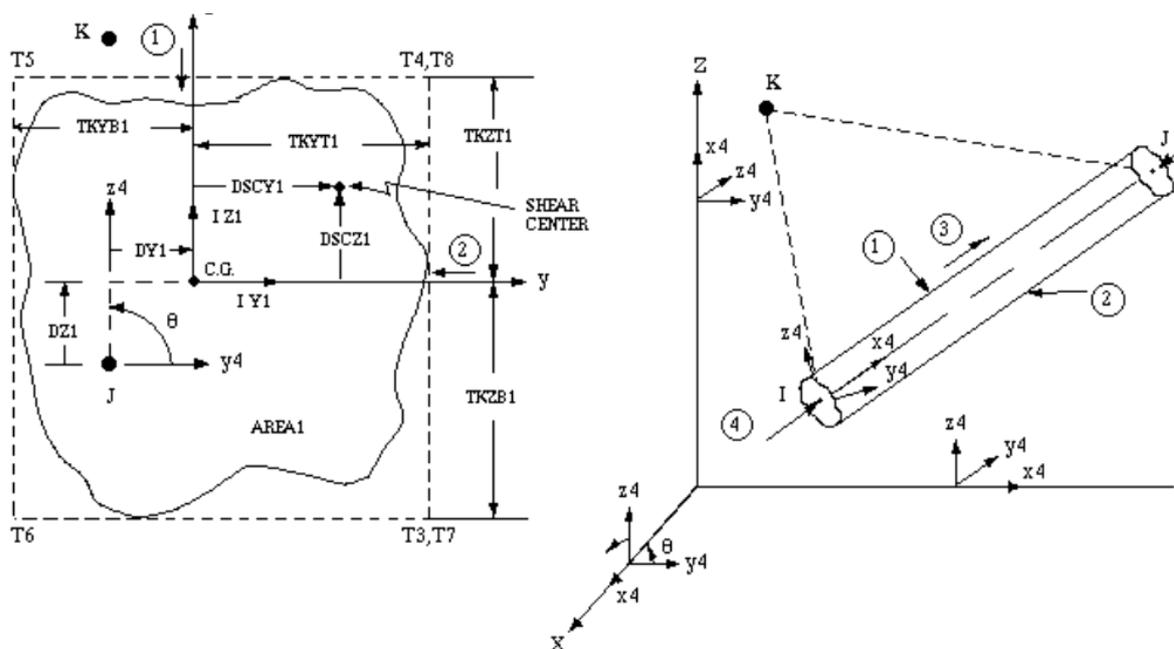


Figura 39 – Elemento BEAM44 [25]

O elemento Shell63 é definido por quatro nós. Este elemento considera efeitos de membrana e/ou flexão. O elemento possui seis graus de liberdade por nó sendo três translações e três rotações nas direções x , y e z que podem ser visualizados na Figura 40.

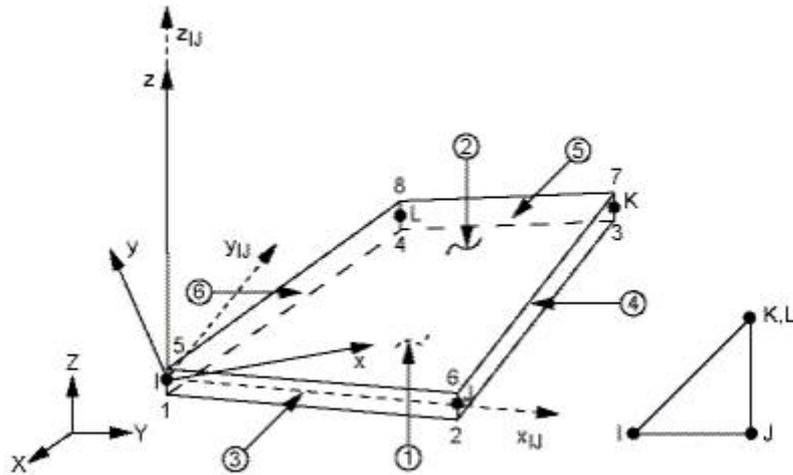


Figura 40 – Elemento Shell63 [25]

O elemento Beam44 foi utilizado para discretizar a laje nervurada em que as nervuras estão representadas em elementos de viga com seções transversais retangulares e as mesas, através de elementos de placa conforme Figura 41. Dessa forma, foi possível a verificação das situações distintas na avaliação da excentricidade laje-nervura do Modelo I. Uma das vantagens do elemento Beam44 é considerar as diferenças existentes entre as distâncias dos eixos dos centróides das nervuras e o centróide da laje, que nas análises feitas, apresentam uma influência significativa nos resultados.

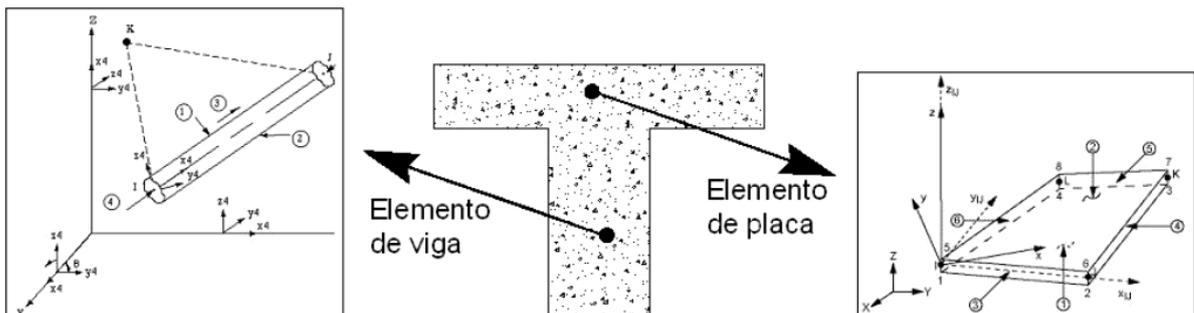


Figura 41 – Elemento Beam44 e Shell63 [19]

Na Figura 42 pode ser visualizado um dos modelos elaborados na análise do trabalho utilizando o *software* Ansys [25]. Neste modelo, foi utilizado o comando */eshape* para mostrar as nervuras que foram modeladas como elementos de viga.

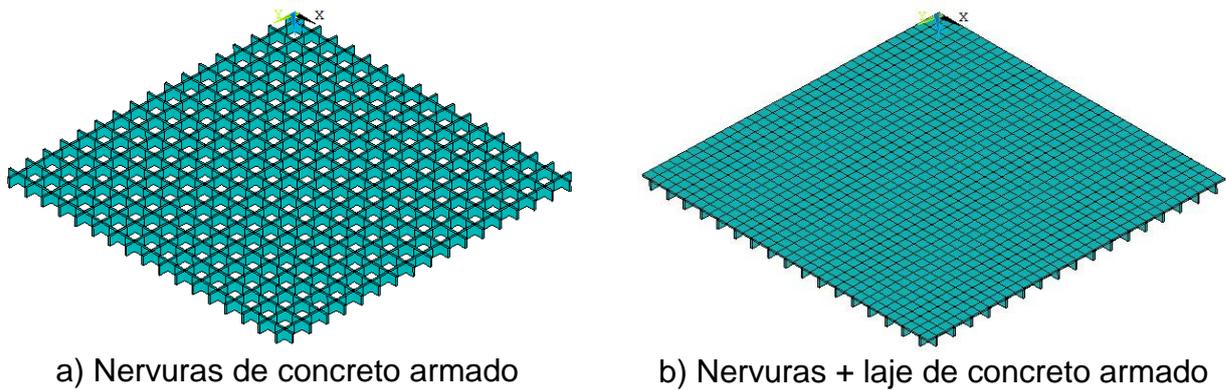


Figura 42 – Modelo elaborado em elementos finitos

4.3 Modelagem Computacional

Para o pré-dimensionamento das lajes foi utilizada a teoria adotada por Araújo [29]. Na modelagem das lajes nervuradas de concreto armado deste trabalho foram admitidas as distâncias entre os eixos das nervuras de 50 cm e altura total de 30 cm.

Nesse estudo foi adotado como altura inicial, viga de bordo com 50 cm. Em seguida, foram elaborados modelos variando as alturas dessas vigas em 5 cm até atingirem a altura máxima de 100 cm. Dessa forma, foi possível estudar o comportamento dinâmico das lajes nervuradas variando a altura e as bases das vigas de bordo para uma laje com mesmo comprimento e largura.

A Tabela 5 apresenta uma média do número de equações de equilíbrio, número de elementos e número de nós para os modelos estruturais estudados.

Tabela 5 – Características dos modelos

Modelos	Número de equações	Número de elementos	Número de nós
8,50 x 8,50	5160	1080	862
9,50 x 9,50	6216	1320	1038
10,50 x 10,50	7368	1584	1230
11,50 x 11,50	8616	1872	1438

No modelo em que foi estudada a excentricidade das lajes-nervuras, foram utilizados os elementos Beam44 e Shell63. Nos demais modelos, em que o comportamento gerado pela excentricidade ocorre naturalmente entre os elementos estruturais (nervuras, lajes e vigas), foram considerados apenas o elemento Shell63.

Em relação às restrições de apoio foram adotados nas quatro extremidades dos modelos. Esses apoios são rígidos restringindo as translações nas três direções (x, y e z).

Com exceção do Modelo I que foi utilizado para representar o estudo da excentricidade em lajes nervuradas, todos os modelos elaborados neste trabalho possuem características geométricas semelhantes, variando apenas as dimensões de comprimento e largura.

A Figura 43 apresenta o modelo estrutural discretizado em elementos finitos, utilizando o programa computacional Ansys [25]. A escolha de discretização da Figura 46 levou em consideração a certeza de uma boa distribuição da malha, no que tange à resposta dinâmica da estrutura investigada (deslocamento, esforços, frequências naturais e modos de vibração).

Com base em ensaios numéricos realizados em trabalhos de pesquisas anteriores [19][23], a dimensão da malha de elementos finitos adotada para este trabalho de pesquisa foi de 0,25m (25 cm), no que diz respeito aos elementos estruturais associados às vigas e lajes.

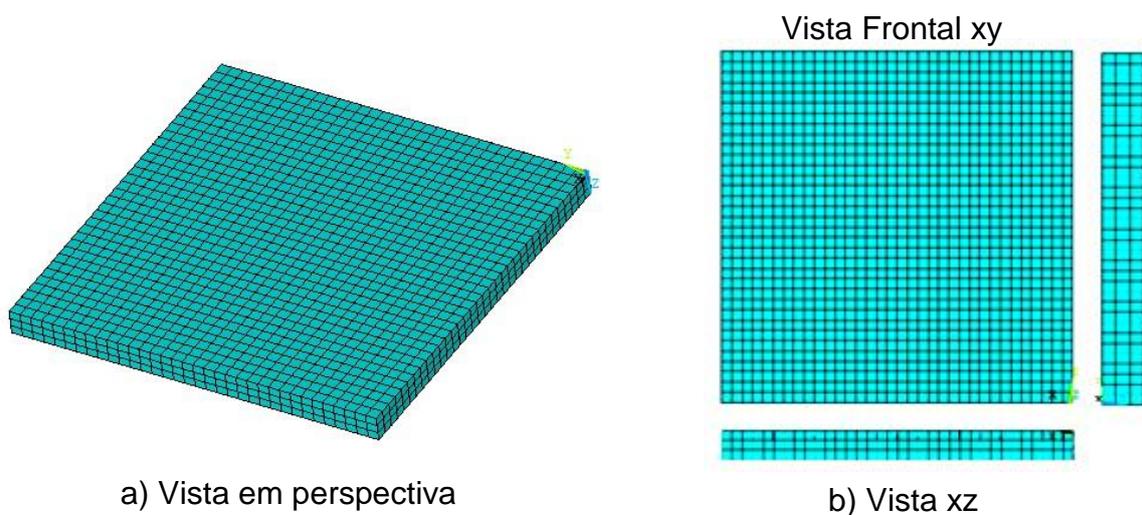


Figura 43 – Malha de elementos finitos correspondente aos Modelos Estruturais

4.4 Esquema de aplicação de cargas estáticas e dinâmicas

4.4.1 Cargas estáticas

As cargas estáticas foram aplicadas em toda a área da laje como cargas distribuídas conforme Capítulo 3.

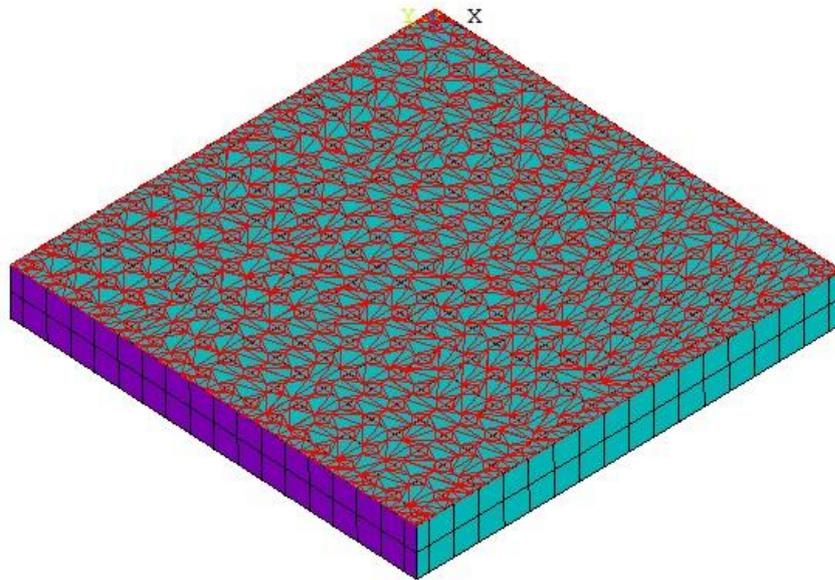


Figura 44 – Exemplo de distribuição de cargas estáticas na laje com viga de bordo com altura de 0,50 m

4.4.2 Cargas dinâmicas

Neste trabalho foram considerados diversos casos de carregamento. A distribuição varia, em cada caso, com o posicionamento do carregamento onde as cargas são aplicadas. Esse posicionamento e distribuição levam em consideração as dimensões das lajes estudadas e a taxa de ocupação de 0,25 pessoas/m² Bachmann [35].

Nesta investigação foram aplicados carregamentos dinâmicos sobre os modelos estruturais correspondentes a 1 pessoa, 5 pessoas, 9 pessoas, 11

peçoas, 13 peçoas, 16 peçoas e 25 peçoas, conforme o caso de carregamento, como ilustrado da Figura 17 a 38 do capítulo 3. Foi considerado, ainda, o peso médio de uma peçoas sendo igual a 800N.

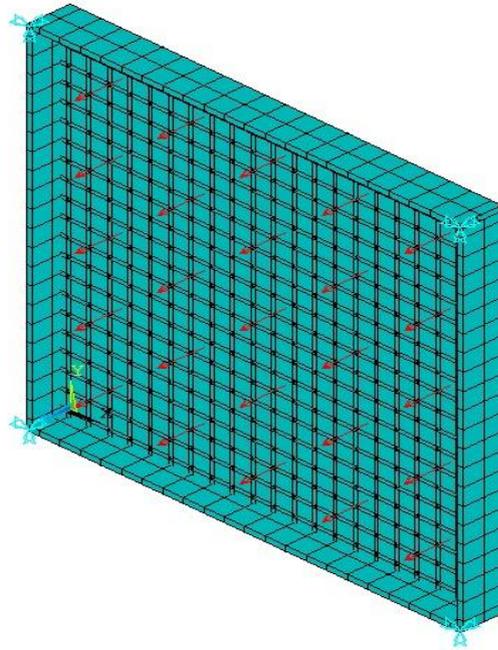


Figura 45 – Exemplo de distribuição de cargas dinâmicas na laje para 25 peçoas

Com a finalidade de avaliar a influência das cargas dinâmicas nos pisos, as respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações máximas foram obtidas nos mesmos pontos, isto é, no centro da laje.

4.5 Modelagem do amortecimento estrutural

O amortecimento é o fenômeno pelo qual a energia mecânica de um sistema é dissipada, sendo uma propriedade dinâmica cujo efeito sobre a resposta de uma estrutura é facilmente verificado quando associado a sua vibração livre.

Para Carvalho apud Silva [23] o amortecimento relaciona-se com a mensuração da dissipação de energia de uma estrutura em vibração que resulta em trazê-la a um estado de equilíbrio. A importância da estimativa do amortecimento vem sendo mais significativa à medida que as estruturas têm se tornando mais

flexível. Nessas estruturas, os níveis de oscilação podem não ser significantes o bastante para causar danos na estrutura, mas podem causar desconforto para os ocupantes da edificação. Por esse motivo é fundamental uma boa estimativa para o amortecimento ou mesmo a inserção de dispositivos de amortecimento nessas estruturas, com o intuito de evitar tais situações.

Ao contrário das características de massa e rigidez de uma estrutura, o amortecimento não pode ser relacionado como um fenômeno físico único, pois existem muitos mecanismos que podem provocar o amortecimento em um sistema. Assim, para avaliar o efeito dessa dissipação há de se considerar todos os materiais e elementos que compõem a estrutura como alvenaria, divisória e mobiliária.

Portanto, a estimativa do amortecimento em sistemas estruturais é uma das tarefas mais difíceis na dinâmica estrutural. Sua avaliação física só é considerada corretamente medida se seus valores forem obtidos através de ensaios experimentais. Contudo, esses ensaios demandam tempo e custo que podem ser demasiadamente onerosos. Assim, o amortecimento é geralmente obtido em termos de taxas de contribuição.

Alguns autores utilizam a matriz de amortecimento de Rayleigh, Clough e Pnzen apud Langer [36], que considera uma contribuição da matriz de rigidez (β) e uma taxa de contribuição da matriz de massa (α), definida na equação abaixo:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (23)$$

Na qual:

M é a matriz de massa;

K é a matriz de rigidez do sistema;

α e β são parâmetros que definem a taxa de amortecimento.

Em termos de taxa de amortecimento modal e frequência natural circular (rad/s), a equação acima pode ser reescrita conforme Equação 24 a seguir:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2 \omega_{0i}} + \frac{\beta \omega_{0i}}{2} \quad (24)$$

Na qual:

ξ_i : taxa de amortecimento do modo i ;

ω_{0i} : frequência natural circular do modo $i = 2$ ($\omega_{0i} = 2\pi f_{0i}$).

Isolando α e β da equação (24) para duas frequências naturais mais relevantes da análise dinâmica realizada, tem - se que:

$$\alpha = 2 \xi_1 \omega_{01} - \beta \omega_{01} \omega_{01} \quad (25)$$

$$\beta = \frac{2(\xi_2 \omega_{02} - \xi_1 \omega_{01})}{\omega_{02} \omega_{02} - \omega_{01} \omega_{01}} \quad (26)$$

A partir de duas frequências naturais é possível descobrir os valores de α e β . Em geral, a frequência natural ω_{01} é tomada como a menor frequência natural, ou frequência fundamental da estrutura, e ω_{02} como a segunda frequência mais importante no carregamento. O AISC e os autores Murray et al. [32], indicam valores para a taxa de amortecimento modal de acordo com as condições do piso. Neste trabalho foi considerado como taxa de amortecimento o valor de 3% ($\xi = 3$) que considera a pouca existência de elementos que contribuem para o amortecimento.

Dessa maneira foi possível calcular os valores dos parâmetros α e β utilizados nas análises dinâmicas para modelagem dos pisos estudados.

As Tabelas 6 a 13 apresentam os parâmetros α e β utilizados nas análises dinâmicas para modelagem dos pisos estudados.

Tabela 6 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo II ($bw = 0,15$ m)

Modelo II – (8,50 x 8,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,15 x 0,50	6,89	12,48	1,674103333	0,000492831
0,15 x 0,55	7,14	13,30	1,751936346	0,000467102
0,15 x 0,60	7,39	14,22	1,834013331	0,000441751
0,15 x 0,65	7,60	15,10	1,907398492	0,000420505
0,15 x 0,70	7,79	15,92	1,972612121	0,000402642
0,15 x 0,75	7,95	16,69	2,030441927	0,000387532
0,15 x 0,80	8,08	17,40	2,081583251	0,000374713
0,15 x 0,85	8,20	18,04	2,126839644	0,000374713
0,15 x 0,90	8,31	18,63	2,166786381	0,000354451
0,15 x 0,95	8,40	19,16	2,202158618	0,000346438
0,15 x 1,00	8,48	19,64	2,233513302	0,000339535

Tabela 7 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo II ($bw = 0,20$ m)

Modelo II – (8,50 x 8,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,20 x 0,50	7,13	12,89	1,730199462	0,000477024
0,20 x 0,55	7,39	13,79	1,813892321	0,000450941
0,20 x 0,60	7,64	14,74	1,897237819	0,000426658
0,20 x 0,65	7,85	15,64	1,972533751	0,000406412
0,20 x 0,70	8,04	16,48	2,030634924	0,000389449
0,20 x 0,75	8,19	17,26	2,094209761	0,000375174
0,20 x 0,80	8,32	17,98	2,144900339	0,000363099
0,20 x 0,85	8,44	18,62	2,189440297	0,000363099
0,20 x 0,90	8,54	19,21	2,228601456	0,000344146
0,20 x 0,95	8,63	19,73	2,263090983	0,000336699
0,20 x 1,00	8,70	20,20	2,293473491	0,000330326

Tabela 8 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo III ($b_w = 0,15$ m)

Modelo III – (9,50 x 9,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,15 x 0,50	5,47	9,93	1,329679499	0,000620084
0,15 x 0,55	5,68	10,59	1,392161427	0,000587288
0,15 x 0,60	5,88	11,33	1,459343353	0,000554869
0,15 x 0,65	6,06	12,04	1,518009234	0,000527877
0,15 x 0,70	6,21	12,71	1,572298178	0,000504987
0,15 x 0,75	6,34	13,33	1,619743203	0,000485475
0,15 x 0,80	6,45	13,90	1,660967075	0,000469207
0,15 x 0,85	6,55	14,43	1,698373739	0,000455162
0,15 x 0,90	6,64	14,91	1,731926938	0,000443123
0,15 x 0,95	6,71	15,34	1,759793823	0,000433094
0,15 x 1,00	6,78	15,73	1,786099808	0,000424243

Tabela 9 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo III ($b_w = 0,20$ m)

Modelo III – (9,50 x 9,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,20 x 0,50	5,66	10,26	1,375155618	0,00059983
0,20 x 0,55	5,88	10,98	1,443621079	0,000566388
0,20 x 0,60	6,09	11,75	1,511483706	0,000535395
0,20 x 0,65	6,26	12,48	1,571630508	0,000509568
0,20 x 0,70	6,41	13,16	1,624841354	0,000488056
0,20 x 0,75	6,54	13,79	1,67238304	0,000469715
0,20 x 0,80	6,65	14,37	1,713505943	0,000454519
0,20 x 0,85	6,75	14,89	1,749158616	0,000441484
0,20 x 0,90	6,83	15,37	1,78265869	0,000430135
0,20 x 0,95	6,90	15,80	1,811085069	0,0004200635
0,20 x 1,00	6,97	16,18	1,836604564	0,000412443

Tabela 10 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo IV ($b_w = 0,15$ m)

Modelo IV – (10,50 x 10,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,15 x 0,50	4,45	8,08	1,079292397	0,000763944
0,15 x 0,55	4,62	8,62	1,13188842	0,000722337
0,15 x 0,60	4,79	9,23	1,18675727	0,000682093
0,15 x 0,65	4,93	9,81	1,236520631	0,000648289
0,15 x 0,70	5,06	10,36	1,281613334	0,00061928
0,15 x 0,75	5,17	10,87	1,319097332	0,000595714
0,15 x 0,80	5,26	11,34	1,354633556	0,000575259
0,15 x 0,85	5,35	11,78	1,385204539	0,000557786
0,15 x 0,90	5,42	12,18	1,412244307	0,000542882
0,15 x 0,95	5,48	12,54	1,437654166	0,000529928
0,15 x 1,00	5,54	12,86	1,459701415	0,000518984

Tabela 11 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo IV ($b_w = 0,20$ m)

Modelo IV – (10,50 x 10,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,20 x 0,50	4,61	8,35	1,117688351	0,000737967
0,20 x 0,55	4,79	8,94	1,173743011	0,000696521
0,20 x 0,60	4,96	9,57	1,229495087	0,000658118
0,20 x 0,65	5,10	10,16	1,280089895	0,000625773
0,20 x 0,70	5,23	10,73	1,323451681	0,000599078
0,20 x 0,75	5,34	11,25	1,363409526	0,000575953
0,20 x 0,80	5,43	11,73	1,399302716	0,000556486
0,20 x 0,85	5,51	12,16	1,429485462	0,000540424
0,20 x 0,90	5,58	12,55	1,456524098	0,000526422
0,20 x 0,95	5,64	12,91	1,479764319	0,000514787
0,20 x 1,00	5,70	13,23	1,501810736	0,000504453

Tabela 12 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo V ($b_w = 0,15$ m)

Modelo V – (11,50 x 11,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,15 x 0,50	3,68	6,69	0,895006725	0,000920858
0,15 x 0,55	3,82	7,14	0,937712904	0,000872082
0,15 x 0,60	3,97	7,65	0,984878744	0,000822506
0,15 x 0,65	4,09	8,13	1,025889490	0,000781352
0,15 x 0,70	4,20	8,59	1,061713774	0,000747206
0,15 x 0,75	4,29	9,02	1,096015997	0,000717453
0,15 x 0,80	4,37	9,42	1,125379999	0,00069248
0,15 x 0,85	4,44	9,79	1,151206803	0,00067154
0,15 x 0,90	4,50	10,12	1,174293812	0,000653167
0,15 x 0,95	4,56	10,42	1,194060766	0,000637768
0,15 x 1,00	4,60	10,70	1,212436969	0,000624545

Tabela 13 – Valores dos parâmetros α e β obtidos do Modelo V ($b_w = 0,20$ m)

Modelo V – (11,50 x 11,50) m				
Viga de Bordo (m)	f_{01} (Hz)	f_{02} (Hz)	α	β
0,20 x 0,50	3,81	6,92	0,925847283	0,000890793
0,20 x 0,55	3,96	7,41	0,972935495	0,000839868
0,20 x 0,60	4,11	7,93	1,020515548	0,000793131
0,20 x 0,65	4,23	8,43	1,061855339	0,000754289
0,20 x 0,70	4,34	8,90	1,099823183	0,000721246
0,20 x 0,75	4,43	9,34	1,13278576	0,000693486
0,20 x 0,80	4,51	9,74	1,162122081	0,000670126
0,20 x 0,85	4,58	10,11	1,188299615	0,000650054
0,20 x 0,90	4,64	10,44	1,21101147	0,000633242
0,20 x 0,95	4,70	10,74	1,232497259	0,000618478
0,20 x 1,00	4,75	11,01	1,249154685	0,000606305

4.6 Esforço Computacional

O desempenho computacional obtido durante as análises será apresentado por meio do tempo médio de processamento necessário para obtenção dos resultados.

Os microcomputadores possuíam processador Intel® Core™ i7-2600, com 8,00 Gb de memória RAM 64-bit e disco rígido com 1 Tb e *Version* 10.0 do Ansys [25] rodando sobre o sistema operacional Windows 7 Professional.

A Tabela 14 apresenta uma média dos tempos de processamentos dos modelos.

Tabela 14 – Desempenho computacional

Modelos	Análise estática	Análise dos autovalores	Análise dinâmica
8,50 x 8,50	3,87 s	7,17 s	5,31 min
9,50 x 9,50	4,11 s	7,93 s	6,40 min
10,50 x 10,50	5,58 s	8,12 s	7,69 min
11,50 x 11,50	6,02 s	9,08 s	9,13 min

5 ANÁLISE ESTÁTICA

5.1 Generalidades

Neste capítulo serão apresentados os resultados das análises que foram feitas considerando-se o carregamento estático nos modelos conforme a atuação das ações descrita no capítulo 3.

Para comparar os resultados obtidos nos modelos, foi realizado um estudo sobre o efeito da excentricidade das nervuras sobre o comportamento de lajes nervuradas de concreto armado com o objetivo de avaliar os resultados que representassem o comportamento real deste tipo de sistema estrutural.

5.2 Estudo do efeito da excentricidade

A consideração da excentricidade existente entre o eixo longitudinal das nervuras e o plano médio da laje de concreto constitui um parâmetro relevante para a análise estrutural. Todavia, na prática corrente de projeto, verifica-se que esta excentricidade é comumente negligenciada ou mesmo considerada de forma simplificada, com base no emprego de seções do tipo “T”. Na presente investigação objetiva-se analisar o efeito da excentricidade laje-nervura sobre o comportamento estrutural de lajes nervuradas de concreto armado. Ao longo da análise foi considerado um comportamento elástico-linear para o material concreto armado.

Inicialmente, considera-se o Modelo I, descrito no capítulo 3, em que a laje de concreto é discretizada por elementos de casca Shell63 (Ansys) [25] e as nervuras por elementos de viga tridimensionais Beam44 (Ansys) [25], conforme Figura 46.

Em seguida, para o mesmo Modelo I, é feita uma análise numérico-computacional mais refinada onde tanto a placa quanto as nervuras são simuladas por meio de elementos finitos de casca Shell63 (Ansys) [25]. Desta forma, o comportamento gerado pela excentricidade entre os elementos estruturais (laje e nervuras) é obtido naturalmente.

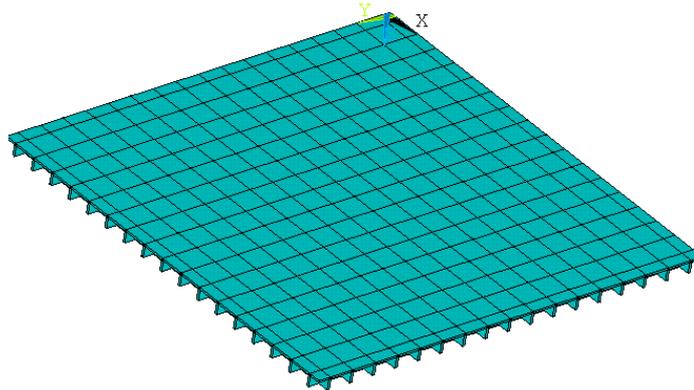


Figura 46 – Modelagem em elementos finitos: lajes (casca) + nervuras (casca)

A validação do modelo numérico desenvolvido foi feita comparando-se os valores máximos da resposta da estrutura, correspondentes aos deslocamentos translacionais verticais, momentos fletores e momentos torsores, obtidos de acordo com a presente metodologia de análise, em comparação com aqueles obtidos por outros autores [37].

A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos em negrito e comparados com os resultados do (ALTOQI) [37] do Modelo I. Para rigidez das faixas, no estudo do (ALTOQI) [37] da tabela, foi considerado o momento de inércia proporcional ao momento de inércia à flexão.

Tabela 15 – Relação entre os resultados obtidos

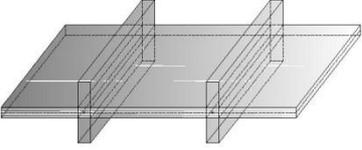
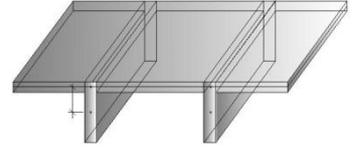
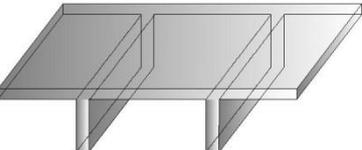
Jp/lyy	Mx		My		Flecha	
	kN m/m		kN m/m		cm	
1	29,94	30,43	14,10	14,84	4,2	3,91
2	23,09	23,71	22,24	22,68	3,2	3,12
2,5	20,74	21,35	25,17	25,67	2,9	2,82
3	18,82	19,49	27,62	28,14	2,6	2,59

Verifica-se na tabela acima que os valores apresentam diferença máxima de 6,9% o que valida o modelo elaborado no Ansys [25].

Com referência aos resultados correspondentes aos modelos numéricos casca-viga, os resultados apresentados na Tabela 16 revelam que os valores de deslocamentos e esforços são modificados de acordo com o valor da excentricidade

adotada (laje-nervura). Basicamente, os valores de deslocamentos e esforços apresentam a mesma ordem de grandeza, com diferenças associadas à própria natureza e o nível de rigidez de cada modelo numérico-computacional.

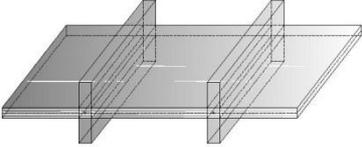
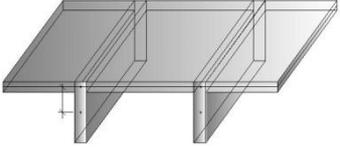
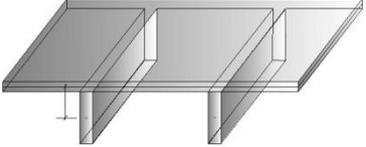
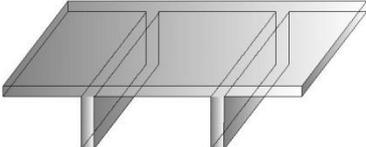
Tabela 16 – Deslocamentos e esforços correspondentes à seção do meio do vão do modelo estrutural

Modelo Numérico	Análise Estática			
	Deslocamentos (cm)	Momento M_x (N m/m)	Momento M_y (N m/m)	Momento M_{xy} (N m/m)
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 0,0 cm		1587	1587	1264
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 10 cm				
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 12 cm		774,35	774,35	614,71
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 12 cm				
Modelo Casca-Casca		715,22	715,22	554,63
Modelo Casca-Casca				

Verifica-se que o modelo numérico casca-viga, que emprega a maior excentricidade (distância entre o eixo da laje e centróide da nervura) e = 12 cm, possui o maior nível de rigidez e, portanto os deslocamentos estáticos são inferiores aos demais. Por sua vez, o modelo estrutural com excentricidade nula, por ser mais flexível, produz os deslocamentos mais elevados, conforme ilustrado na Tabela 16.

Pode-se perceber, também, que, de forma geral, os momentos fletores e torsores acompanham esta tendência. Diante dos resultados apresentados na Tabela 16, convém chamar a atenção para o fato de que o modelo numérico casca-casca, além de apresentar valores de deslocamentos e esforços da mesma ordem de grandeza que os demais modelos, têm a capacidade de incorporar a excentricidade existente entre as lajes e as nervuras naturalmente, sem nenhum tipo de artifício. A Tabela 17 apresenta as análises das frequências naturais.

Tabela 17 – Frequências naturais do modelo estrutural

Modelo Numérico	Análise Dinâmica								
	Frequências Naturais (Hz)								
	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}	f_{06}	f_{07}	f_{08}	
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 0,0 cm		3,93	10,50	10,50	15,65	22,01	22,02	26,15	26,15
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 10 cm			5,61	15,15	15,15	22,18	31,91	31,92	36,92
Modelo Casca-Viga Excentricidade = 12 cm			6,02	16,76	16,76	24,45	35,25	35,25	40,51
Modelo Casca-Casca			5,88	16,53	16,53	23,68	27,66	32,68	35,60

De acordo com a análise dos resultados ilustrados na Tabela 17, fica evidenciado, novamente, que o modelo numérico casca-viga, Figura 46, que emprega a maior excentricidade (laje-nervura), $e = 12$ cm, apresenta uma maior rigidez, gerando valores de frequências naturais superiores as dos demais modelos estudados. Por outro lado, o modelo estrutural com excentricidade (laje-nervura), $e = 0,0$ cm, por ser mais flexível, produz frequências naturais com menor valor.

Portanto, conclui-se que a confecção do modelo casca-casca é bastante simples e entende-se que o mesmo representa o comportamento global da estrutura com fidelidade e boa precisão, de acordo com os resultados obtidos por outros autores Dias [15], Coimbra [19] e Silva [23].

5.3 Análise das flechas

Nesta análise foram verificados os valores máximos no centro da laje estudada e para cada modelo, foram obtidos gráficos de deslocamentos em relação a altura das vigas de bordo. As Figuras 47 a 50 apresentam gráficos da variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo dos modelos.

Verifica-se que existe uma variação não-linear decrescente dos deslocamentos transacionais verticais, obtidos no centro da laje, na medida em que aumenta a rigidez das vigas de bordo.

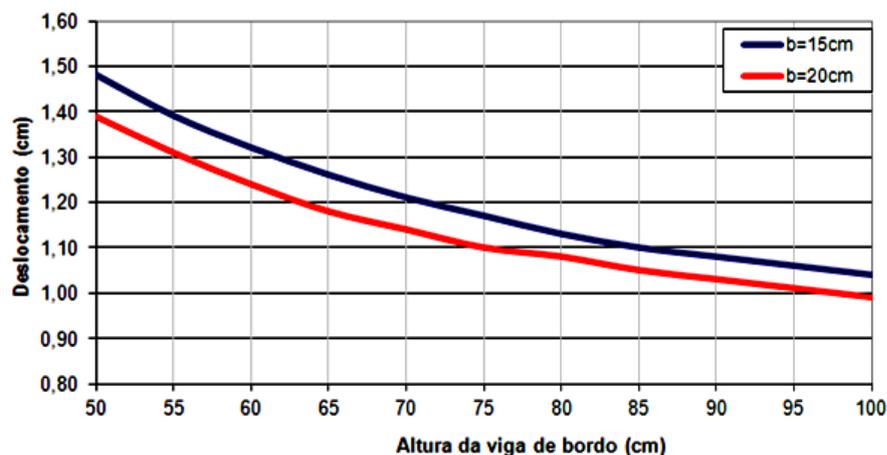


Figura 47 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo II - (8,50 x 8,50) m

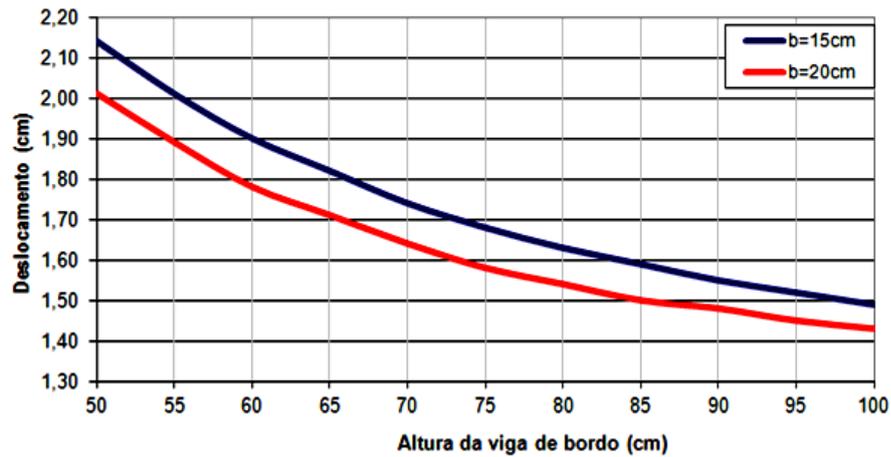


Figura 48 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo III - (9,50 x 9,50) m

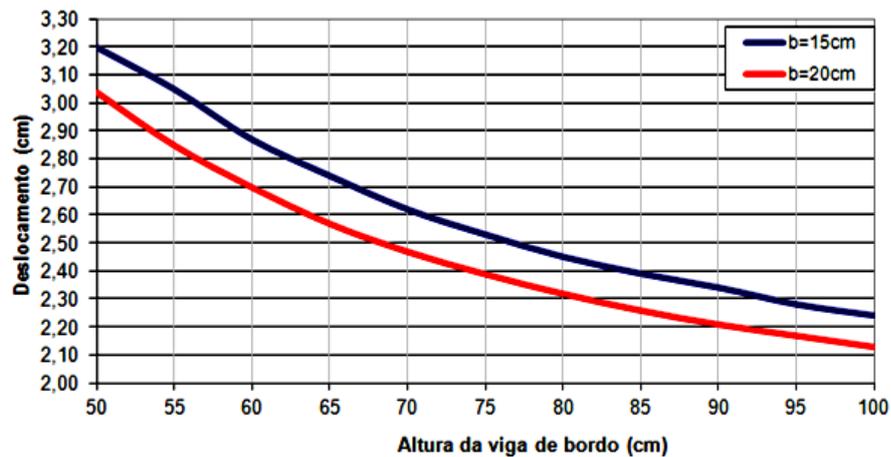


Figura 49 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m

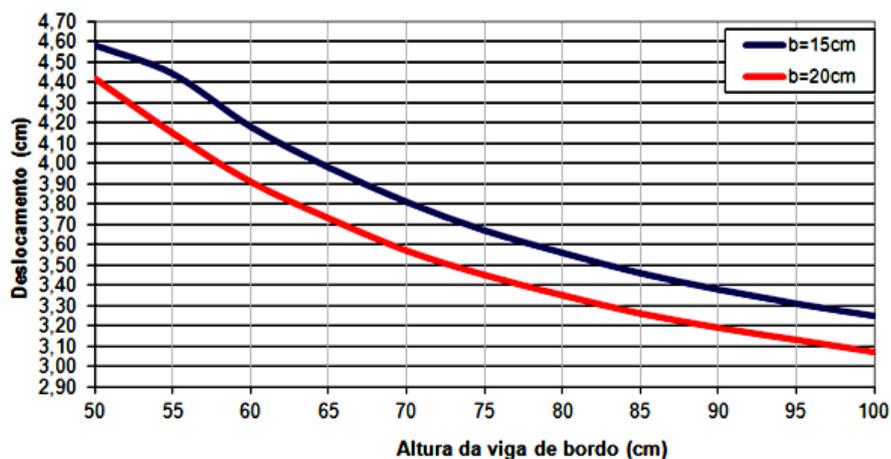


Figura 50 – Variação do deslocamento translacional vertical em função da altura de bordo do Modelo V - (11,50 x 11,50) m

O deslocamento admissível segundo a NBR: 6118:2007 [8] (Aceitabilidade visual de $L/250$) para o maior vão de laje corresponderá a $1150/250 = 4,60$ cm sendo o deslocamento limite para vigas de bordo com altura igual a 0,50 m, demonstrando comportamento satisfatório no que se refere a aceitabilidade visual.

A Figura 51 apresenta o resultado da flecha para o modelo IV (10,50x10,50) m com viga de bordo (0,20 x 0,75) m.

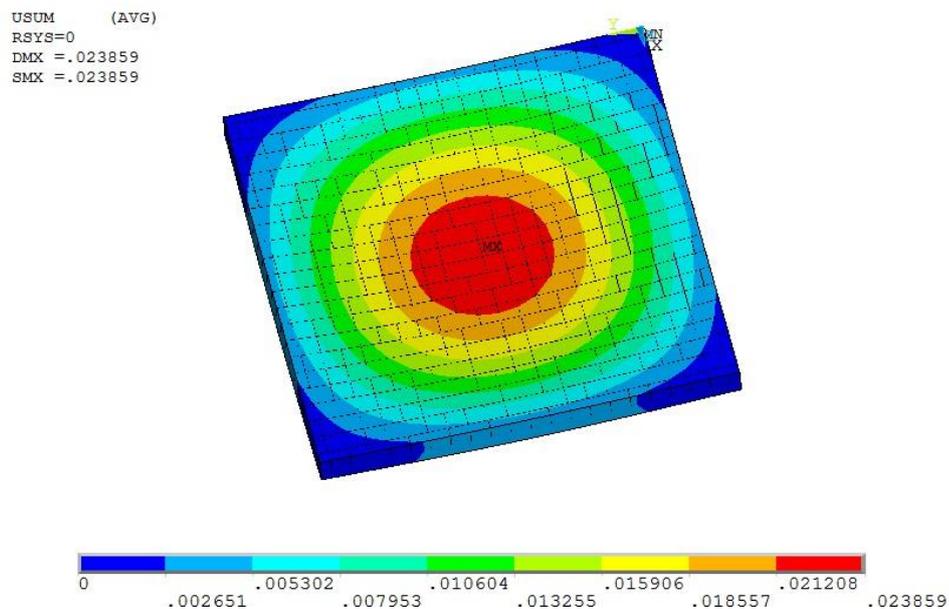


Figura 51 – Flecha obtida para o Modelo IV com viga de bordo (0,20 x 0,75)m

5.4 Análise dos momentos

As Figuras 52 a 55 ilustram as curvas dos momentos fletores máximos. Basicamente, observa-se de forma semelhante na análise das flechas, uma variação não-linear dos valores máximos destes momentos. Conseqüentemente ocorre um decréscimo destes valores em relação ao aumento da altura da viga de bordo devido à influência da rigidez dessas vigas sobre cada modelo numérico.

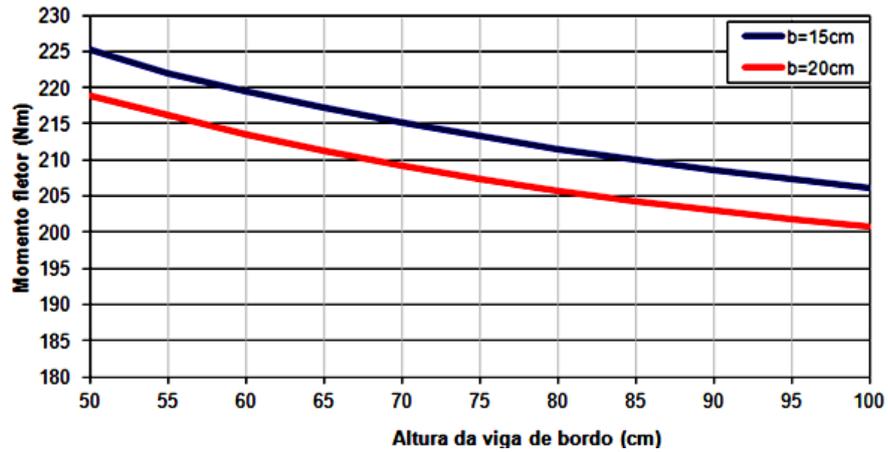


Figura 52 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo II – (8,50 x 8,50) m

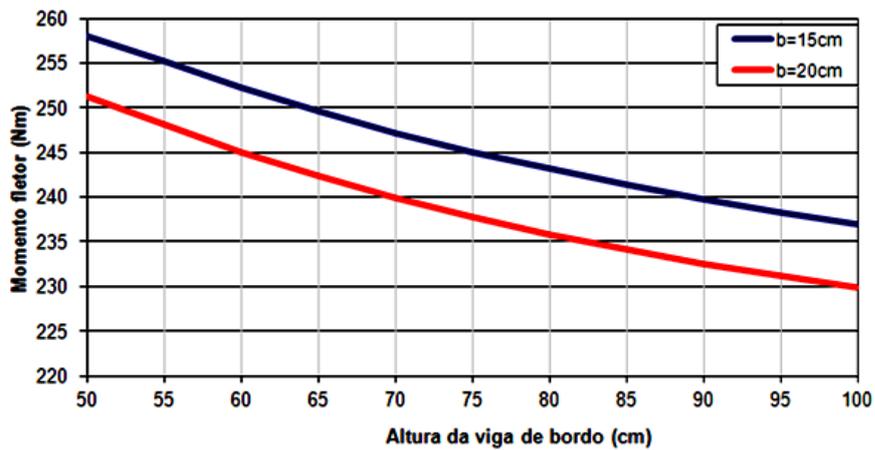


Figura 53 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo III – (9,50 x 9,50) m

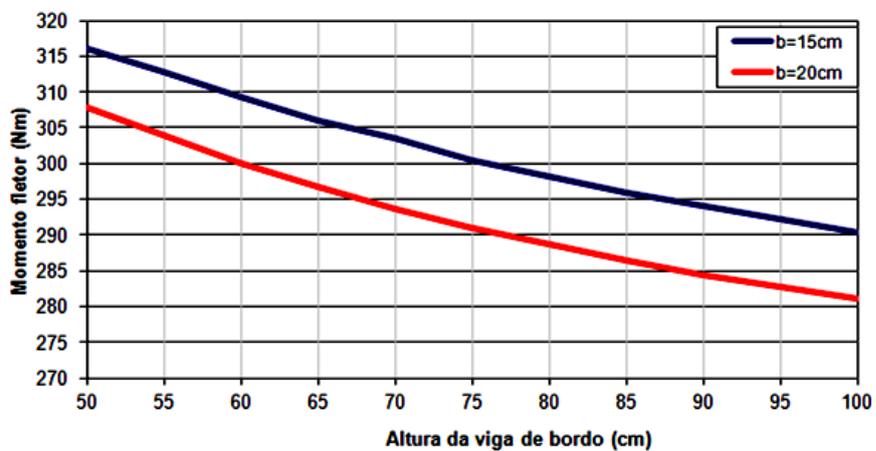


Figura 54 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo IV – (10,50 x 10,50) m

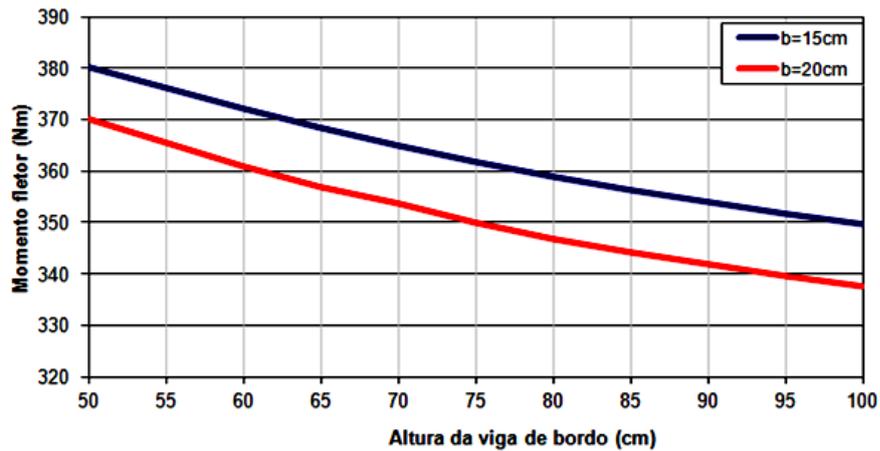


Figura 55 – Variação do momento fletor em função da altura de bordo do Modelo V – (11,50 x 11,50) m

5.5 Análise das tensões

No comportamento estrutural dos modelos em relação às tensões, será verificada, a influência das vigas de bordos e como as tensões apresentam-se nas nervuras quando há variação dos vãos. Serão analisados os valores das tensões em cada modelo e como a variação nas dimensões dos modelos impacta nos resultados obtidos.

Pode-se fazer uma análise preliminar dos resultados que, por se tratar de uma laje quadrada, as tensões normais máximas serão sempre de flexão (com valores iguais para σ_x e σ_y). Semelhante às análises das tensões de flexão, as tensões cisalhantes apresentam valores iguais nos sentidos yz e xz.

Nas Tabelas 18 a 33 constam os resultados obtidos dos valores das tensões máximas no Modelo II ao Modelo V ressaltando-se que no Modelo I foi estudado apenas o efeito da excentricidade. Esta análise será feita apenas nos modelos que apresentam características semelhantes quanto às nervuras, pois dessa maneira, será possível avaliar a variação dos resultados com influência dos vãos.

Nas tabelas é possível verificar que a inércia das vigas de bordo tem influência maior nas tensões de compressão.

Tabela 18 – Tensões de tração: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo II – (8,50 x8,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	7,29	7,29	2,60	2,05	2,05
0,15 x 0,55	7,43	7,43	2,37	2,03	2,03
0,15 x 0,60	7,39	7,39	2,16	1,98	1,98
0,15 x 0,65	7,33	7,33	1,99	1,93	1,93
0,15 x 0,70	7,27	7,27	1,84	1,90	1,90
0,15 x 0,75	7,20	7,20	1,74	1,86	1,86
0,15 x 0,80	7,13	7,13	1,72	1,83	1,83
0,15 x 0,85	7,06	7,06	1,71	1,80	1,80
0,15 x 0,90	6,99	6,99	1,69	1,78	1,78
0,15 x 0,95	6,93	6,93	1,67	1,76	1,76
0,15 x 1,00	6,87	6,87	1,66	1,74	1,74

Tabela 19 – Tensões de compressão: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo II – (8,50 x8,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	-7,32	-7,32	-2,56	-2,05	-2,05
0,15 x 0,55	-7,09	-7,09	-2,23	-2,03	-2,03
0,15 x 0,60	-6,79	-6,79	-2,03	-1,98	-1,98
0,15 x 0,65	-6,53	-6,53	-1,88	-1,93	-1,93
0,15 x 0,70	-6,40	-6,40	-1,75	-1,90	-1,90
0,15 x 0,75	-6,37	-6,37	-1,70	-1,86	-1,86
0,15 x 0,80	-6,33	-6,33	-1,68	-1,83	-1,83
0,15 x 0,85	-6,29	-6,29	-1,66	-1,80	-1,80
0,15 x 0,90	-6,24	-6,24	-1,64	-1,78	-1,78
0,15 x 0,95	-6,19	-6,19	-1,63	-1,76	-1,76
0,15 x 1,00	-6,14	-6,14	-1,61	-1,74	-1,74

Tabela 20 – Tensões de tração: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,20\text{m}$

Vigas de Bordo (m)	Modelo II – (8,50 x8,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	7,06	7,06	2,40	1,94	1,94
0,20 x 0,55	7,14	7,14	2,20	1,92	1,92
0,20 x 0,60	7,08	7,08	2,00	1,87	1,87
0,20 x 0,65	7,00	7,00	1,82	1,83	1,83
0,20 x 0,70	6,93	6,93	1,69	1,79	1,79
0,20 x 0,75	6,86	6,86	1,67	1,76	1,76
0,20 x 0,80	6,79	6,79	1,65	1,73	1,73
0,20 x 0,85	6,72	6,72	1,63	1,71	1,71
0,20 x 0,90	6,66	6,66	1,61	1,69	1,69
0,20 x 0,95	6,60	6,60	1,59	1,67	1,67
0,20 x 1,00	6,54	6,54	1,58	1,66	1,66

Tabela 21 – Tensões de compressão: Modelo II com base da viga de bordo $b_w = 0,20\text{m}$

Vigas de Bordo (m)	Modelo II – (8,50 x8,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	-6,85	-6,85	-2,41	-1,94	-1,94
0,20 x 0,55	-6,63	-6,63	-2,09	-1,92	-1,92
0,20 x 0,60	-6,34	-6,34	-1,90	-1,87	-1,87
0,20 x 0,65	-6,23	-6,23	-1,75	-1,83	-1,83
0,20 x 0,70	-6,19	-6,19	-1,63	-1,79	-1,79
0,20 x 0,75	-6,15	-6,15	-1,61	-1,76	-1,76
0,20 x 0,80	-6,10	-6,10	-1,59	-1,73	-1,73
0,20 x 0,85	-6,04	-6,04	-1,58	-1,71	-1,71
0,20 x 0,90	-5,99	-5,99	-1,55	-1,69	-1,69
0,20 x 0,95	-5,49	-5,49	-1,54	-1,67	-1,67
0,20 x 1,00	-5,89	-5,89	-1,53	-1,66	-1,66

Tabela 22 – Tensões de tração: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo III – (9,50 x9,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	8,16	8,16	3,38	2,35	2,35
0,15 x 0,55	8,16	8,16	3,07	2,31	2,31
0,15 x 0,60	8,14	8,14	2,79	2,28	2,28
0,15 x 0,65	8,12	8,12	2,55	2,25	2,25
0,15 x 0,70	8,10	8,10	2,36	2,22	2,22
0,15 x 0,75	8,08	8,08	2,19	2,19	2,19
0,15 x 0,80	8,05	8,05	2,04	2,17	2,17
0,15 x 0,85	8,03	8,03	1,91	2,15	2,15
0,15 x 0,90	8,01	8,01	1,80	2,12	2,12
0,15 x 0,95	7,98	7,98	1,71	2,10	2,10
0,15 x 1,00	7,96	7,96	1,64	2,09	2,09

Tabela 23 – Tensões de compressão: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo III – (9,50 x9,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	-7,76	-7,76	-3,38	-2,35	-2,35
0,15 x 0,55	-6,49	-6,49	-2,93	-2,31	-2,31
0,15 x 0,60	-5,74	-5,74	-2,65	-2,28	-2,28
0,15 x 0,65	-5,10	-5,10	-2,43	-2,25	-2,25
0,15 x 0,70	-4,55	-4,55	-2,55	-2,22	-2,22
0,15 x 0,75	-4,26	-4,26	-2,11	-2,19	-2,19
0,15 x 0,80	-4,11	-4,11	-1,99	-2,17	-2,17
0,15 x 0,85	-3,98	-3,98	-1,88	-2,15	-2,15
0,15 x 0,90	-3,87	-3,87	-1,79	-2,12	-2,12
0,15 x 0,95	-3,77	-3,77	-1,71	-2,10	-2,09
0,15 x 1,00	-3,68	-3,68	-1,64	-2,09	-2,09

Tabela 24 – Tensões de tração: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,20\text{m}$

Vigas de Bordo (m)	Modelo III – (9,50 x9,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	7,99	7,99	3,12	2,55	2,55
0,20 x 0,55	7,98	7,98	2,85	2,21	2,21
0,20 x 0,60	7,95	7,95	2,58	2,17	2,17
0,20 x 0,65	7,92	7,92	2,35	2,14	2,14
0,20 x 0,70	7,90	7,90	2,15	2,11	2,11
0,20 x 0,75	7,87	7,87	1,99	2,09	2,09
0,20 x 0,80	7,84	7,84	1,84	2,06	2,06
0,20 x 0,85	7,82	7,82	1,72	2,04	2,04
0,20 x 0,90	7,80	7,80	1,61	2,02	2,02
0,20 x 0,95	7,78	7,78	1,52	2,00	2,00
0,20 x 1,00	7,76	7,76	1,43	1,98	1,98

Tabela 25 – Tensões de compressão: Modelo III com base da viga de bordo $b_w = 0,20\text{m}$

Vigas de Bordo (m)	Modelo III – (9,50 x9,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	-7,59	-7,59	-3,18	-2,55	-2,55
0,20 x 0,55	-6,51	-6,51	-2,74	-2,21	-2,21
0,20 x 0,60	-5,72	-5,72	-2,48	-2,17	-2,17
0,20 x 0,65	-5,04	-5,04	-2,27	-2,14	-2,14
0,20 x 0,70	-4,46	-4,46	-2,09	-2,11	-2,11
0,20 x 0,75	-3,96	-3,96	-1,95	-2,09	-2,09
0,20 x 0,80	-3,81	-3,81	-1,84	-2,06	-2,06
0,20 x 0,85	-3,69	-3,69	-1,73	-2,04	-2,04
0,20 x 0,90	-3,59	-3,59	-1,64	-2,02	-2,02
0,20 x 0,95	-3,50	-3,50	-1,56	-2,00	-2,00
0,20 x 1,00	-3,42	-3,42	-1,49	-1,98	-1,98

Tabela 26 – Tensões de tração: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo IV – (10,50 x10,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	9,97	9,97	4,28	3,13	3,13
0,15 x 0,55	9,97	9,97	3,87	3,03	3,03
0,15 x 0,60	9,96	9,96	3,50	2,96	2,96
0,15 x 0,65	9,93	9,93	3,20	2,90	2,90
0,15 x 0,70	9,92	9,92	2,94	2,85	2,85
0,15 x 0,75	9,88	9,88	2,73	2,80	2,80
0,15 x 0,80	9,85	9,85	2,45	2,75	2,75
0,15 x 0,85	9,82	9,82	2,38	2,71	2,71
0,15 x 0,90	9,80	9,80	2,24	2,68	2,68
0,15 x 0,95	9,77	9,77	2,12	2,65	2,65
0,15 x 1,00	9,74	9,74	2,01	2,62	2,62

Tabela 27 – Tensões de compressão: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo IV – (10,50 x10,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	-9,86	-9,86	-4,35	-3,13	-3,13
0,15 x 0,55	-8,21	-8,21	-3,74	-3,03	-3,03
0,15 x 0,60	-7,25	-7,25	-3,36	-2,96	-2,96
0,15 x 0,65	-6,43	-6,43	-3,06	-2,90	-2,90
0,15 x 0,70	-5,74	-5,74	-2,82	-2,85	-2,85
0,15 x 0,75	-5,48	-5,48	-2,62	-2,80	-2,80
0,15 x 0,80	-5,26	-5,26	-2,47	-2,75	-2,75
0,15 x 0,85	-5,08	-5,08	-2,33	-2,71	-2,71
0,15 x 0,90	-4,92	-4,92	-2,22	-2,68	-2,68
0,15 x 0,95	-4,79	-4,79	-2,12	-2,65	-2,65
0,15 x 1,00	-4,67	-4,67	-2,03	-2,62	-2,62

Tabela 28 – Tensões de tração: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo IV – (10,50 x10,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	9,76	9,76	3,94	2,95	2,95
0,20 x 0,55	9,74	9,74	3,60	2,86	2,86
0,20 x 0,60	9,71	9,71	3,24	2,80	2,80
0,20 x 0,65	9,67	9,67	2,94	2,74	2,74
0,20 x 0,70	9,64	9,64	2,69	2,68	2,68
0,20 x 0,75	9,61	9,61	2,48	2,64	2,64
0,20 x 0,80	9,57	9,57	2,30	2,60	2,60
0,20 x 0,85	9,54	9,54	2,14	2,56	2,56
0,20 x 0,90	9,51	9,51	2,01	2,53	2,53
0,20 x 0,95	9,48	9,48	1,88	2,50	2,50
0,20 x 1,00	9,46	9,46	1,78	2,47	2,47

Tabela 29 – Tensões de compressão: Modelo IV com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo IV – (10,50 x10,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	-9,67	-9,67	-4,07	-2,95	-2,95
0,20 x 0,55	-8,28	-8,28	-3,49	-2,86	-2,86
0,20 x 0,60	-7,27	-7,27	-3,13	-2,80	-2,80
0,20 x 0,65	-6,42	-6,42	-2,85	-2,74	-2,74
0,20 x 0,70	-5,69	-5,69	-2,62	-2,68	-2,68
0,20 x 0,75	-5,06	-5,06	-2,43	-2,64	-2,64
0,20 x 0,80	-4,85	-4,85	-2,29	-2,60	-2,60
0,20 x 0,85	-4,69	-4,69	-2,18	-2,56	-2,56
0,20 x 0,90	-4,54	-4,54	-2,07	-2,53	-2,53
0,20 x 0,95	-4,42	-4,42	-1,98	-2,50	-2,50
0,20 x 1,00	-4,31	-4,31	-1,89	-2,47	-2,47

Tabela 30 – Tensões de tração: Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo V – (11,50 x11,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	12,00	12,00	5,31	4,06	4,06
0,15 x 0,55	12,00	12,00	4,78	3,88	3,88
0,15 x 0,60	12,00	12,00	4,31	3,76	3,76
0,15 x 0,65	11,90	11,90	3,92	3,66	3,66
0,15 x 0,70	11,90	11,90	3,60	3,57	3,57
0,15 x 0,75	11,90	11,90	3,33	3,49	3,49
0,15 x 0,80	11,80	11,80	3,10	3,42	3,42
0,15 x 0,85	11,80	11,80	2,90	3,36	3,36
0,15 x 0,90	11,80	11,80	2,72	3,31	3,31
0,15 x 0,95	11,70	11,70	2,57	3,26	3,26
0,15 x 1,00	11,70	11,70	2,44	3,22	3,22

Tabela 31 – Tensões de compressão: Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,15m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo V – (11,50 x11,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,15 x 0,50	-12,20	-12,20	-5,46	-4,06	-4,06
0,15 x 0,55	-10,10	-10,10	-4,67	-3,88	-3,88
0,15 x 0,60	-8,91	-8,91	-4,15	-3,76	-3,76
0,15 x 0,65	-7,90	-7,90	-3,75	-3,66	-3,66
0,15 x 0,70	-7,23	-7,23	-3,44	-3,57	-3,57
0,15 x 0,75	-6,88	-6,88	-3,19	-3,49	-3,49
0,15 x 0,80	-6,58	-6,58	-2,99	-3,42	-3,42
0,15 x 0,85	-6,33	-6,33	-2,86	-3,36	-3,36
0,15 x 0,90	-6,12	-6,12	-2,74	-3,31	-3,31
0,15 x 0,95	-5,93	-5,93	-2,63	-3,26	-3,26
0,15 x 1,00	-5,77	-5,77	-2,53	-3,22	-3,22

Tabela 32 – Tensões de tração : Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo V – (11,50 x11,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	11,70	11,70	4,88	3,79	3,79
0,20 x 0,55	11,70	11,70	4,44	3,64	3,64
0,20 x 0,60	11,60	11,60	3,99	3,53	3,53
0,20 x 0,65	11,60	11,60	3,62	3,43	3,43
0,20 x 0,70	11,60	11,60	3,30	3,34	3,34
0,20 x 0,75	11,50	11,50	3,04	3,27	3,27
0,20 x 0,80	11,50	11,50	2,81	3,20	3,20
0,20 x 0,85	11,40	11,40	2,62	3,15	3,15
0,20 x 0,90	11,40	11,40	2,45	3,10	3,10
0,20 x 0,95	11,40	11,40	2,30	3,06	3,06
0,20 x 1,00	11,30	11,30	2,16	3,02	3,02

Tabela 33 – Tensões de compressão : Modelo V com base da viga de bordo $b_w = 0,20m$

Vigas de Bordo (m)	Modelo V – (11,50 x11,50) m				
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{yz} (MPa)	τ_{xz} (MPa)
0,20 x 0,50	-12,00	-12,00	-5,09	-3,79	-3,79
0,20 x 0,55	-10,20	-10,20	-4,34	-3,64	-3,64
0,20 x 0,60	-9,00	-9,00	-3,86	-3,53	-3,53
0,20 x 0,65	-7,94	-7,94	-3,49	-3,43	-3,43
0,20 x 0,70	-7,05	-7,05	-3,28	-3,34	-3,34
0,20 x 0,75	-6,35	-6,35	-3,11	-3,27	-3,27
0,20 x 0,80	-6,01	-6,01	-2,95	-3,20	-3,20
0,20 x 0,85	-5,81	-5,81	-2,80	-3,15	-3,15
0,20 x 0,90	-5,62	-5,62	-2,67	-3,10	-3,10
0,20 x 0,95	-5,45	-5,45	-2,55	-3,06	-3,06
0,20 x 1,00	-5,35	-5,35	-2,43	-3,02	-3,02

Das análises realizadas pode ser verificado que os valores das tensões máximas tendem a aumentar na medida em que os vãos aumentam. Os valores das tensões normais, considerando a mesma viga de bordo (0,15 x 0,70) m, para a laje (9,50x9,50) m é 8,10 MPa enquanto que o valor da tensão máxima para a laje (10,50x10,50) m é de 9,92 MPa. A Figura 56 representa os resultados nos modelos e a Figura 57 representa um detalhe dessa variação na nervura.

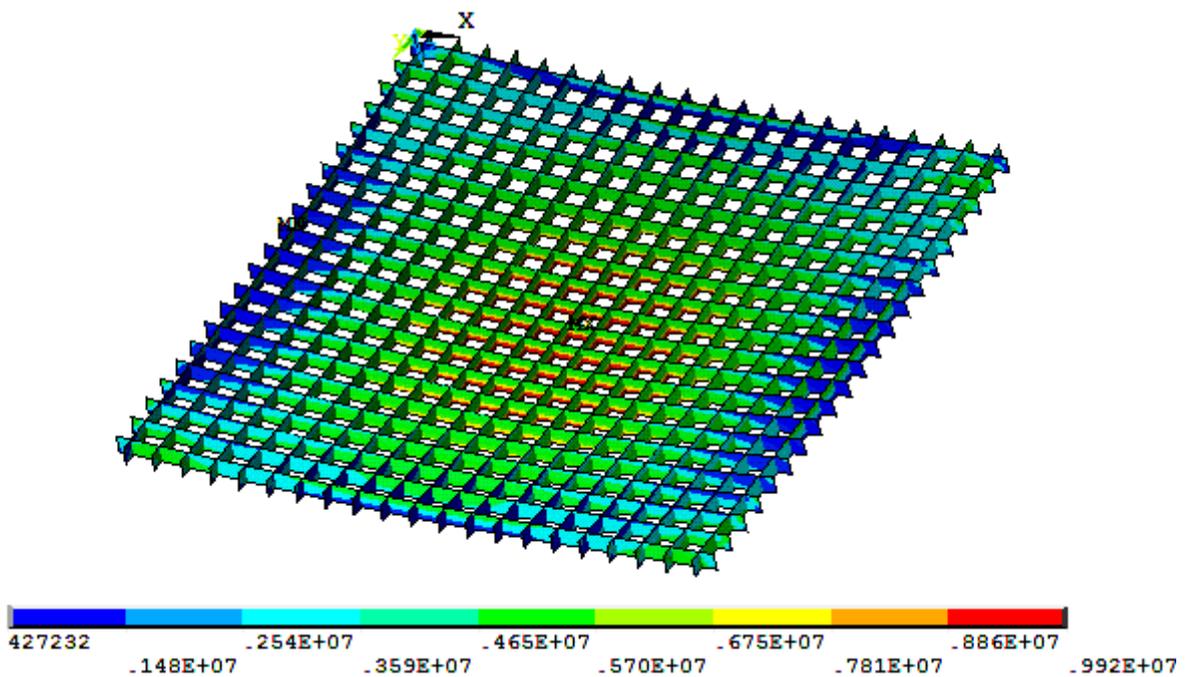


Figura 56 – Variação da tensão de flexão nas nervuras Modelo III (0,15 x 0,70).

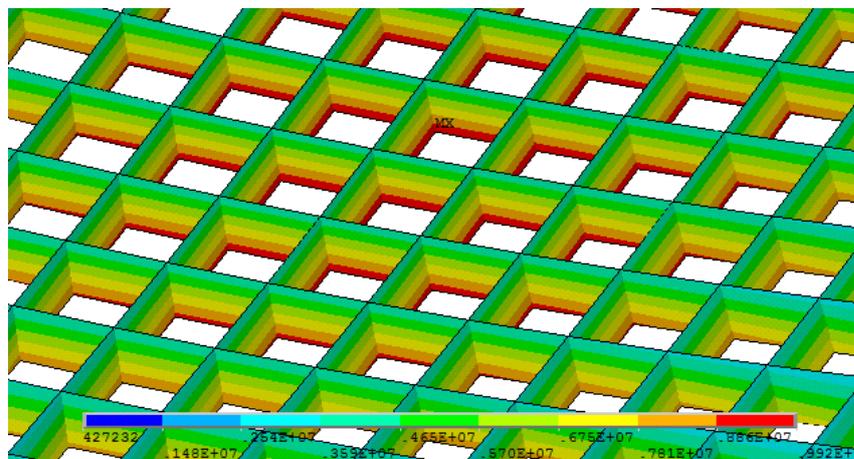


Figura 57 – Variação da tensão de flexão nas nervuras.

A Figura 58 representa os resultados no modelo II e a Figura 59 representa um detalhe dessa variação na nervura.

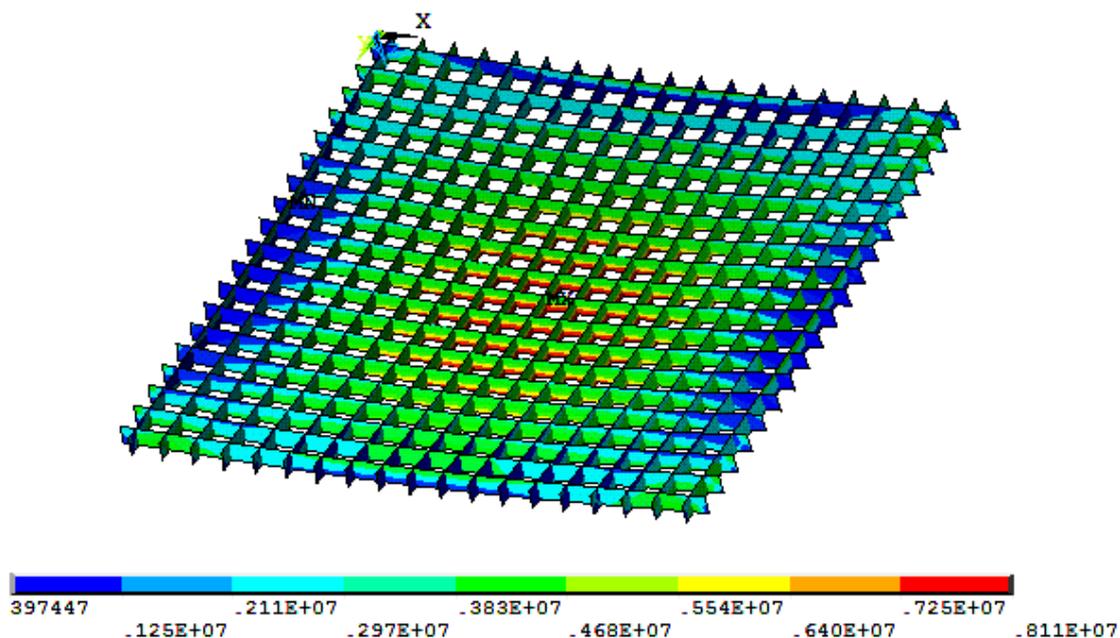


Figura 58 – Variação da tensão de flexão nas nervuras Modelo II (0,15 x 0,70).

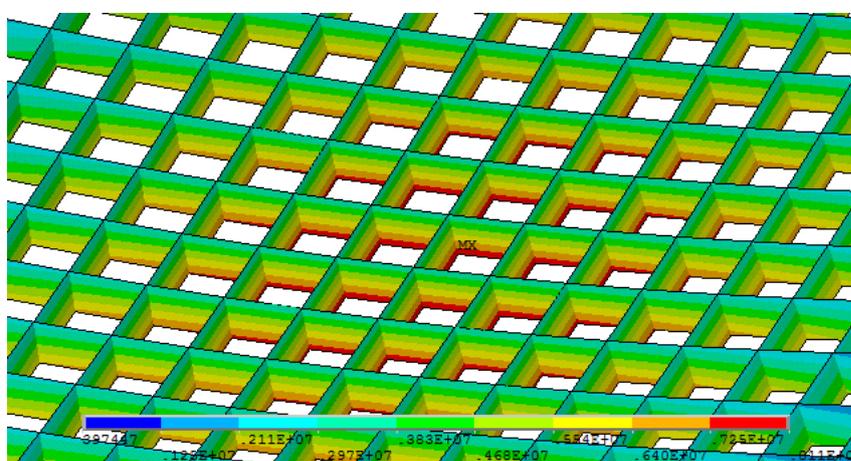


Figura 59 – Variação da tensão de flexão nas nervuras.

Das análises feitas pode ser verificado que os valores das tensões máximas tendem a diminuir na medida em que aumenta a inércia das vigas de bordo. Foi verificado, também, que na medida em que as vigas de bordo do sistema tornam-se mais rígidas (15x50 cm até 15x100 cm), a diferença entre os valores das tensões, para uma mesma relação de vão, tende a ser menor, ocorrendo com maior incidência nas tensões de compressão.

6 ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO

6.1 Generalidades

Neste capítulo serão analisadas as frequências naturais e os modos de vibrações de cada modelo. O estudo da resposta dinâmica dos modelos investigados é obtido primeiramente com as frequências e os modos de vibrações. Posteriormente, com o intuito de analisar os níveis de aceitação de conforto humano serão verificadas as acelerações de pico correspondentes às taxas de ocupação em cada modelo.

Com o auxílio do *software* Ansys [25] foi possível determinar todas as frequências naturais e modos de vibrações dos modelos.

6.1 Análise das frequências naturais (Autovalores)

De acordo com as análises de vibração livre realizadas, pelo programa Ansys [25], sobre os modelos estruturais apresentados, foram obtidos os valores das frequências naturais (autovalores) e os modos de vibração (autovetores).

Na análise foram obtidos os valores das frequências naturais até o oitavo modo de vibração para cada modelo investigado. Os valores de cada frequência estão representados nas Tabelas 34 a 41.

Na análise dos valores apresentados nas tabelas, verifica-se que a partir do aumento da rigidez dos apoios das lajes nervuradas (efeito das vigas de bordo), os valores das frequências naturais tendem a aumentar.

Verifica-se, também, que alguns dos modelos estruturais investigados teriam limitações, a alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações induzidas pela ação dinâmica de pessoas, devido ao fato de que o valor da frequência fundamental destes modelos (f_{01}), para determinadas situações, é inferior ao valor da frequência crítica ($f_{01} < 1,2f_{crit}$) recomendada pela norma brasileira NBR 6118:2007 [8] de acordo com a Tabela 42.

Tabela 34 – Frequências naturais – Modelo II - (8,50 x 8,50) m

Modelo II – (8,50 x 8,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,15 x 0,50	6,89	12,48	12,48	17,05	23,85	27,79	28,33	28,33
0,15 x 0,55	7,14	13,30	13,30	17,99	24,75	28,85	28,85	28,88
0,15 x 0,60	7,39	14,22	14,22	19,18	25,89	29,59	29,59	29,84
0,15 x 0,65	7,60	15,10	15,10	20,39	27,05	30,14	30,14	30,66
0,15 x 0,70	7,79	15,92	15,92	21,59	28,20	30,40	30,40	31,35
0,15 x 0,75	7,95	16,68	16,68	22,79	29,34	30,28	30,28	31,93
0,15 x 0,80	8,08	17,39	17,39	23,97	29,74	29,74	30,45	32,42
0,15 x 0,85	8,20	18,04	18,04	25,10	28,21	28,21	31,28	31,46
0,15 x 0,90	8,31	18,62	18,62	26,12	27,65	27,65	29,32	30,79
0,15 x 0,95	8,40	19,16	19,16	26,40	26,40	26,41	28,32	29,01
0,15 x 1,00	8,48	19,64	19,64	25,15	25,15	25,27	27,41	28,94

Tabela 35 – Frequências naturais – Modelo II - (8,50 x 8,50) m

Modelo II – (8,50 x 8,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,20 x 0,50	7,12	12,89	12,89	17,13	23,93	28,40	29,74	29,74
0,20 x 0,55	7,39	13,78	13,78	18,17	24,91	29,52	30,67	30,67
0,20 x 0,60	7,64	14,74	14,74	19,41	26,08	30,47	31,71	31,71
0,20 x 0,65	7,85	15,64	15,64	20,66	27,26	31,27	32,49	32,49
0,20 x 0,70	8,03	16,48	16,48	21,90	28,44	31,94	32,75	32,75
0,20 x 0,75	8,19	17,27	17,26	23,14	29,61	32,50	32,62	32,62
0,20 x 0,80	8,32	17,97	17,97	24,35	30,75	32,20	32,20	32,96
0,20 x 0,85	8,43	18,62	18,62	25,54	31,53	31,53	31,86	33,36
0,20 x 0,90	8,53	19,20	19,20	26,66	30,61	30,61	32,71	32,94
0,20 x 0,95	8,62	19,73	19,73	27,63	19,55	19,55	31,04	33,46
0,20 x 1,00	8,70	20,20	20,20	27,93	28,42	28,42	30,21	31,80

Tabela 36: – Frequências naturais – Modelo III - (9,50 x 9,50) m

Modelo III – (9,50 x 9,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,15 x 0,50	5,47	9,93	9,93	13,66	19,17	22,20	23,52	23,52
0,15 x 0,55	5,68	10,59	10,59	14,43	19,90	23,09	24,18	24,18
0,15 x 0,60	5,88	11,33	11,33	15,39	20,83	23,87	25,00	25,00
0,15 x 0,65	6,07	12,04	12,04	16,36	21,77	24,54	25,73	25,73
0,15 x 0,70	6,21	12,71	12,71	17,34	22,73	25,11	26,24	26,24
0,15 x 0,75	6,34	13,33	13,33	18,33	23,67	25,59	26,44	26,44
0,15 x 0,80	6,45	13,90	13,90	19,29	24,59	25,99	26,30	26,30
0,15 x 0,85	6,55	14,43	14,43	20,25	25,49	25,86	25,86	26,34
0,15 x 0,90	6,63	14,91	14,91	21,17	25,14	25,14	26,36	26,63
0,15 x 0,95	6,71	15,34	15,34	22,05	24,21	24,21	25,77	26,87
0,15 x 1,00	6,78	15,73	15,73	22,74	23,19	23,19	24,42	25,48

Tabela 37 – Frequências naturais – Modelo III - (9,50 x 9,50) m

Modelo III – (9,50 x 9,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,20 x 0,50	5,66	10,26	10,26	13,74	19,28	22,69	24,42	24,42
0,20 x 0,55	5,88	10,98	10,98	14,59	20,08	23,60	25,33	25,33
0,20 x 0,60	6,08	11,75	11,75	15,59	21,04	24,38	26,29	26,29
0,20 x 0,65	6,26	12,47	12,47	16,59	22,00	25,04	27,20	27,20
0,20 x 0,70	6,41	13,16	13,16	17,61	22,97	25,59	27,88	27,88
0,20 x 0,75	6,53	13,79	13,79	18,62	23,94	26,05	27,98	27,98
0,20 x 0,80	6,65	14,37	14,37	19,61	24,88	26,44	27,90	27,90
0,20 x 0,85	6,75	14,89	14,89	20,59	25,80	26,76	27,65	27,65
0,20 x 0,90	6,83	15,37	15,37	21,55	26,97	27,05	27,17	27,17
0,20 x 0,95	6,90	15,80	15,80	22,47	26,48	26,48	27,28	27,56
0,20 x 1,00	6,97	16,18	16,18	23,32	25,63	25,63	26,91	27,49

Tabela 38 – Frequências naturais – Modelo IV - (10,50 x 10,50) m

Modelo IV – (10,50 x 10,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,15 x 0,50	4,45	8,07	8,07	11,18	15,72	18,12	19,69	19,69
0,15 x 0,55	4,62	8,62	8,62	11,82	16,33	18,56	20,37	20,37
0,15 x 0,60	4,78	9,22	9,22	12,60	17,09	19,51	21,55	21,55
0,15 x 0,65	4,93	9,81	9,81	13,41	17,88	20,07	21,92	21,92
0,15 x 0,70	5,05	10,35	10,35	14,22	18,67	20,54	22,63	22,63
0,15 x 0,75	5,16	10,87	10,87	15,03	19,46	20,94	23,14	23,14
0,15 x 0,80	5,26	11,34	11,34	15,83	20,23	21,28	23,22	23,22
0,15 x 0,85	5,34	11,78	11,78	16,63	20,99	21,57	23,08	23,08
0,15 x 0,90	5,42	12,18	12,18	17,42	21,73	21,83	22,73	22,73
0,15 x 0,95	5,48	12,35	12,35	18,17	22,04	22,18	22,18	22,45
0,15 x 1,00	5,54	12,86	12,86	18,91	21,46	21,46	22,22	22,96

Tabela 39 – Frequências naturais – Modelo IV - (10,50 x 10,50) m

Modelo IV – (10,50 x 10,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,20 x 0,50	4,60	8,35	8,35	11,26	15,84	18,53	20,29	20,29
0,20 x 0,55	4,78	8,94	8,94	11,97	16,52	19,28	21,07	21,07
0,20 x 0,60	4,96	9,57	9,57	12,78	17,30	19,30	21,84	21,84
0,20 x 0,65	5,10	10,16	10,16	13,62	18,11	20,48	22,53	22,53
0,20 x 0,70	5,23	10,73	10,73	14,45	18,92	20,94	23,09	23,09
0,20 x 0,75	5,34	11,25	11,25	15,28	19,72	21,33	23,52	23,52
0,20 x 0,80	5,43	11,73	11,73	16,11	20,51	21,66	23,80	23,80
0,20 x 0,85	5,51	12,16	12,16	16,93	21,29	21,93	23,95	23,95
0,20 x 0,90	5,58	12,56	12,56	17,73	22,04	22,17	23,92	23,92
0,20 x 0,95	5,64	12,92	12,92	18,51	22,37	22,76	23,66	23,66
0,20 x 1,00	5,70	13,23	13,23	19,27	22,54	23,18	23,18	23,46

Tabela 40 – Frequências naturais – Modelo V - (11,50 x 11,50) m

Modelo V – (11,50 x 11,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,15 x 0,50	3,68	6,68	6,68	9,31	13,11	15,06	16,65	16,65
0,15 x 0,55	3,82	7,14	7,14	9,85	13,62	15,67	17,28	17,28
0,15 x 0,60	3,97	7,65	7,65	10,51	14,26	16,23	17,96	17,96
0,15 x 0,65	4,09	8,13	8,13	11,17	14,92	16,70	18,64	18,64
0,15 x 0,70	4,20	8,59	8,59	11,85	15,87	17,10	19,29	19,29
0,15 x 0,75	4,29	9,02	9,02	12,53	16,25	17,44	19,91	19,91
0,15 x 0,80	4,37	9,42	9,42	13,21	16,92	17,74	20,32	20,32
0,15 x 0,85	4,44	9,79	9,79	13,88	17,56	17,98	20,40	20,40
0,15 x 0,90	4,50	10,12	10,12	14,54	18,19	18,19	20,35	20,35
0,15 x 0,95	4,56	10,42	10,42	15,19	18,38	18,80	20,15	20,15
0,15 x 1,00	4,60	10,69	10,69	15,83	18,53	19,39	19,76	19,76

Tabela 41 – Frequências naturais – Modelo V - (11,50 x 11,50) m

Modelo V – (11,50 x 11,50) m								
Viga de Bordo (m)	f ₀₁ (Hz)	f ₀₂ (Hz)	f ₀₃ (Hz)	f ₀₄ (Hz)	f ₀₅ (Hz)	f ₀₆ (Hz)	f ₀₇ (Hz)	f ₀₈ (Hz)
0,20 x 0,50	3,81	6,91	6,91	9,39	13,24	15,40	17,07	17,07
0,20 x 0,55	3,96	7,40	7,40	9,98	13,81	16,03	17,27	17,27
0,20 x 0,60	4,11	7,93	7,93	10,66	14,47	16,58	18,36	18,36
0,20 x 0,65	4,23	8,43	8,43	11,36	15,144	17,05	18,93	18,93
0,20 x 0,70	4,34	8,90	8,90	12,05	15,83	17,44	19,42	19,42
0,20 x 0,75	4,43	9,34	9,34	12,75	16,51	17,77	19,84	19,84
0,20 x 0,80	4,51	9,74	9,74	13,45	17,18	18,05	20,20	20,20
0,20 x 0,85	4,58	10,11	10,11	14,42	17,83	18,28	20,52	20,52
0,20 x 0,90	4,64	10,44	10,44	14,82	18,47	18,49	20,75	20,75
0,20 x 0,95	4,69	10,74	10,74	15,49	18,66	19,09	20,86	20,86
0,20 x 1,00	4,75	11,01	11,01	16,14	18,82	19,68	20,79	20,79

Tabela 42 – Frequência crítica para estruturas de concreto NBR6118:2007 [8]

Caso	f_{crit} (Hz)
Ginásio de esporte	8,0
Sala de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Escritórios	3,0 a 4,0
Sala de concerto com cadeiras fixas	3,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	1,6 a 4,5

Verifica-se que as menores frequências foram obtidas para os casos de lajes com vãos maiores, o que indica o comportamento esperado, pois nesses casos, as lajes são mais flexíveis que as demais.

Também se pode concluir que, em quase todas as lajes investigadas, foram verificadas valores de frequência natural abaixo do valor limitado pela NBR 6118:2007 [8] ($f_{01} < 1,2f_{crit}$), conforme Tabela 42, o que pode causar possíveis problemas de vibração. Os gráficos da Figura 60 a Figura 63 apresentam a análise da variação das frequências em função da rigidez das vigas de bordo para cada modelo.

Observa-se, de forma semelhante à análise das flechas e esforços, uma variação não linear dos valores máximos destas frequências onde ocorre um aumento destes valores em relação à variação da altura da viga de bordo, devido à influência da rigidez dessas vigas sobre cada modelo numérico, a qual é modificada em função do aumento da altura da viga de bordo.

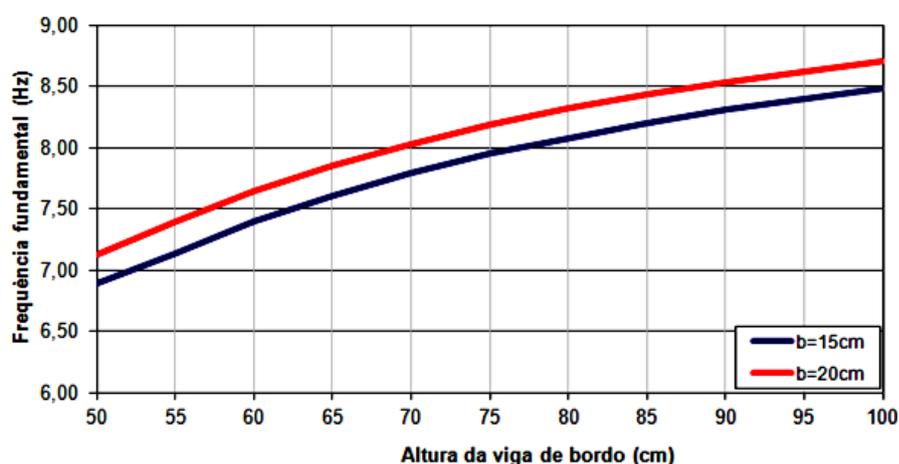


Figura 60 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo II - (8,50 x 8,50) m

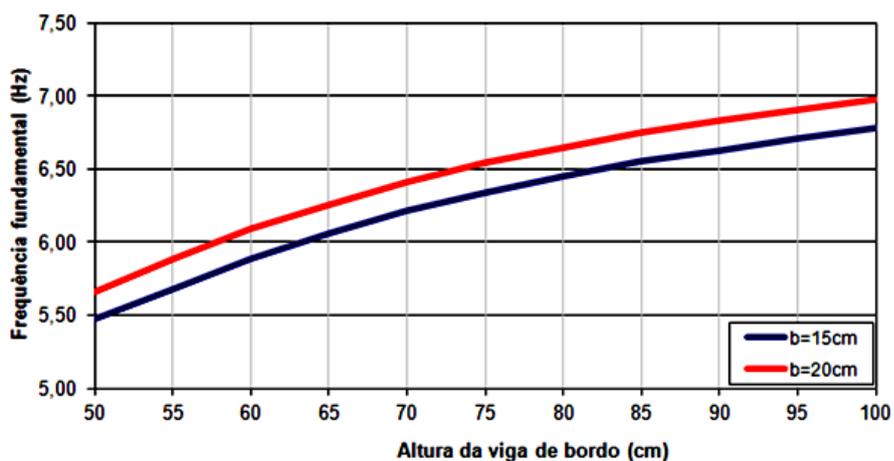


Figura 61 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo III - (9,50 x 9,50) m

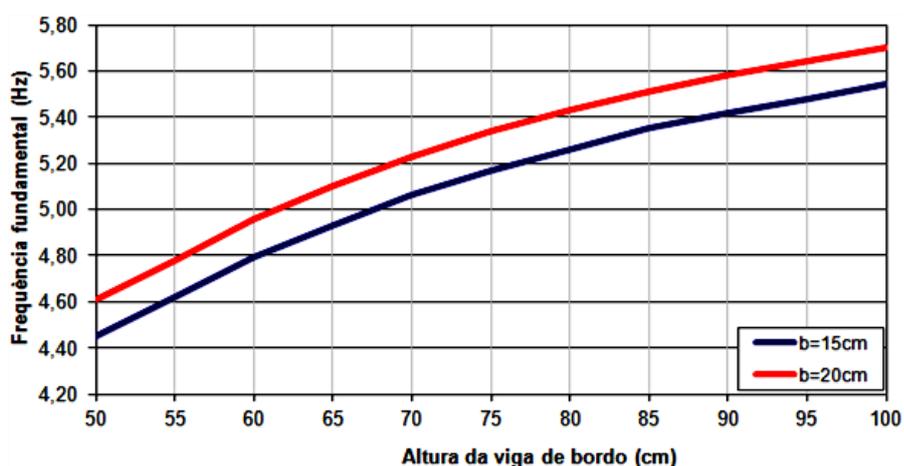


Figura 62 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m

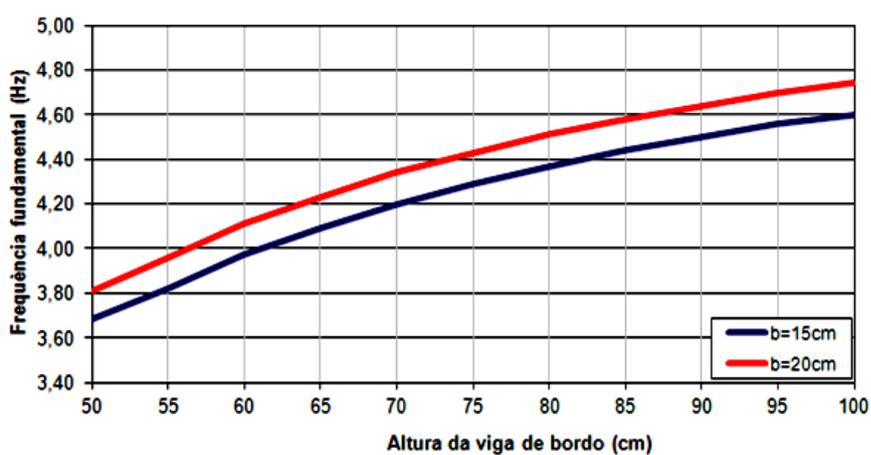
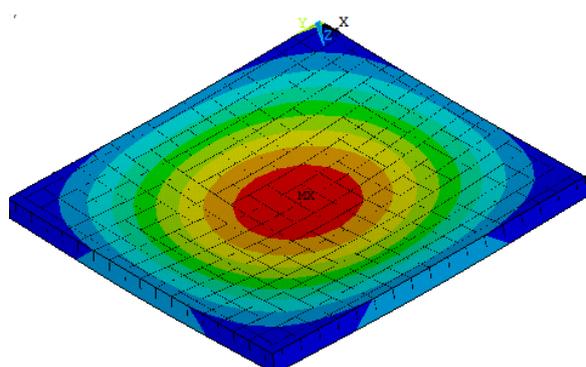


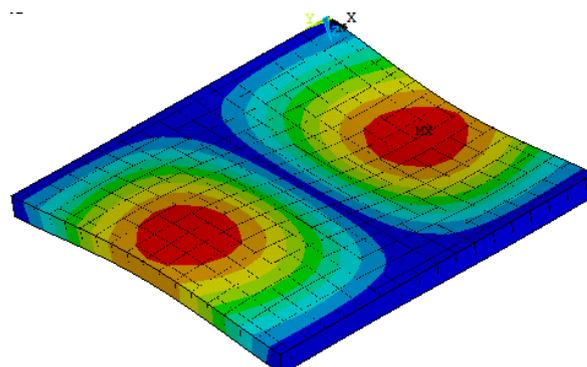
Figura 63 – Variação das frequências naturais em função da altura de bordo do Modelo V - (11,50 x 11,50) m

6.2 Análise dos modos de vibração (Autovetores)

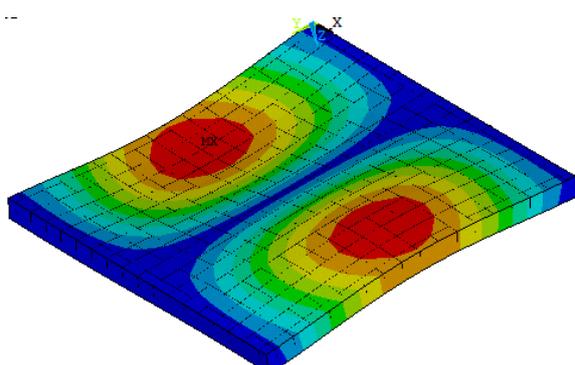
A Figura 64 mostra os primeiros modos de vibração do Modelo II – (8,50 x 8,50) m com vigas de bordo (0,15 x 0,50) m.



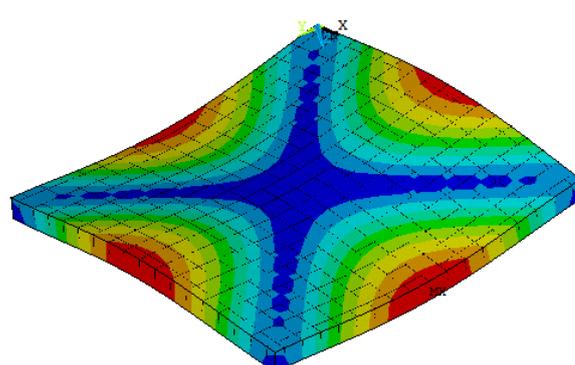
a) Modo de vibração: $f_{01} = 6,89$ Hz



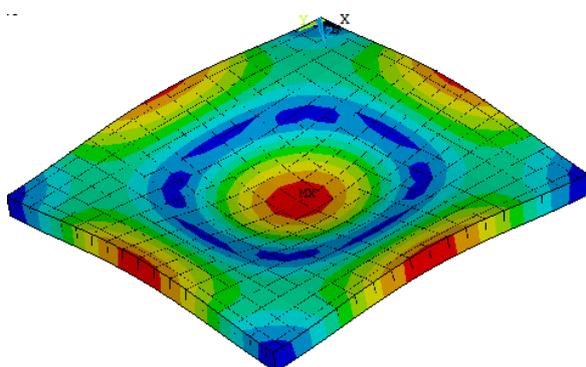
b) Modo de vibração: $f_{02} = 12,48$ Hz



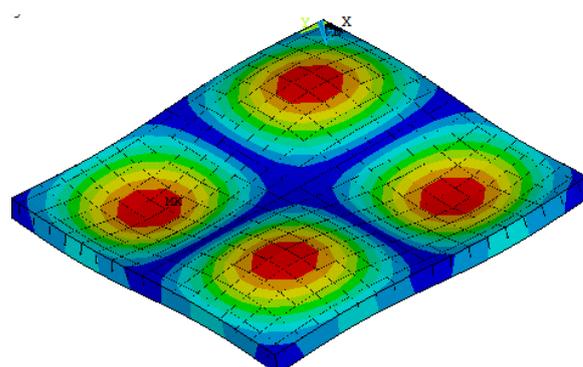
a) Modo de vibração: $f_{03} = 12,48$ Hz



b) Modo de vibração: $f_{04} = 17,53$ Hz



a) Modo de vibração: $f_{05} = 23,86$ Hz



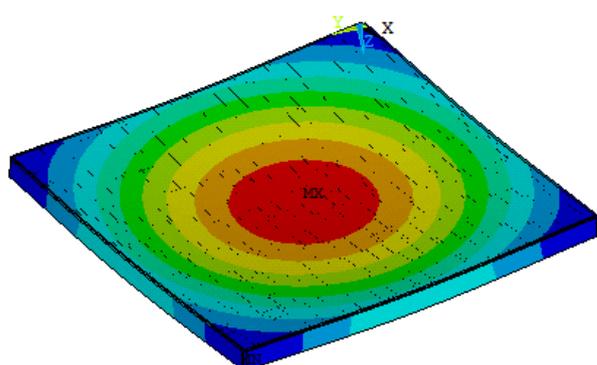
b) Modo de vibração: $f_{06} = 27,79$ Hz

Figura 64 – Modos de vibração do Modelo II - (8,50 x 8,50) m

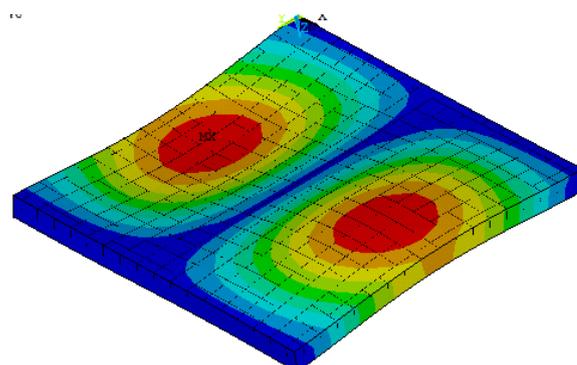
A primeira frequência natural foi de 6,89 Hz associada ao primeiro modo de vibração com predominância de efeitos de flexão. A segunda frequência e a terceira

frequência apresentaram valores iguais de 12,48 Hz, observou-se que ambas correspondem ao modo de flexão, sendo simétricas. A quarta frequência natural foi de 17,05 Hz. A quinta frequência foi de 23,85 Hz e a sexta frequência natural de 27,79 Hz.

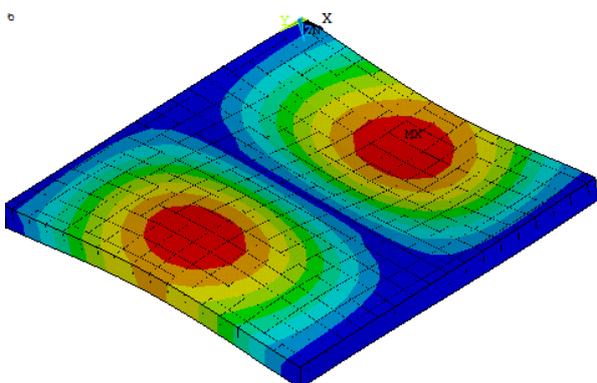
A Figura 65 mostram-se os valores das primeiras frequências naturais e os primeiros modos de vibração do Modelo III (com viga de bordo de 0,15 x 0,50 m).



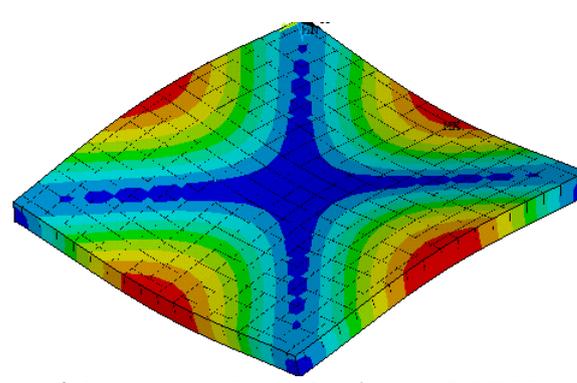
a) Modo de vibração: $f_{01} = 5,47$ Hz



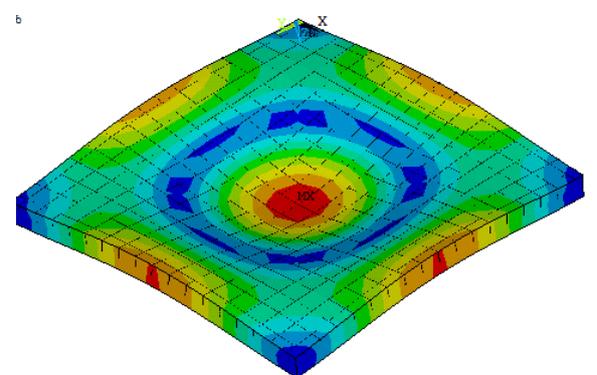
b) Modo de vibração: $f_{02} = 9,93$ Hz



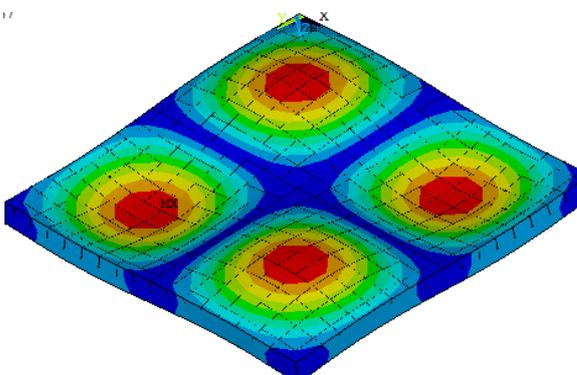
a) Modo de vibração: $f_{03} = 9,93$ Hz



b) Modo de vibração: $f_{04} = 13,66$ Hz



a) Modo de vibração: $f_{05} = 19,16$ Hz



b) Modo de vibração: $f_{06} = 22,20$ Hz

Figura 65 – Modos de vibração do Modelo III - (9,50 x 9,50) m

De maneira semelhante ao Modelo II, a primeira frequência natural foi de 5,47 Hz associada ao primeiro modo de vibração com predominância de efeitos de flexão. A segunda frequência e a terceira frequência apresentaram valores iguais de 9,93 Hz, observou-se que ambas correspondem ao modo de flexão, sendo simétricas. A quarta frequência natural foi de 13,65 Hz. A quinta frequência natural foi de 19,16 Hz, e a sexta frequência natural, no valor de 22,20 Hz. As Figuras 66 e 67 apresentam os modos de vibrações dos modelos IV e V, respectivamente.

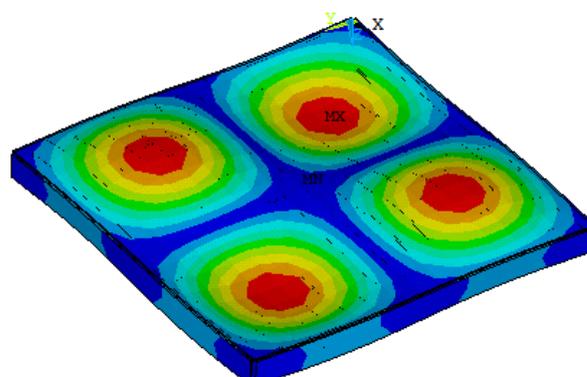
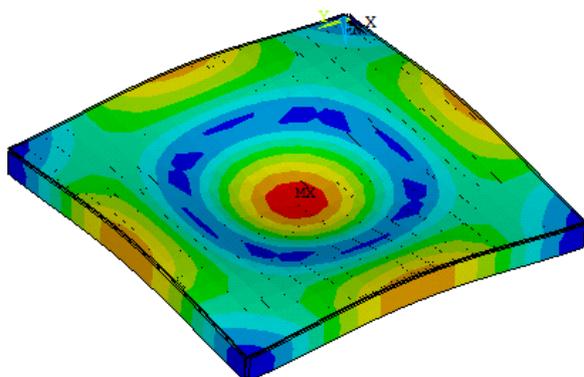
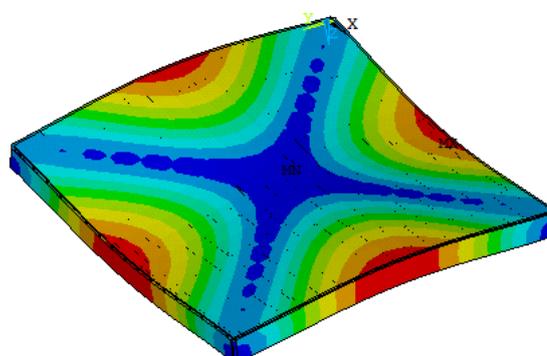
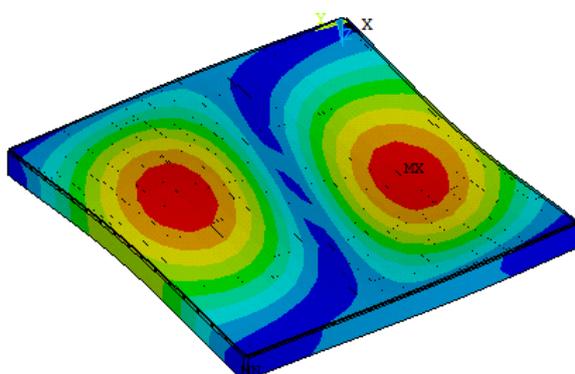
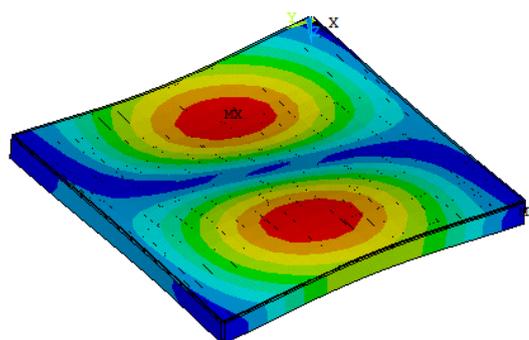
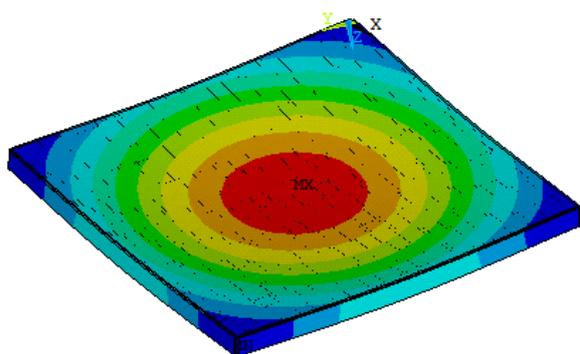


Figura 66 – Modos de vibração do Modelo IV - (10,50 x 10,50) m

De maneira semelhante aos modelos anteriores, a primeira frequência natural foi de 4,45 Hz associada ao primeiro modo de vibração com predominância de efeitos de flexão. A segunda frequência e a terceira frequência apresentaram valores iguais de 8,07 Hz, observou-se também que ambas correspondem ao modo de flexão, sendo simétricas. A quarta frequência natural foi de 11,18 Hz. A quinta frequência natural foi de 15,71 Hz e a sexta frequência natural, no valor de 18,13 Hz.

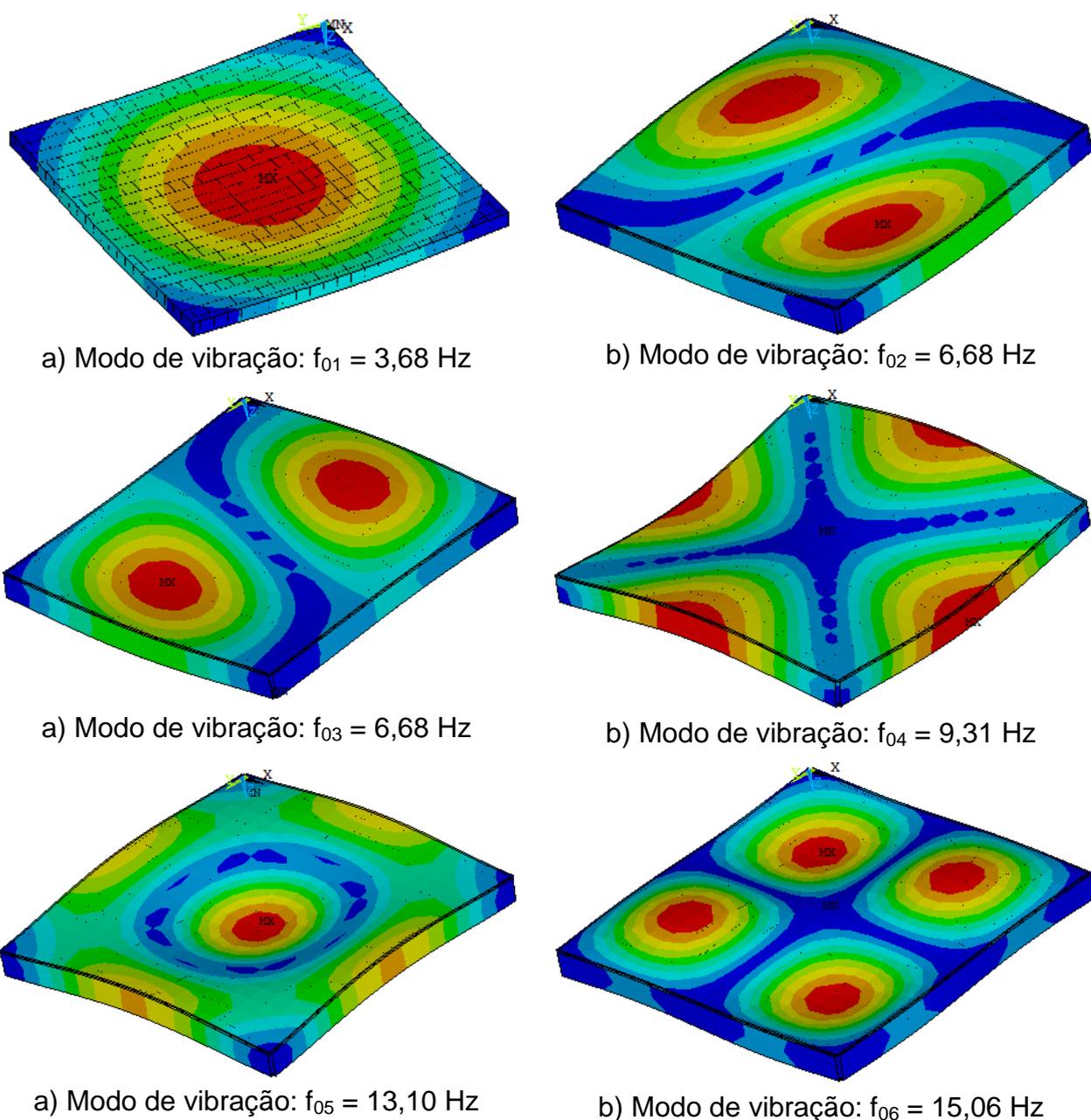


Figura 67 – Modos de vibração do Modelo V - (11,50 x 11,50) m

Verifica-se que os modelos estruturais com maiores vãos (10,50 x 10,50) m e (11,50 x 11,50) m são os mais flexíveis, de acordo com as análises preliminares de autovalores e autovetores apresentadas. Estes modelos mostraram-se mais suscetíveis a problemas de vibração excessiva, pois o valor da frequência fundamental dos pisos diminui sensivelmente com o aumento do vão, e percebeu-se também que o aumento da inércia das vigas de bordo contribui para o aumento da rigidez das lajes, aumentando assim, as frequências naturais do sistema.

Nas análises dos resultados foi possível verificar que os modos de vibração de todos os modelos são de uma forma geral, bastante semelhante não apresentando mudanças significativas. Portanto, conclui-se que o efeito das vigas de bordo influencia diretamente nos valores das frequências naturais, mas não possui influência significativa, no que se refere às formas modais dos modelos investigados.

7 ANÁLISE DO CONFORTO HUMANO

7.1 Generalidades

Este capítulo apresenta a análise dinâmica dos modelos estruturais estudados com a finalidade de avaliar a adequabilidade do sistema de lajes nervuradas submetidas a atividades rítmicas humanas (ginástica aeróbica), no que tange ao desconforto humano oriundo das vibrações.

Todas as análises foram realizadas com auxílio do *software* Ansys [25]. Os resultados das análises de vibração forçada são obtidos em termos dos deslocamentos e acelerações máximas no centro do vão da laje, provenientes da aplicação dos carregamentos dinâmicos definidos no capítulo III. Os resultados obtidos, em termos das acelerações máximas, são comparados com os valores limites para o conforto humano. Esses valores limites são fornecidos por recomendações técnicas internacionais: Murray et al. [32].

7.2 Parâmetros Iniciais

Para conhecimento, no estudo, foram realizadas 396 (trezentas e noventa e seis) análises de carregamento, sendo que foram feitas 88 análises para os Modelos II e III e 110 análises para os Modelos IV e V.

Para os Modelos II e III foram considerados carregamentos com 1 pessoa, 5 pessoas, 13 pessoas e 16 pessoas distribuídos uniformemente em toda a área de laje conforme Figuras 17 a 38 do capítulo III. Essa distribuição obedeceu à taxa de ocupação definida por Bachmann e Ammann [35] de 0,25 pessoas/m², sendo todos os casos considerados para atividades rítmicas de ginástica aeróbica. Para os Modelos IV e V foram feitas as mesmas considerações anteriores sendo que foram adotados carregamentos com 1 pessoa, 5 pessoas, 11 pessoas, 16 pessoas e 25 pessoas, devido a maior área.

Os parâmetros utilizados nas análises foram parâmetros médios: $T_{\text{médio}} = 0,44\text{s}$, $T_c = 0,34\text{s}$ e $K_p = 2,78$, conforme Tabela 3 do capítulo II e o CD variando com número de pessoas correspondente de acordo com a Figura 12 do capítulo II. Os valores de CD foram obtidos e constam na Tabela 4 do mesmo capítulo. O peso do ser humano utilizado como parâmetro foi de 800N (peso médio) e o amortecimento estrutural igual a 3% ($\xi = 3\% = 0,03$), pois leva em consideração a pouca existência de elementos que contribuem para o amortecimento. O intervalo de integração utilizado nas análises numéricas foi igual a $\Delta t = 0,002\text{ s}$ ($\Delta t = 2 \times 10^{-3}\text{ s} = 0,002\text{s}$). Esse intervalo foi definido pois atende às características e representações de todos os modelos estudados.

As Figura 68 a 73 apresentam os gráficos com os valores dos deslocamentos translacionais e acelerações em função do tempo (t) para laje do Modelo IV (10,50x10,50) m com viga de bordo de (0,15x0,75) m, para os casos de carregamento ilustrados no capítulo III. Em todos os gráficos analisados, verifica-se nos primeiros segundos uma zona transiente na qual há picos com valores não uniformes e o que com o tempo, devido ao amortecimento, atingem uma zona permanente.

Para melhor entendimento dos resultados obtidos, neste capítulo será feita uma análise quantitativa e qualitativa dos dados. Na análise quantitativa serão apresentados os resultados em tabelas de todos os modelos. Na análise qualitativa será verificada a evolução das acelerações de pico através de gráficos.

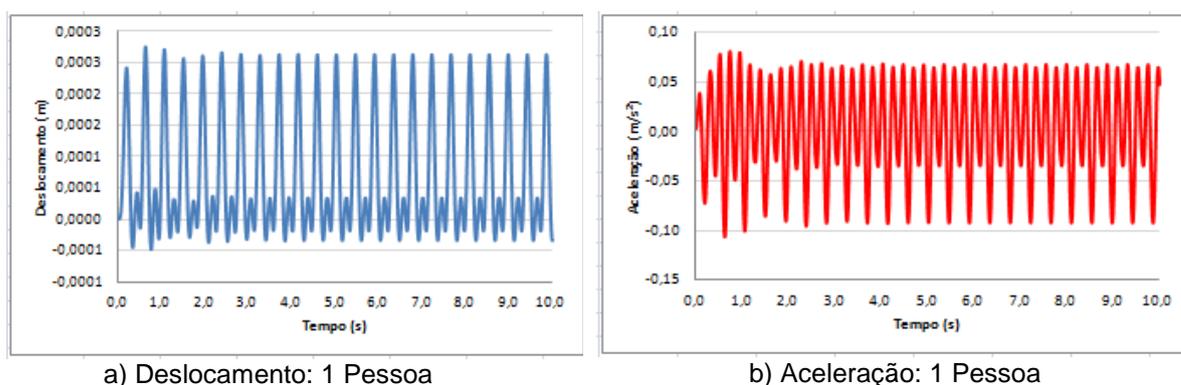


Figura 68 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 1 pessoa

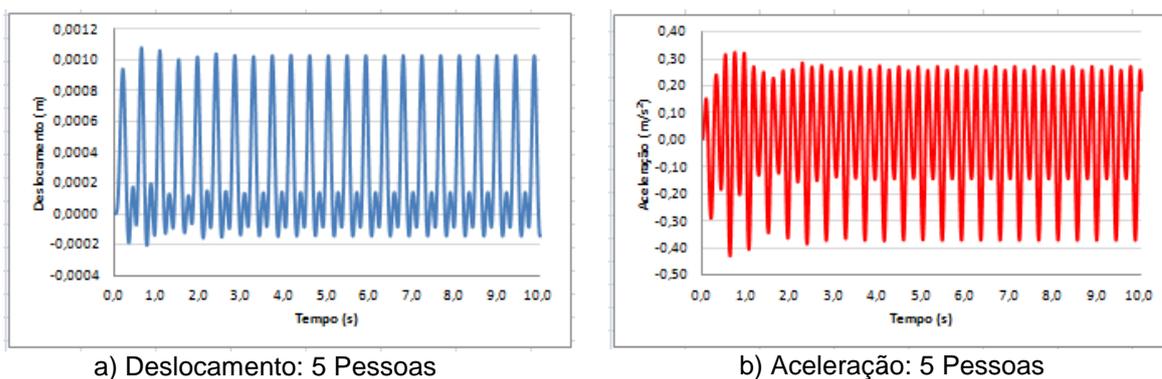


Figura 69 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 5 pessoas

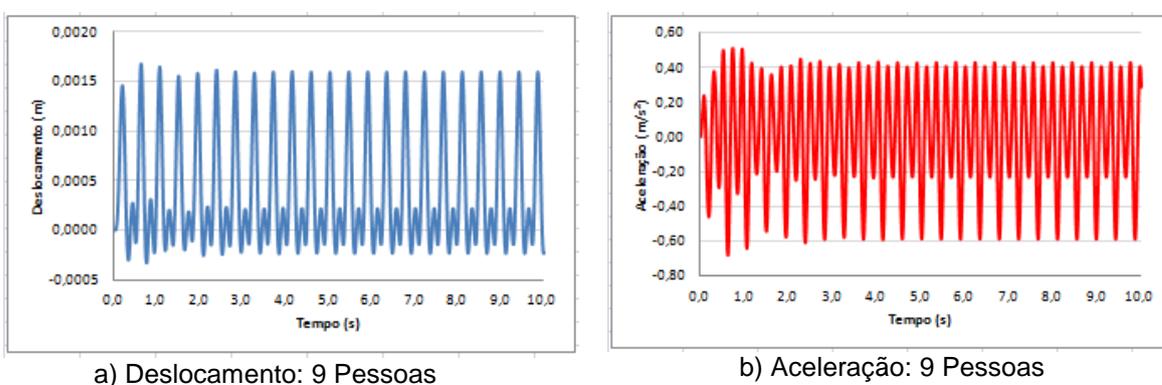


Figura 70 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 9 pessoas

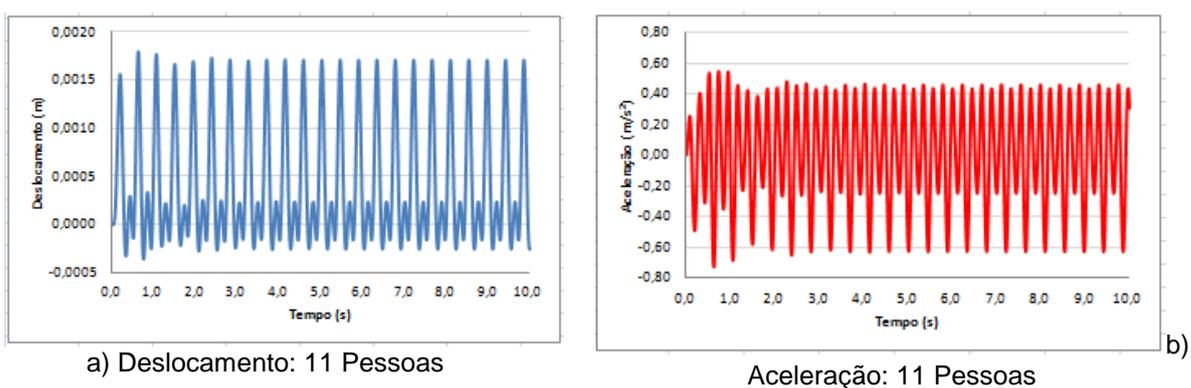


Figura 71 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 11 pessoas

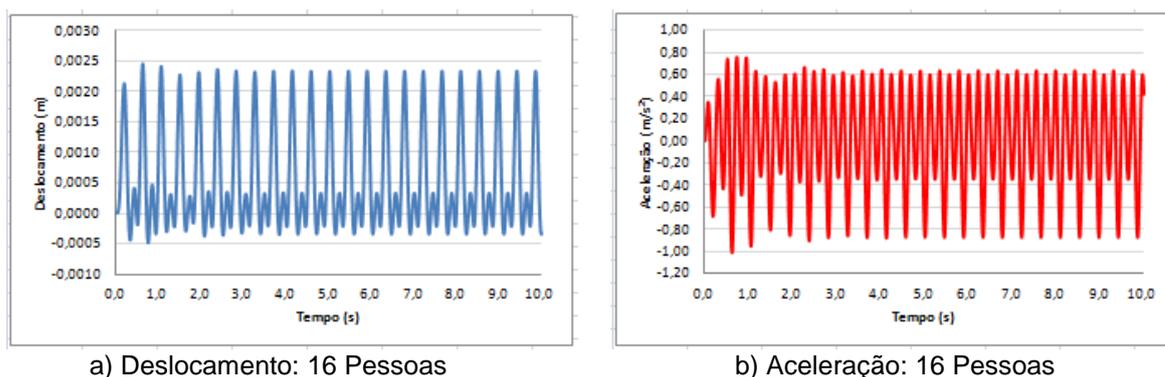


Figura 72 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 16 pessoas

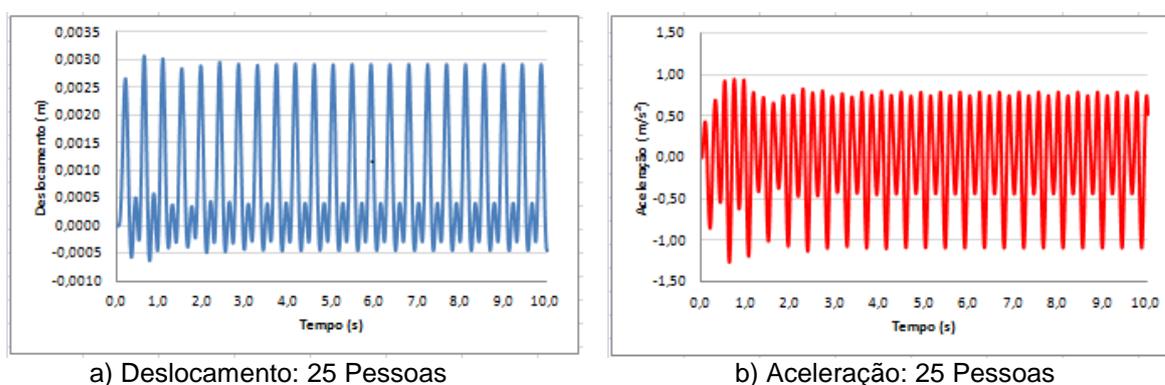


Figura 73 – Deslocamentos e acelerações no centro da laje - Modelo IV – 25 pessoas

Quanto à verificação dos sinais no tempo nas figuras anteriores, em termos de deslocamentos e acelerações, apresentam um trecho relativamente curto, da ordem 1,5s que corresponde a fase transiente da resposta. Como se pode observar nos gráficos nesse trecho há picos com valores mais elevados que não apresentam uniformidades, mas com o tempo, devido ao amortecimento, atingem a fase permanente.

Nas figuras pode-se observar também que os valores de deslocamentos e acelerações aumentam com o aumento do carregamento visto que os valores máximos ocorreram para carregamento com 25 pessoas.

Comparando o mesmo modelo e o número de pessoas com valores das vigas de bordo percebe-se que os valores de deslocamentos e acelerações diminuíram com o aumento da rigidez das vigas. Esses valores ocorreram devido ao aumento da rigidez do sistema.

7.3 Análise quantitativa das acelerações de pico

Serão apresentados os valores de acelerações de pico (aceleração máxima) nos modelos estudados, de acordo com a distribuição de carregamento do Capítulo III.

Com o objetivo de avaliar a influência das vigas de bordo e do aumento considerável dos vãos das lajes, as respostas dinâmicas em termos de aceleração máxima foram obtidas no centro dos vãos e dessa forma, foram analisadas as variações de valores para mesma laje com diferentes vigas de bordo. As Tabelas 43 a 50 apresentam os valores de acelerações de pico dos modelos. As acelerações que se encontram hachuradas nas tabelas a seguir referem-se àquelas cujos valores de acelerações de pico obtidos nesta investigação encontram-se acima do limite estabelecido em normas e recomendações de projetos ($a_{lim}=0,5m/s^2$) [32].

Com relação às acelerações máximas (acelerações de pico) obtidas nessas análises, verifica-se que aumentando a inércia das vigas de bordo, houve uma grande diminuição nas acelerações de pico, e a diferença entre essas acelerações tende a diminuir com o aumento da inércia das vigas de bordo.

Tabela 43 – Valores acelerações do Modelo II (8,50 x 8,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)				
	Número de Pessoas				
	1	5	9	13	16
0,15 x 0,50	0,0597	0,238	0,360	0,436	0,525
0,15 x 0,55	0,0581	0,229	0,344	0,422	0,503
0,15 x 0,60	0,0421	0,163	0,243	0,396	0,354
0,15 x 0,65	0,0355	0,135	0,199	0,249	0,286
0,15 x 0,70	0,0323	0,121	0,175	0,218	0,251
0,15 x 0,75	0,0303	0,112	0,161	0,199	0,229
0,15 x 0,80	0,0289	0,106	0,152	0,187	0,215
0,15 x 0,85	0,0281	0,102	0,146	0,179	0,206
0,15 x 0,90	0,0276	0,101	0,140	0,174	0,199
0,15 x 0,95	0,0275	0,0991	0,139	0,172	0,195
0,15 x 1,00	0,0274	0,0989	0,133	0,168	0,192

Tabela 44 – Valores acelerações do Modelo II (8,50 x 8,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)				
	Número de Pessoas				
	1	5	9	13	16
0,20 x 0,50	0,0491	0,181	0,250	0,251	0,351
0,20 x 0,55	0,0422	0,162	0,241	0,241	0,292
0,20 x 0,60	0,0338	0,132	0,192	0,24	0,278
0,20 x 0,65	0,0306	0,115	0,167	0,209	0,241
0,20 x 0,70	0,0291	0,107	0,154	0,193	0,219
0,20 x 0,75	0,0279	0,102	0,145	0,179	0,205
0,20 x 0,80	0,0271	0,0987	0,141	0,172	0,197
0,20 x 0,85	0,0269	0,0973	0,138	0,169	0,194
0,20 x 0,90	0,0272	0,0979	0,135	0,168	0,192
0,20 x 0,95	0,0272	0,0989	0,132	0,166	0,19
0,20 x 1,00	0,0271	0,0979	0,129	0,162	0,188

Tabela 45 – Valores acelerações do Modelo III (9,50 x 9,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)				
	Número de Pessoas				
	1	5	9	13	16
0,15 x 0,50	0,0954	0,378	0,567	0,721	0,840
0,15 x 0,55	0,0859	0,343	0,517	0,658	0,767
0,15 x 0,60	0,0731	0,294	0,444	0,567	0,661
0,15 x 0,65	0,0615	0,247	0,374	0,469	0,559
0,15 x 0,70	0,0613	0,210	0,319	0,408	0,477
0,15 x 0,75	0,0595	0,197	0,305	0,395	0,463
0,15 x 0,80	0,0524	0,184	0,279	0,357	0,417
0,15 x 0,85	0,0485	0,172	0,265	0,342	0,401
0,15 x 0,90	0,0479	0,169	0,255	0,326	0,380
0,15 x 0,95	0,0461	0,160	0,245	0,315	0,369
0,15 x 1,00	0,0423	0,157	0,241	0,307	0,352

Tabela 46 – Valores acelerações do Modelo III (9,50 x 9,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)				
	Número de Pessoas				
	1	5	9	13	16
0,20 x 0,50	0,0839	0,365	0,544	0,712	0,829
0,20 x 0,55	0,0820	0,328	0,499	0,643	0,720
0,20 x 0,60	0,0701	0,241	0,436	0,558	0,602
0,20 x 0,65	0,0599	0,198	0,369	0,446	0,523
0,20 x 0,70	0,0580	0,186	0,306	0,399	0,441
0,20 x 0,75	0,0576	0,154	0,286	0,386	0,425
0,20 x 0,80	0,0515	0,136	0,266	0,341	0,399
0,20 x 0,85	0,0476	0,128	0,258	0,326	0,374
0,20 x 0,90	0,0428	0,122	0,238	0,312	0,355
0,20 x 0,95	0,0393	0,105	0,233	0,301	0,321
0,20 x 1,00	0,0388	0,0991	0,221	0,298	0,313

Tabela 47 – Valores acelerações do Modelo IV (10,50 x 10,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)					
	Número de Pessoas					
	1	5	9	11	16	25
0,15 x 0,50	0,238	0,952	1,638	1,810	2,519	3,252
0,15 x 0,55	0,248	0,873	1,654	1,830	2,485	3,193
0,15 x 0,60	0,140	0,573	0,916	1,693	1,391	2,145
0,15 x 0,65	0,096	0,443	0,902	1,012	1,136	2,051
0,15 x 0,70	0,078	0,318	0,502	0,544	0,750	0,943
0,15 x 0,75	0,067	0,270	0,425	0,460	0,633	0,794
0,15 x 0,80	0,059	0,240	0,377	0,403	0,560	0,712
0,15 x 0,85	0,055	0,221	0,345	0,371	0,510	0,635
0,15 x 0,90	0,052	0,206	0,322	0,346	0,474	0,588
0,15 x 0,95	0,049	0,197	0,305	0,327	0,448	0,553
0,15 x 1,00	0,048	0,189	0,293	0,313	0,428	0,525

Tabela 48 – Valores acelerações do Modelo IV (10,50 x 10,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)					
	Número de Pessoas					
	1	5	9	11	16	25
0,20 x 0,50	0,226	0,915	1,591	1,67	2,46	3,23
0,20 x 0,55	0,137	0,842	0,903	0,998	2,32	2,72
0,20 x 0,60	0,091	0,523	0,877	0,883	0,936	1,41
0,20 x 0,65	0,072	0,421	0,788	0,772	0,836	0,932
0,20 x 0,70	0,062	0,248	0,389	0,421	0,533	0,725
0,20 x 0,75	0,054	0,219	0,344	0,371	0,510	0,635
0,20 x 0,80	0,050	0,201	0,314	0,339	0,465	0,579
0,20 x 0,85	0,047	0,189	0,294	0,316	0,433	0,534
0,20 x 0,90	0,045	0,180	0,280	0,300	0,411	0,507
0,20 x 0,95	0,044	0,175	0,270	0,288	0,394	0,484
0,20 x 1,00	0,043	0,169	0,262	0,279	0,381	0,467

Tabela 49 – Valores acelerações do Modelo V (11,50 x 11,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)					
	Número de Pessoas					
	1	5	9	11	16	25
0,15 x 0,50	0,293	1,25	1,880	2,32	3,33	3,94
0,15 x 0,55	0,272	1,18	1,910	2,12	2,92	3,82
0,15 x 0,60	0,266	1,16	1,860	2,07	2,88	3,78
0,15 x 0,65	0,242	0,99	1,610	1,78	2,49	3,27
0,15 x 0,70	0,231	0,812	1,300	1,44	2,02	2,66
0,15 x 0,75	0,191	0,721	1,201	1,16	1,84	2,45
0,15 x 0,80	0,162	0,648	0,962	1,02	1,59	2,06
0,15 x 0,85	0,133	0,556	0,909	0,959	1,42	1,89
0,15 x 0,90	0,106	0,446	0,734	0,824	1,15	1,54
0,15 x 0,95	0,0791	0,376	0,619	0,641	1,19	1,32
0,15 x 1,00	0,0715	0,33	0,547	0,622	0,98	1,19

Tabela 50 – Valores acelerações do Modelo V (11,50 x 11,50)m

Vigas de Bordo (m)	a_p (m/s ²)					
	Número de Pessoas					
	1	5	9	11	16	25
0,20 x 0,50	0,276	1,18	1,73	2,07	2,92	3,79
0,20 x 0,55	0,255	1,12	1,65	1,99	2,79	3,61
0,20 x 0,60	0,233	0,954	1,55	1,72	2,42	3,17
0,20 x 0,65	0,232	0,93	1,5	1,65	2,31	2,98
0,20 x 0,70	0,195	0,765	1,23	1,35	1,89	2,42
0,20 x 0,75	0,154	0,64	1,03	1,12	1,63	2,15
0,20 x 0,80	0,145	0,522	0,858	0,96	1,34	1,79
0,20 x 0,85	0,106	0,443	0,726	0,814	1,14	1,52
0,20 x 0,90	0,0914	0,386	0,634	0,71	0,999	1,34
0,20 x 0,95	0,0785	0,341	0,563	0,578	0,896	1,15
0,20 x 1,00	0,0699	0,315	0,523	0,597	0,738	1,11

As acelerações que se encontram acima do limite estabelecido em normas e recomendações de projetos ($a_{lim}=0,5m/s^2$) [32] acarretam em violação dos critérios de conforto humano, no que tange as atividades de ginástica aeróbicas.

Verifica-se que o valor máximo de aceleração de pico encontrado foi de 3,94 m/s² no Modelo V (11,50 x 11,50) m com viga de bordo de (0,15 x 0,50) m por ser um modelo mais flexível.

Considerando-se os valores das frequências naturais (Tabela 7) do modelo V, correspondentes aos modos de vibração com preponderância das amplitudes modais das lajes de concreto do piso, constata-se que estes valores encontram-se relativamente próximos da frequência do terceiro harmônico da ação dinâmica humana rítmica, o que ocasiona valores elevados para as acelerações, em determinadas situações, em consonância com o aumento do número de pessoas praticando ginástica aeróbica sobre o piso.

Considerando-se o parágrafo acima, foi observado que quanto maior o número de pessoas praticando ginástica aeróbica, com frequência de excitação igual ou mesmo próximas de frequências naturais do piso, relacionadas a modos de vibração com preponderância de amplitudes modais das lajes de concreto, maiores

serão os valores das acelerações de pico. Tal fato caracteriza o fenômeno da ressonância.

7.4 Análise qualitativa das acelerações de pico

Os gráficos a seguir correspondem ao comportamento das acelerações em função da viga de bordo para cada carregamento e para cada modelo. O limite de aceleração Está representado nos gráficos, o valor limite de aceleração ($a_{lim} = 0,5m/s^2$) [32].

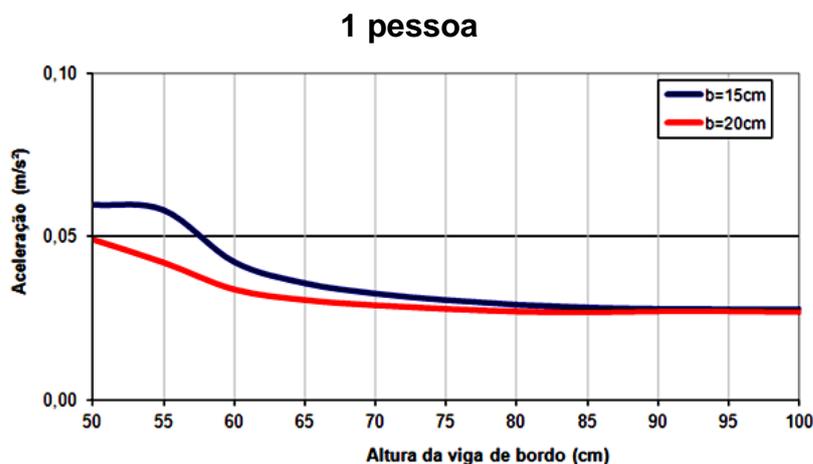


Figura 74 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas bordo – Modelo II

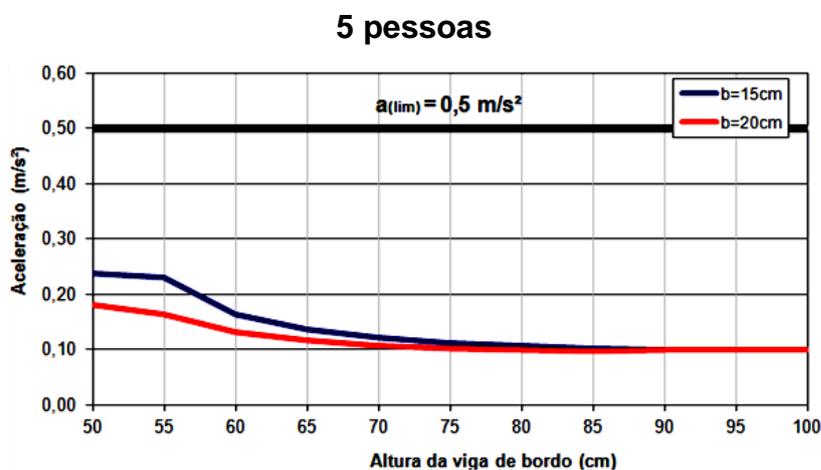


Figura 75 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II

9 pessoas

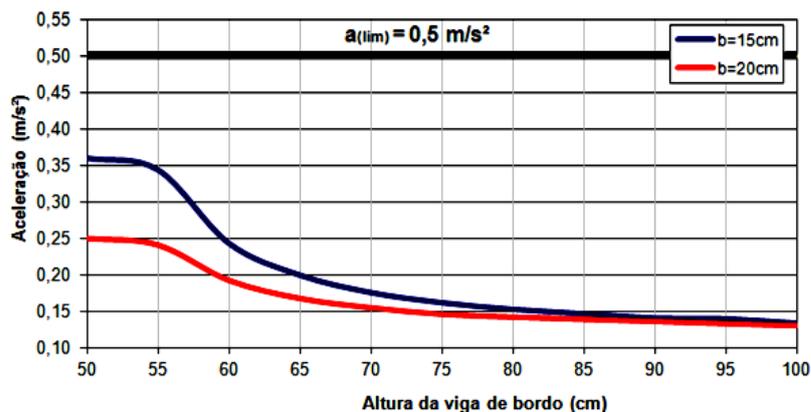


Figura 76 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II

13 pessoas

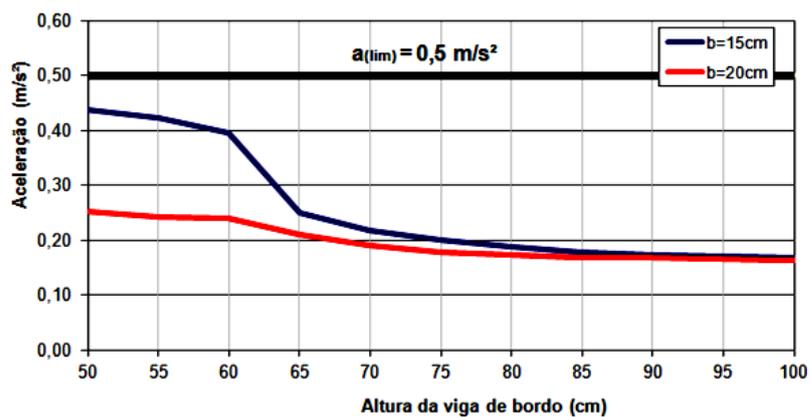


Figura 77 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II

16 pessoas

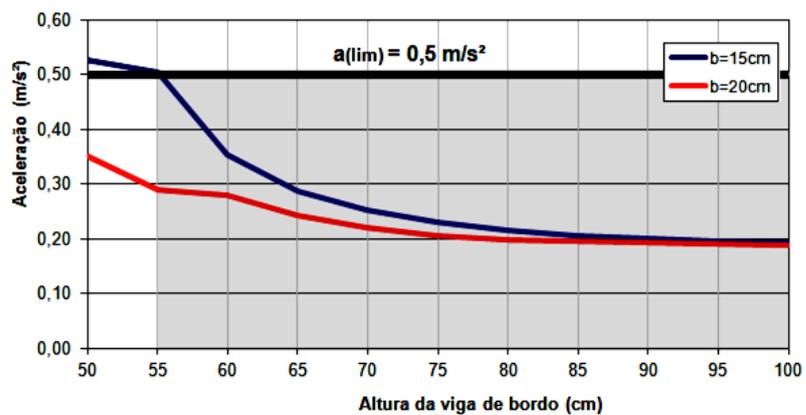


Figura 78 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo II

Nas Figuras 74 a 78 apresentam os gráficos das acelerações em função da variação das vigas de bordo do Modelo II. Nesses gráficos é possível analisar o comportamento dinâmico para cada situação de carregamento adotado e dessa forma, verificar os limites para cada situação. Pode-se concluir que com o aumento da inércia das vigas de bordo há uma menor variação da aceleração.

Verifica-se que os valores máximos de aceleração atingiram níveis da ordem $0,53 \text{ m/s}^2$, para o caso de carregamento com 16 pessoas e com vigas de bordo (0,15 x 0,50) m ultrapassaram os valores limites de aceleração ($a_{\text{lim}} = 0,5 \text{ m/s}^2$) [32]. A área hachurada representa a região de limite da altura da viga de bordo para o modelo representado.

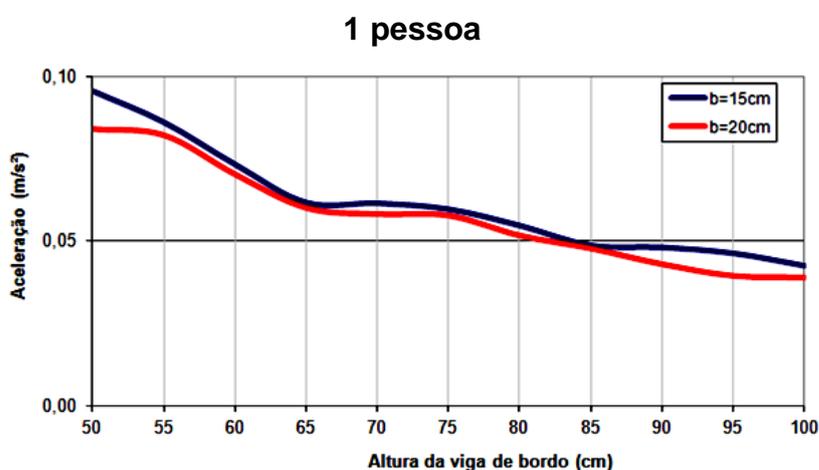


Figura 79 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III

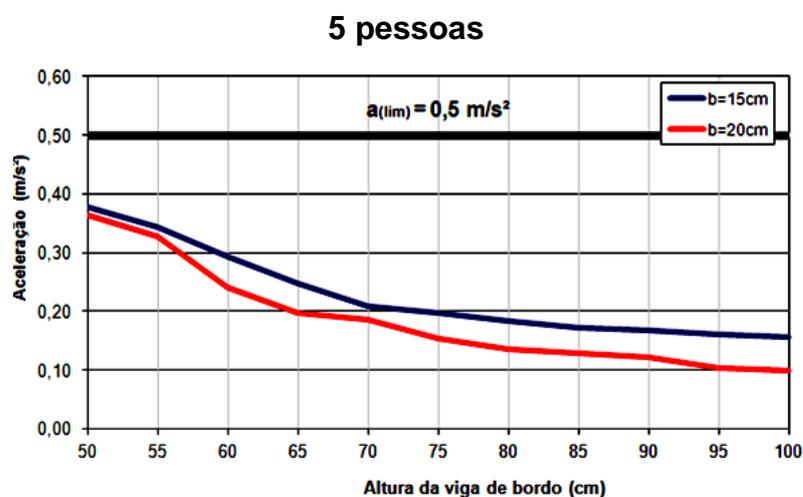


Figura 80 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III

9 pessoas

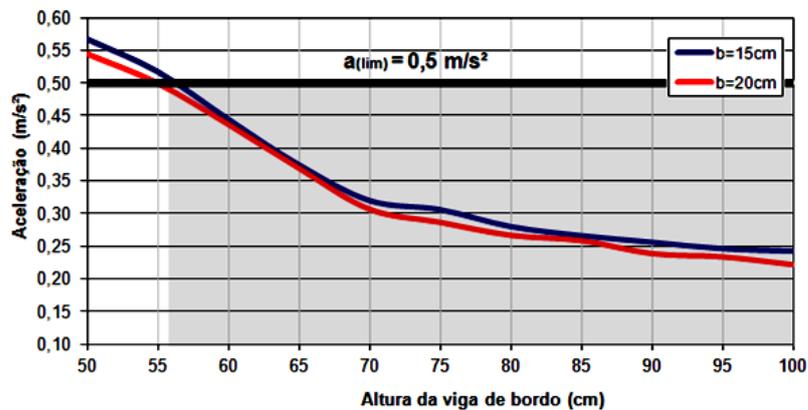


Figura 81 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III

13 pessoas

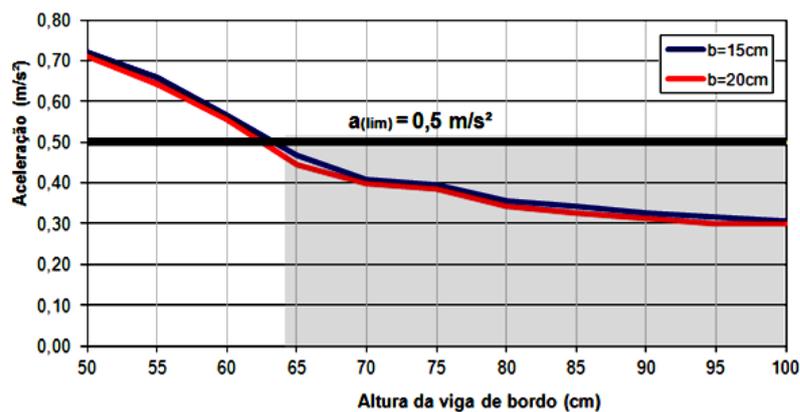


Figura 82 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III

16 pessoas

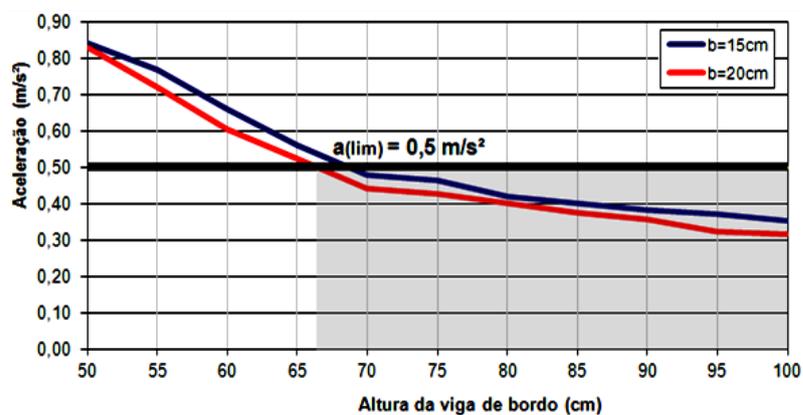


Figura 83 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo III

De maneira semelhante a análise do Modelo II pode-se concluir que com o aumento da inércia das vigas de bordo há uma tendência a menores diferenças entre os valores de acelerações. Também nestes gráficos há um número maior de casos em que os valores limites de aceleração ($a_{lim} = 0,5\text{m/s}^2$) [32] são extrapolados, que se justifica por ser um modelo mais flexível que o Modelo II. A área hachurada representa a região limitada pela altura da viga de bordo dentro dos padrões aceitáveis considerados.

Os gráficos na sequência se referem as análises do Modelo IV (10,50 x 10,50)m.

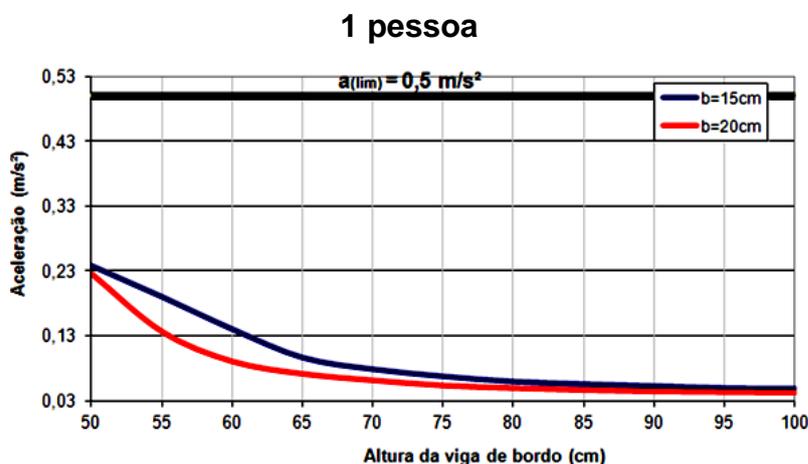


Figura 84 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

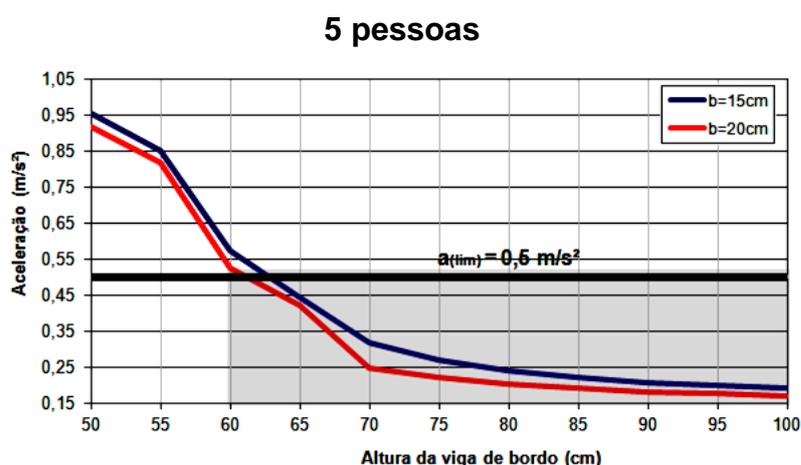


Figura 85 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

9 pessoas

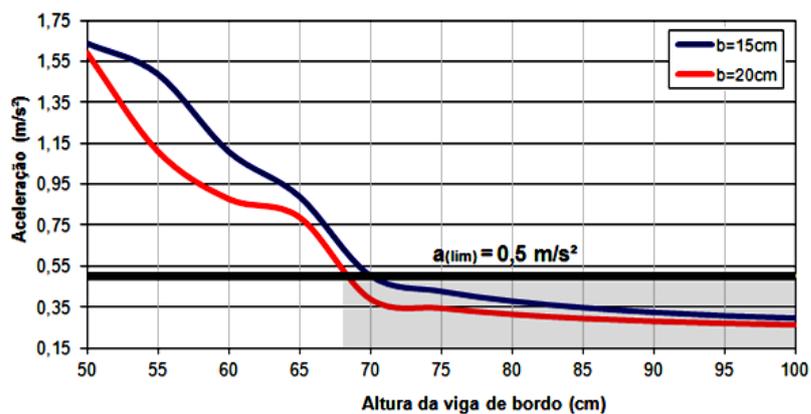


Figura 86 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

11 pessoas

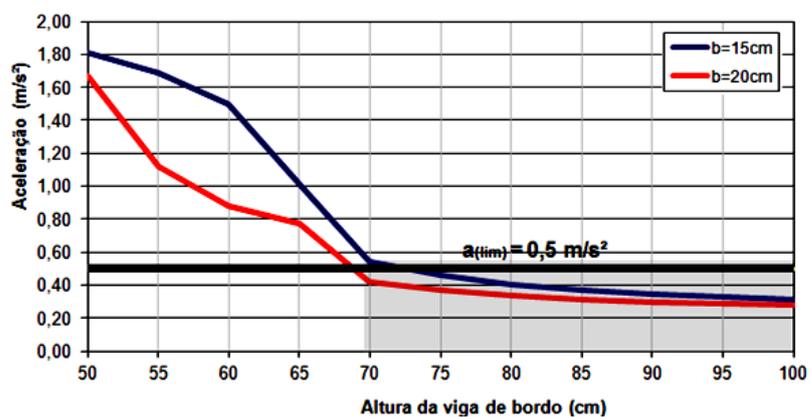


Figura 87 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

16 pessoas

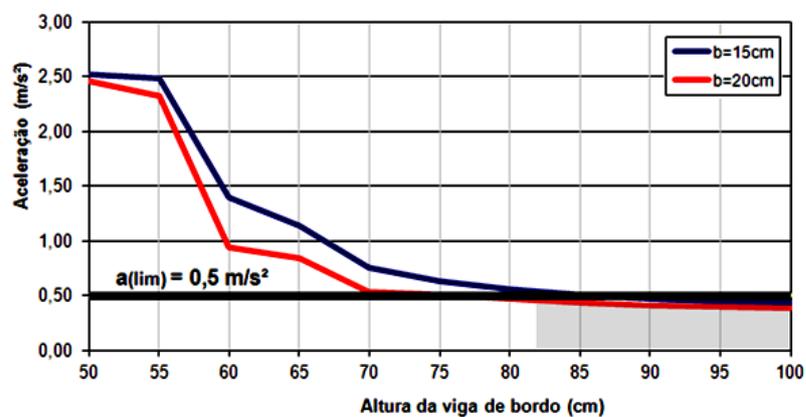


Figura 88 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

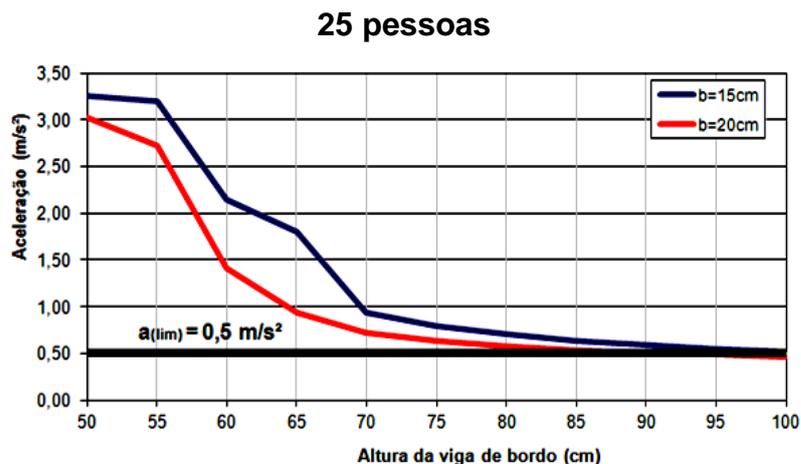


Figura 89 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo IV

Nas Figuras 84 a 89 apresentam-se os casos de carregamento para o Modelo IV. Por se tratar de um modelo mais flexível, verifica-se que para o caso de carregamentos com 5 pessoas há um limite quanto a geometria das vigas de bordo. Percebe-se que para vigas com alturas menores que 0,60 m os valores de aceleração ultrapassam os valores limites ($a_{lim} = 0,5m/s^2$) [32] neste modelo.

Verifica-se que aumentando o número de pessoas haverá uma restrição maior quanto a ocupação. Para o carregamento com 25 pessoas em todos os casos de viga de bordo, ultrapassam os valores limites ($a_{lim} = 0,5m/s^2$) [32].

Os gráficos das Figuras 90 a 95 referem-se às análises do Modelo V (11,50 x 11,50)m.

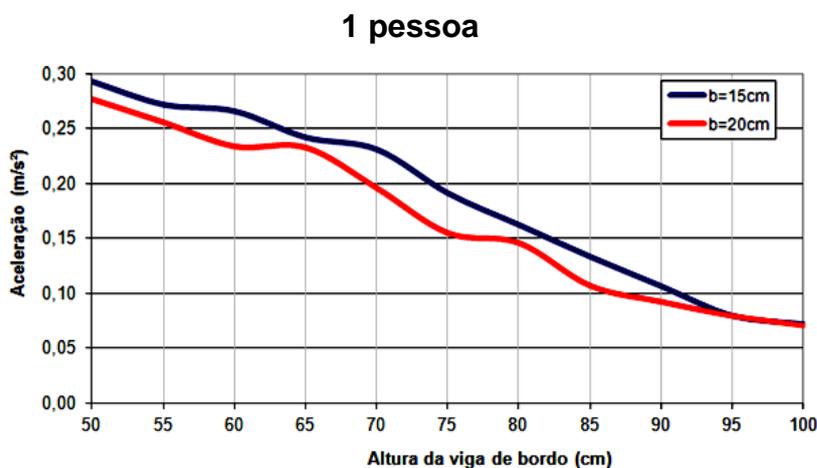
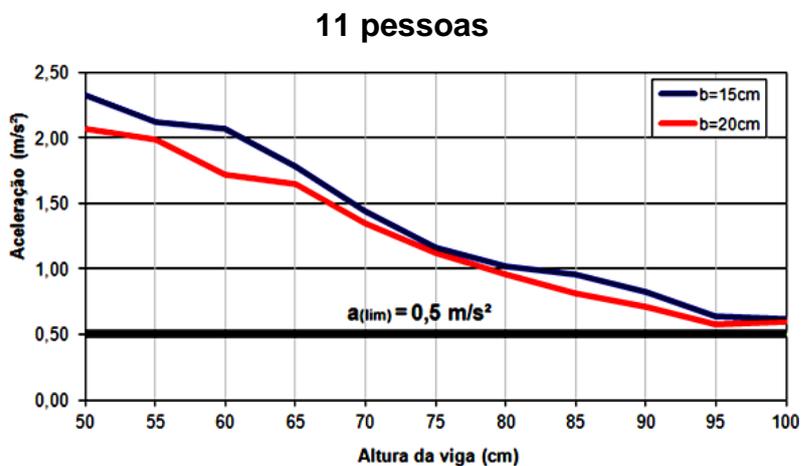
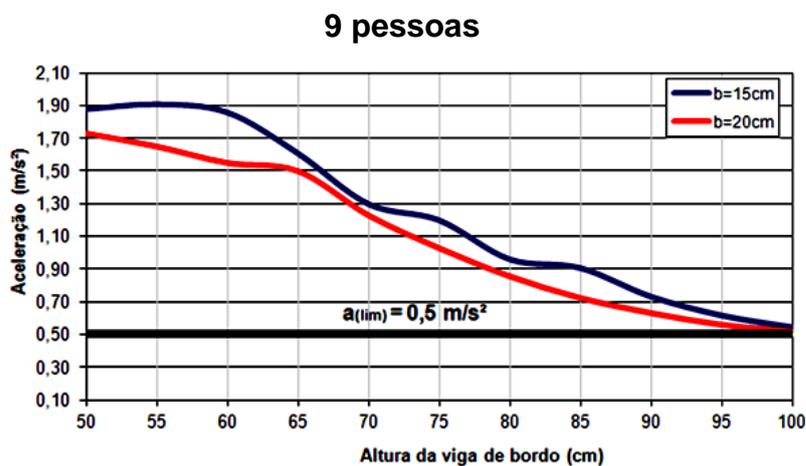
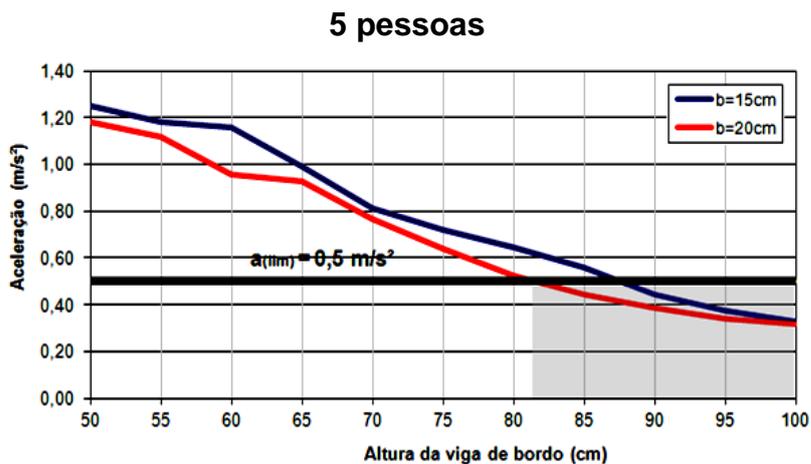


Figura 90 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V



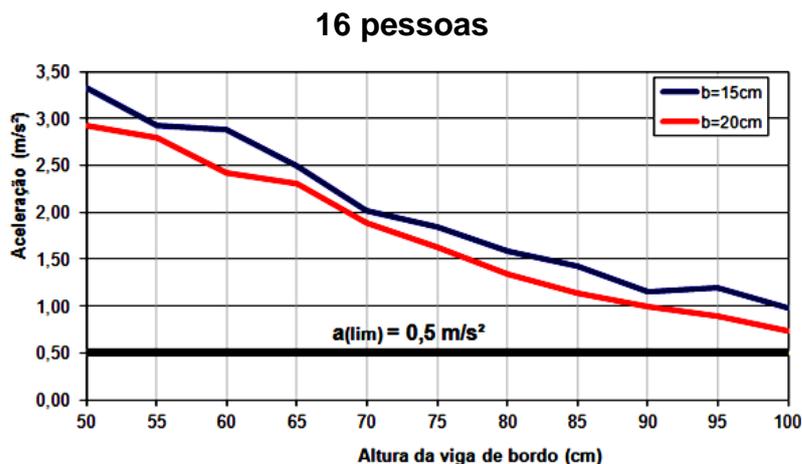


Figura 94 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V

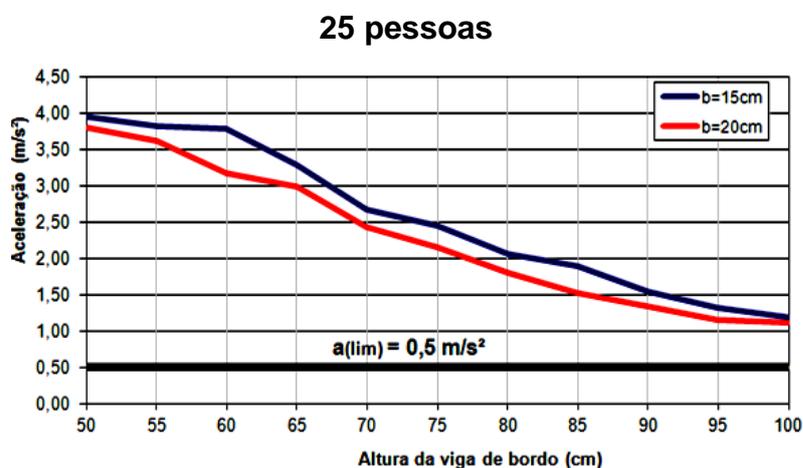


Figura 95 – Variação das acelerações em função das dimensões das vigas de bordo – Modelo V

Verifica-se que os valores das acelerações de pico obtidos na análise deste modelo de carregamento dinâmico composto por 5 pessoas (Figura 94), praticando ginástica aeróbica sobre o piso investigado, encontram-se acima do limite estabelecido em normas e recomendações de projeto ($a_{lim} = 0,5m/s^2$) [32] para vigas de bordos (0,20 x 0,80) m ou (0,15 x 0,85) m o que acarreta em violação dos critérios de conforto humano.

Para os carregamentos com 9, 11, 16 e 25 pessoas (Figura 93 a 98) a situação torna-se ainda mais crítico limitando-se a utilização no que tange a ginástica aeróbica.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 Generalidades

Esta dissertação de mestrado objetivou contribuir com referência ao estudo do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado, tendo em mente o emprego destas, de forma viável sob o ponto de vista técnico e econômico, em sistemas estruturais na engenharia civil.

O trabalho de pesquisa consistiu na modelagem computacional de diversos sistemas estruturais de lajes nervuradas. As lajes nervuradas foram analisadas de forma global, ou seja, considerando-se de forma conjunta a laje nervurada e, bem como, a influência da rigidez das vigas de bordo. Para tal, os modelos numérico-computacionais foram gerados usando técnicas usuais de discretização, via método dos elementos finitos, por meio do emprego do programa Ansys [25].

Este trabalho foi dividido em quatro etapas distintas, a saber: a primeira etapa consistiu na modelagem computacional do sistema, de maneira a representar a geometria do modelo. Em seguida foi realizado um estudo acerca do comportamento estático dos diversos modelos de lajes nervuradas. Posteriormente realizou-se uma análise das frequências naturais e modos de vibração das edificações investigadas; e, em seguida, uma avaliação do conforto humano desses modelos, mediante a obtenção das acelerações de pico.

Foi realizada uma análise crítica acerca da resposta estática (deslocamentos, esforços e tensões) e dinâmica (frequências naturais, modos de vibração e acelerações de pico) das lajes nervuradas investigadas. No que diz respeito aos valores das acelerações máximas (acelerações de pico), estes são comparados com os limites propostos por recomendações de projeto, sob o ponto de vista do conforto humano.

8.2 Conclusões Alcançadas

A análise dos resultados numéricos obtidos nos diversos modelos propostos permitiu algumas conclusões importantes conforme descrito nos parágrafos seguintes.

Na modelagem numérica das lajes nervuradas de concreto armado, o desafio inicial consistiu em representar a geometria real do sistema estrutural. Sobre o estudo da melhor representação da modelagem de lajes nervuradas, referentes aos elementos finitos tridimensionais de viga (Beam44) e de casca (Shell63) [25], pode-se concluir que os valores de deslocamentos, esforços, tensões, frequências naturais e acelerações de pico são modificadas de acordo com o valor da excentricidade adotada (laje-nervura) no modelo numérico. Basicamente, as grandezas da resposta do sistema apresentam a mesma ordem de grandeza, com diferenças associadas à própria natureza e o nível de rigidez de cada modelo numérico-computacional (modelo casca-viga e modelo casca-casca).

Os modelos numéricos casca-casca possuem a capacidade de incorporar a excentricidade existente entre as lajes e as nervuras, naturalmente, sem nenhum artifício, representando convenientemente o comportamento estrutural (estático e dinâmico) global da estrutura. A confecção dos modelos numéricos casca-casca é bastante simples e, ao longo do estudo, foi verificado que os mesmos representam o comportamento global da estrutura com fidelidade e boa precisão, de acordo com os resultados obtidos por outros autores Coimbra [19] e Dias [15].

Com o objetivo de analisar o comportamento estrutural das lajes nervuradas, quando submetidas aos carregamentos estáticos, foi verificado que os valores dos deslocamentos translacionais verticais máximos (flechas máximas,) obtidos no centro das lajes nervuradas, apresentam uma tendência de variação não-linear decrescente, na medida em que a rigidez das vigas de bordo dos modelos estruturais é aumentada. Tal situação repete-se também para os esforços, tensões e acelerações de pico.

No que diz respeito aos valores das tensões verifica-se que as tensões máximas obtidas nos modelos investigados nesta dissertação foram sempre de flexão com valores iguais de σ_x e σ_y . Das análises realizadas pode ser verificado que os valores das tensões máximas tendem a aumentar na medida em que os vãos aumentam. A título de exemplo, os valores das tensões, considerando-se uma mesma viga de

bordo (0,15x0,75 m), para a laje (9,50x9,50) m foi da ordem de 8 MPa enquanto que o valor da tensão máxima para a laje (10,50x10,50) m foi da ordem de 10 MPa.

Na análise dos valores das frequências naturais foi verificado que a partir do aumento da rigidez dos apoios das lajes nervuradas (efeito das vigas de bordo), os valores das frequências naturais tendem a aumentar. Verifica-se, também, que alguns dos modelos estruturais investigados teriam limitações, no que diz respeito a alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações induzidas pela ação dinâmica de pessoas, devido ao fato de que o valor da frequência fundamental destes modelos (f_{01}), para determinadas situações, é inferior ao valor da frequência crítica ($f_{01} < 1,2f_{crit}$) recomendada pela norma brasileira NBR 6118:2007 [8].

Considerando-se o caso investigado ao longo desta dissertação de mestrado, associado a salas de ginástica, o valor da frequência crítica da estrutura corresponderia a 8,4 Hz ($f_{01} < 1,2f_{crit} = 1,2 \times 7,0 = 8,4$ Hz). Esta análise permite concluir que apenas os modelos estruturais com vigas de bordo (0,15x0,95) m, (0,15x1,00) m, (0,20 x 85) m a (0,20 x 1,00) m atenderiam aos critérios de projeto da norma brasileira NBR6118:2007 [8].

Os modelos estruturais com maiores vãos (10,50 x 10,50) m e (11,50 x 11,50) m são os mais flexíveis e mostraram-se mais suscetíveis a problemas de vibração excessiva, pois o valor da frequência fundamental dos pisos diminui sensivelmente com o aumento do vão. Percebeu-se, também, que o aumento da inércia das vigas de bordo contribui para o aumento da rigidez das lajes, aumentando assim as frequências naturais do sistema.

Na análise dos resultados foi possível verificar que os modos de vibrações dos modelos de lajes nervuradas investigados são bastante semelhantes não apresentando mudanças significativas. Portanto, conclui-se que o efeito das vigas de bordo influencia diretamente nos valores das frequências naturais, mas não possui influência significativa, no que se refere às formas modais dos modelos investigados.

No que tange as análises de vibração forçada, com base no emprego das ações dinâmicas humanas rítmicas aplicadas sobre as lajes nervuradas, os sinais no tempo (deslocamentos e acelerações), de forma geral, apresentam um trecho relativamente curto, da ordem 1,5 s, correspondente à fase transiente da resposta do sistema. Contudo, considerando-se a própria natureza da excitação dinâmica, os valores máximos, de interesse direto para uma análise de fadiga do material, ocorrem na

fase permanente da resposta (*steady-state response*) do sistema, a qual é atingida rapidamente.

Com relação às acelerações máximas (acelerações de pico) obtidas ao longo da presente dissertação foi verificado que a partir do aumento da inércia das vigas de bordo de concreto armado houve uma diminuição sensível nos valores das acelerações de pico. Foi observado que as vigas de bordo dos modelos possuem influência significativa na questão associada ao conforto humano.

No Modelo II (8,50 x 8,50) m (Figuras 74 a 78), foi observado que ocorreram poucas situações em que a resposta dinâmica das lajes nervuradas estudadas (acelerações máximas) ultrapassaram os valores limites de aceleração ($a_{lim} = 0,5\text{m/s}^2$) [32]. Neste modelo em particular, os valores máximos de aceleração atingiram níveis da ordem $0,53\text{ m/s}^2$, para o caso de carregamento com 16 pessoas e com vigas de bordo (0,15 x 0,50) m.

O Modelo III (9,50 x 9,50) m (Figuras 79 a 83), apresenta comportamento semelhante ao Modelo II (8,50 x 8,50) m. As restrições quanto aos limites de acelerações de pico neste modelo são, de maneira geral, maiores que o Modelo I, pois se trata de um pavimento mais flexível. Dessa forma, para carregamentos com 9 pessoas (Figura 81), a laje analisada apresenta restrição para carregamentos com 9 pessoas e vigas de bordo (0,15 x 0,55) m e (0,20 x 0,55) m com valores de acelerações de $0,57\text{ m/s}^2$ e $0,52\text{ m/s}^2$ superiores a aceleração limite ($a_{lim} = 0,5\text{m/s}^2$) [32].

No Modelo III (9,50 x 9,50) m, para carregamentos com 13 pessoas e 16 pessoas há maiores restrição se comparar com os limites de aceleração ($a_{lim} = 0,5\text{m/s}^2$) [32]. Os pavimentos com vigas de bordo inferiores a (0,15 x 0,65) m e (0,20 x 0,65) m (Figura 82 e Figura 83) apresentam valores de acelerações de pico de $0,56\text{ m/s}^2$ e $0,52\text{ m/s}^2$, respectivamente.

O Modelo VI (10,50 x 10,50) m torna-se mais crítico quanto ao conforto humano, pois para o carregamento com apenas 9 pessoas praticando atividades físicas (ginástica rítmica) apresentou restrições quando se comparam os valores de acelerações de pico obtidos com os limites de aceleração ($a_{lim} = 0,5\text{ m/s}^2$) [32] referentes neste trabalho. Nesse pavimento, para casos de carregamentos dinâmicos de 5 pessoas e lajes com vigas de bordo inferiores a (0,15 x 0,70) m e (0,20 x 0,65) m as acelerações de pico atingiram valores de $0,50\text{ m/s}^2$ e $0,79\text{ m/s}^2$, respectivamente. Verifica-se que neste tipo de laje há maiores restrições quanto ao

carregamento apresentando maior número de casos de acelerações de pico superiores a acelerações limites.

O Modelo V por ser mais flexível que os demais, apresenta valores superiores de acelerações de pico que todos os casos estudados para os demais pisos. Sendo que, para carregamentos com 9 pessoas, 11 pessoas, 16 pessoas e 25 pessoas os valores limites de acelerações de pico em todas as vigas de bordo admitidas são superiores aos valores limites de aceleração ($a_{lim} = 0,5 \text{ m/s}^2$) [32]. Quanto ao conforto humano, a utilização do pavimento para atividade rítmica de ginástica aeróbica restringe-se a 5 pessoas com vigas de bordo superiores a $(0,15 \times 0,85) \text{ m}$ e $(0,20 \times 0,90) \text{ m}$.

No que tange à verificação dos estados limites de utilização (vibrações excessivas) associada ao comportamento estrutural de sistemas de pisos compostos por lajes nervuradas de concreto armado, o quadro global investigado ao longo desta dissertação demonstra, claramente, um indicativo de que os critérios de projeto devem levar em conta o caráter dinâmico da excitação e, especialmente, a influência dos elementos estruturais que estão associados ao problema, que no caso em análise, refere-se as vigas de bordo.

8.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Realização de testes experimentais onde possa ser feita uma comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e aqueles obtidos numericamente, com base no emprego do método dos elementos finitos.

Considerar modelos numérico-computacionais que levem em conta a rigidez real dos pilares, objetivando a geração de modelos numéricos com mais de um pavimento e, bem como, investigações sobre a influência da rigidez real destes pilares sobre a resposta dinâmica das lajes nervuradas.

Verificar a influência de taxa de armaduras nas nervuras de maneira que possa ser estudada a variação na rigidez das lajes nervuradas.

Realizar estudos levando-se em conta outros tipos de carregamentos dinâmicos induzidos pelo ser humano, tais como: caminhar, correr, dançar e, ainda saltos à vontade.

Incorporar na metodologia de análise a modelagem numérica associada à representação de dispositivos para controle das vibrações estruturais, objetivando analisar o desempenho desses dispositivos, em termos dos valores finais das acelerações de pico.

REFERÊNCIAS

- [1] ALBUQUERQUE, A. T. **Análise de alternativas estruturais para edifícios em concreto armado**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1998.
- [2] OLIVEIRA. Z.F. DE O. **Análise de Sistemas de Lajes**. Relatório Técnico – ARCTEC – Arquitetura, Construção e Tecnologia. Rio de Janeiro. Junho, 2005.
- [3] LIMA. J. C. de O. **Sistema Treliçado Global**. Boletim Técnico de Edifício. Volume 1. Campinas, 1991.
- [4] RESIDENCIAL JASMIM DOS AÇORES – AMC. Publicado em 15 de fevereiro de 2011. <http://jasmimdosacores.blogspot.com/2011/02/montagem-da-laje-nervurada.html>. Acesso em 19 de novembro de 2011.
- [5] FRANCA, A.B.M.; FUSCO, P.B.. **As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios**. AFALA & ABRAPEX, São Paulo, 1997.
- [6] ENGENHARIA CIVIL NA NET. Publicado em 17 de agosto de 2009. <http://engenhariacivilnanet.blogspot.com/2009/08/lajes-nervuradas.html>. Acesso em 19 de novembro de 2011.
- [7] BAYKOV, V.N.; SIGALOV, E.E. **Estructuras de Hormigon Armado**. Moscou, 2ª Edición, Editora Mir, 1986.
- [8] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO – PROCEDIMENTO**, 2007.
- [9] POLLILO, A. **Dimensionamento de concreto Armado**. Volume II. Editora Científica. 3ª Edição, Rio de Janeiro, 1977.

- [10] SOUZA, V. C. M; CUNHA, A. J. P., **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. 2ª edição, Rio de Janeiro. EdUFF – EdUERJ, 1998.
- [11] BLOG DA ENGENHARIA CIVIL NA NET. Publicado em 11 de julho de 2011. <http://eng-civilsergiopeixotto.blogspot.com/2011/07/lajes-ervuradas.html>. Acesso em 14 de novembro de 2011.
- [12] BOCCHI JR., C. F. **Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- [13] PINHEIRO, L. M. **Concreto armado: tabelas e ábacos**. São Carlos, EESC-USP, 1993.
- [14] CORRÊA, M.R.S E RAMALHO, M.A. **Sistema laser de análise estrutural**. 5º Simpósio Nacional de Tecnologia de Construção: Software para o Projeto de Edifícios. São Paulo, 1987.
- [15] DIAS. R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [16] BARBIRATO, B. C., **Contribuições à Análise de Pavimentos de Edifícios em Laje Nervurada**. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1997.
- [17] ARAÚJO, J. M., **Considerações sobre a Rigidez à Torção das Lajes Nervuradas de Concreto Armado**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, nº 7, Lisboa, Portugal, p. 1-8,2005.
- [18] ARAÚJO, J. M., **Avaliação dos Procedimentos de Projeto das Lajes Nervuradas de Concreto Armado**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, nº 3, Lisboa, Portugal, p. 31-42, 2003.

- [19] COIMBRA, W. DE P. **Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS.** Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [20] STRAMANDINOLI, J. S. B., **Contribuições à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha.** 1998. Dissertação de Mestrado – COPPE/UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro .
- [21] COELHO, J. A.; LORIGGIO, D. D. **Analogia de Grelha Para o Projeto de Lajes de Concreto Armado.** XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Punta Del Este, Uruguay, 2000.
- [22] VASCONCELOS, R. P, **Atenuação de Vibrações em lajes Nervuradas de piso em concreto armado.** 1998. Dissertação de Mestrado – COPPE/UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [23] SILVA, N. M T. F. **Análise Estática e Dinâmica de Lajes Nervuradas de Concreto Armado.** Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Rio de Janeiro, 2008.
- [24] JULIANI, M.; DAVID, D. BECCOCI. Liana. **Resposta Dinâmica de um edifício com aula de dança.** Artigo Técnico apresentado durante o 53. Congresso do Instituto Brasileiro do Concreto - IBRACON, realizado em Florianópolis – SC , Florianópolis, 2011.
- [25] ANSYS. Swanson Analysis Systems, Inc., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 10.0, Basic analysis procedures, Second edition, 2009.
- [26] PINHEIRO L. M., RAZENDE J. A. **Estruturas de Concreto.** USP – EESC – Departamento de Engenharia de Estruturas. São Paulo, 2003.

- [27] DONIN, Christian, **Análise Numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos**. 2007. Tese de Mestrado – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Área de Concentração Civil, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), Santa Maria, 2007.
- [28] ROCHA, A. M., **Concreto Armado**. Volume 1, São Paulo. Ed. Nobel.
- [29] ARAÚJO, J. M., **Curso de Concreto Armado**. Volume 2. Editora Dunas. 3 Edição. Rio Grande. Rio Grande do Sul. 2010.
- [30] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: CARGAS PARA O CÁLCULO DE ESTRUTURAS DE EDIFICAÇÕES**, 1980.
- [31] FAISCA, R.G.. Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humanas. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.
- [32] T.M. MURRAY, D.E. ALLEN e E.E. UNGAR, **Floor Vibrations due to Human Activity, Steel Design Guide Series**, American Institute of Steel Construction, AISC, 2003.
- [33] REZENDE, M. N. **Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990.
- [34] CAMPOS. M.D. SILVA. J.B. **O Método de elementos Finitos Aplicado à Simulação Numérica de Escoamento e Fluidos**. III Bienal da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática – IME/UFG. 2006.
- [35] BACHMANN, H. - **Case Studies of Structures with Man-Induced Vibrations** - Journal of Structural Engineering, Vol.118, Nº.3, March, 1992.
- [36] LANGER, N. A dos S. **Estudo do Conforto Humano em Pisos Mistos (Aço-Concreto) submetidos a Ações Humanas Rítmicas**. Dissertação de

Mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Rio de Janeiro, 2009.

- [37] ALTOQI. Análise de lajes de concreto armado (Parte IX). Artigo 308: **Análise de lajes nervuradas por analogia de grelha** (<http://www.altoqi.com.br/index2.asp?browser=FF>), 2002.
- [38] ALMEIDA FILHO, F. M., CORREA, M. R. S., RAMALHO, M. A. **Comparações de consumo e pavimentos de edifícios em concreto armado protendido com cordoalhas engraxadas**. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 2003.
- [39] CARVALHO. L. F., Procedimento Experimental para avaliação do fator de amortecimento em estruturas. 2002. Tese de Mestrado – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG, MG), Belo Horizonte, 2002.
- [40] ARAÚJO, J. M., **Análise Não-Linear de Lajes Maciças e Lajes Nervuradas de Concreto Armado**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, nº 52, Lisboa, Portugal, p. 43-52, 2003. 166.
- [41] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, ACI-435 – **Deflection of Two-Way Reinforced Concrete Floor Systems**: State-of-the-art Report. Detroit, 1989.